Integrarea prin părți

Elaborat de Alexei Elistratov

Astăzi vom studia

- Formula integrării prin părți și aplicarea ei
- Integrale care conțin sub semnul lor în calitate de factor una din funcțiile: $\ln(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $arctg(x)$
- Integrale de formă $\int P_n(x)\cos(cx)\,dx$, $\int P_n(x)\sin(cx)\,dx$ $\int P_n(x)e^{cx}dx$, unde $c\epsilon R^*$, $P_n(x)$ este funcție polinomială asociată polinomului $P(X)$ de grad n.

Să se pune problema cum calculăm integrala produsului a două funcții, mai ales că – așa cum am văzut – nu are sens să definim produsul a două integrale. Un răspuns parțial este dat de metoda integrârii prin părți. Cadrul teoretic este dat de următoarea:

Teoremă: $Dacă\ u, v : I \rightarrow R\ sunt\ funcții\ derivabile,$
$iar\ funcția\ u'v\ are\ primitive, atunci\ și\ funcția\ uv'are$
$primitive\ și\ există\ egalitate:$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$sau, în\ notație\ diferențială:$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Haideți să rezolvăm!

$$\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$Aplicând\ formula \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$obținem:$

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} * \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2xdx & v = -\cos x \end{vmatrix}$$

$$Aplicând\ formula \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$obținem:$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x & dv = \cos x dx \\ du = 2dx & v = \sin x \end{vmatrix}$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

Nr.	Integrale nedefinite
1	$\int dx = x + C$
2	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$
8	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
9	$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
10	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + C$
12	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
15	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
16	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
17	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
18	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$
19	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
20	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
21	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$
22	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$
23	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

1. $d \int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$

3. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$