Математическая теория катастроф

Студенты гр. В4150:
Ашуров М.А
Шахалов А.
Мухиддинов М.М.
Ашуров А.
Ткач П.

Факультет лазерной и световой инженерии

Теория катастроф

Теория катастроф — раздел математики, включающий в себя теорию бифуркаций дифференциальных уравнений (динамических систем) и теорию особенностей гладких отображений.

Термины «катастрофа» и «теория катастроф» были введены Рене Томом (René Thom) и Кристофером Зиманом (Christopher Zeeman) в конце 1960-х — начале 1970-х годов («катастрофа» в данном контексте означает резкое качественное изменение объекта при плавном количественном изменении параметров, от которых он зависит). Одной из главных задач теории катастроф является получение так называемой нормальной формы исследуемого объекта (дифференциального уравнения или отображения) в окрестности «точки катастрофы» и построенная на этой основе классификация объектов.

Теория катастроф нашла многочисленные применения в различных областях

- прикладной математики,
- физики,
- экономике.

История

Начало математической теории катастроф положили классические работы великого российско-немецкого математика Леонарда Эйлера по теории устойчивости – многообразной дисциплине, изучающей закономерности поведения систем под действием внешних воздействий. В работах Эйлера наибольшее развитие получила теория устойчивости механических систем. Действительно, именно механика как старейшая наука, впервые столкнулась с проблемами устойчивости. Эйлер впервые строго поставил и решил задачу устойчивости состояния равновесия механический системы — стержня, сжатого сжимающей силой (эластика Эйлера).

Первые фундаментальные результаты в области динамических систем, относящиеся к теории катастроф, принадлежат А. Пуанкаре (метод нормальных форм в теории дифференциальных уравнений) и А. А. Андронову (бифуркации динамических систем).

Основы теории особенностей гладких отображений были заложены прежде всего в трудах американского тополога Хасслера Уитни (Hassler Whitney) в 1940-х 1950-х годах, которым предшествовала лемма Морса о нормальной форме функции в окрестности невырожденной критической точки.

В конце 1960-х годов развитием этого направления занялся известный французский математик и филдсовский лауреат 1958 года Рене Том. Однако популярность идеи Уитни и Тома приобрели благодаря нескольким публикациям К. Зимана в 1970-х годах, который активно пропагандировал теорию катастроф, сравнивая её значение с изобретением математического анализа и говоря о "революции в математике". Бурное развитие теории катастроф в 1970-е — 1990-е годы связано с деятельностью Дж. Боардмана, Е. Брискорна, Дж. Брюса, Дж. Мазера, Б. Мальгранжа, Р. Тома, Т. Волла, К. Зимана и особенно В. И. Арнольда и его учеников (А. Н. Варченко, В. А. Васильев, А. Б. Гивенталь, В. В. Горюнов, С. М. Гусейн-Заде, А. А. Давыдов, В. М. Закалюкин, В. Д. Седых и др.).

Семь элементарных катастроф по Тому

Теория катастроф анализирует критические точки (репетиции) потенциальной функции, то есть точки, где не только первая производная функции равна нулю, но и равны нулю же производные более высокого порядка. Динамика развития таких точек может быть изучена при помощи разложения потенциальной функции в рядах Тейлора посредством малых изменений входных параметров.

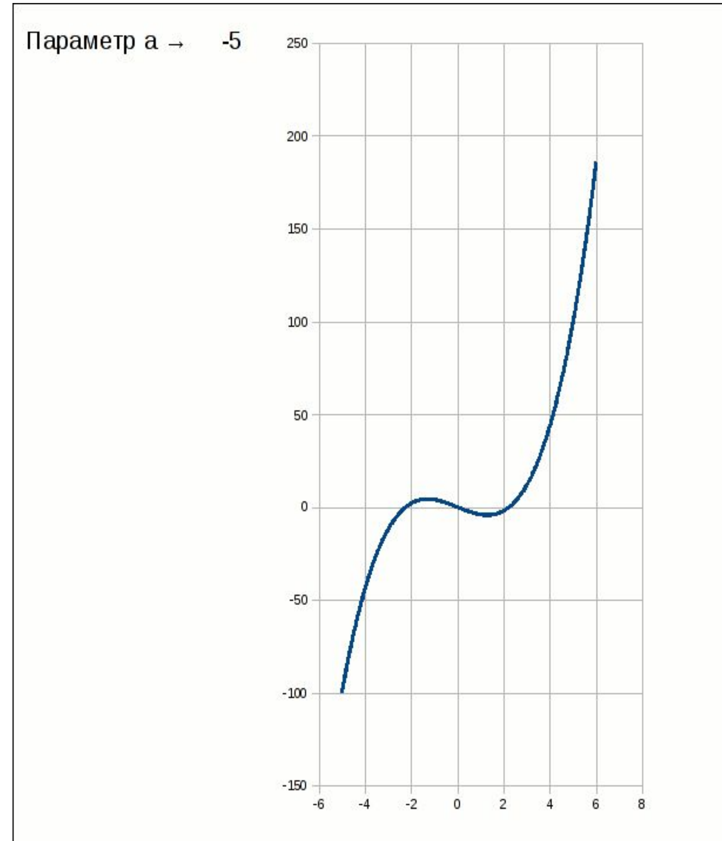
Если точки роста складываются не просто в случайный узор, но формируют структурированную область стабильности, эти точки существуют как организующие центры для особых геометрических структур с низким уровнем катастрофичности, с высоким уровнем катастрофичности в окружающих их областях фазового пространства. Если потенциальная функция зависит от трёх или меньшего числа активных переменных, и пяти или менее активных параметров, то в этом случае существует всего семь обобщённых структур описанных геометрий бифуркаций, которым можно приписать стандартные формы разложений в ряды Тейлора, в которые можно разложить репетиции при помощи диффеоморфизма (гладкой трансформации, обращение которой также гладко). Сегодня эти семь фундаментальных типов катастроф известны под именами, которые им дал Рене Том.

Потенциальные функции с одной активной переменной

Катастрофа типа "Складка"

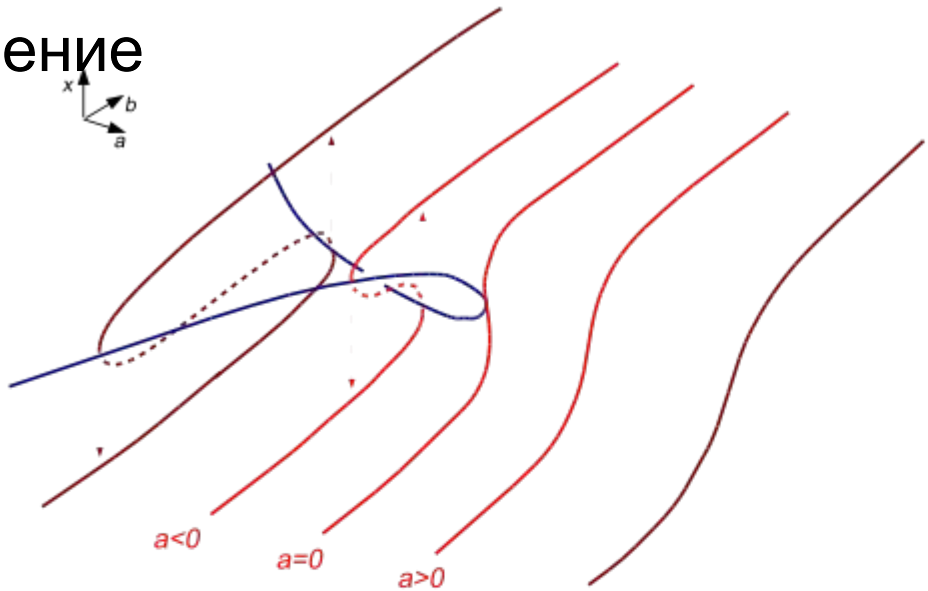
Стабильная и нестабильная части экстремума, исчезаемого при бифуркации типа "складка"

При отрицательных значениях параметра а, потенциальная функция имеет два экстремума — один стабильный (устойчивое равновесие) и один нестабильный (неустойчивое равновесие). Если параметр а медленно изменяется, система может находиться в точке стабильного минимума. Но если а = 0, стабильные и нестабильный экстремумы встречаются и аннигилируют. Это — точка бифуркации. При а > 0 не существует стабильного решения.

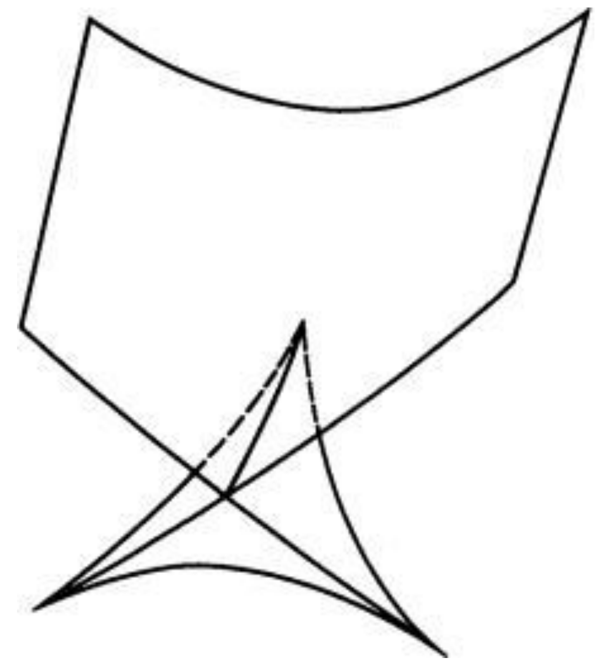


Катастрофа типа "Сборка«

Диаграмма катастрофы «сборка» с точкой возврата, на которой показаны кривые (коричневые, красные) по переменной x, удовлетворяющие выражению для параметров (a, b), кривые показаны для непрерывно изменяющегося параметра b при различных значениях параметра a. Вне геометрического места точек возврата (синяя область) для каждой точки (a, b) в фазовом пространстве существует только одно экстремальное значение переменной x. Внутри точек возврата существует два различных значения x, которые дают локальные минимумы функции V(x) для каждой пары (a, b). При этом указанные значения разделены локальным максимумом.

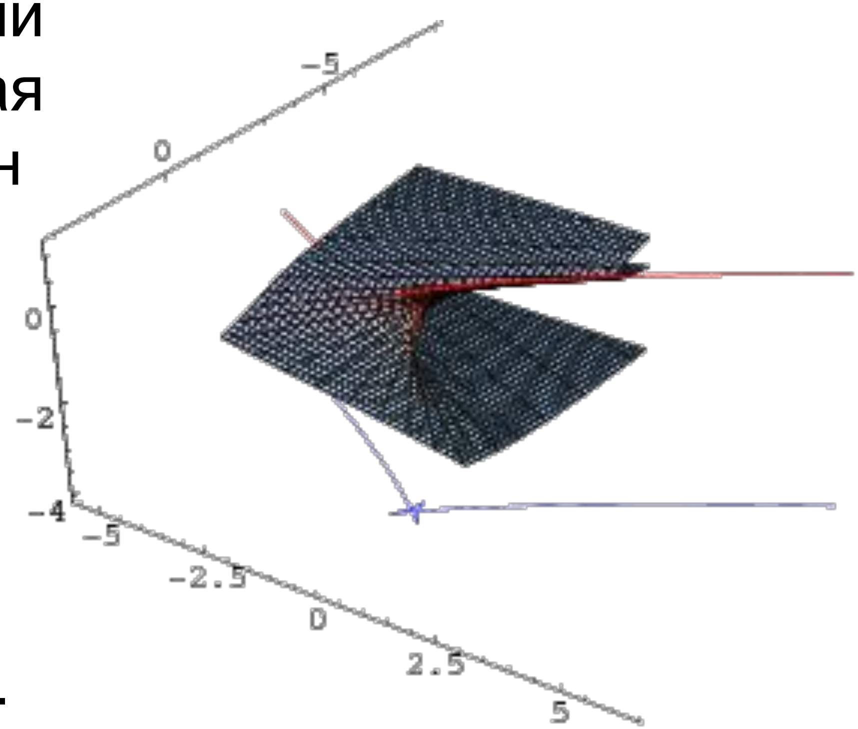


Катастрофа типа "Ласточкин хвост"
Управляющее пространство в данном типе катастроф является трёхмерным. Каскад бифуркаций в фазовом пространстве состоит из трёх поверхностей бифуркаций типа «свёртки», которые встречаются на двух кривых бифуркаций с точками возврата, которые в конечном итоге встречаются в одной точке, представляющей собой бифуркацию типа "ласточкин хвост"».



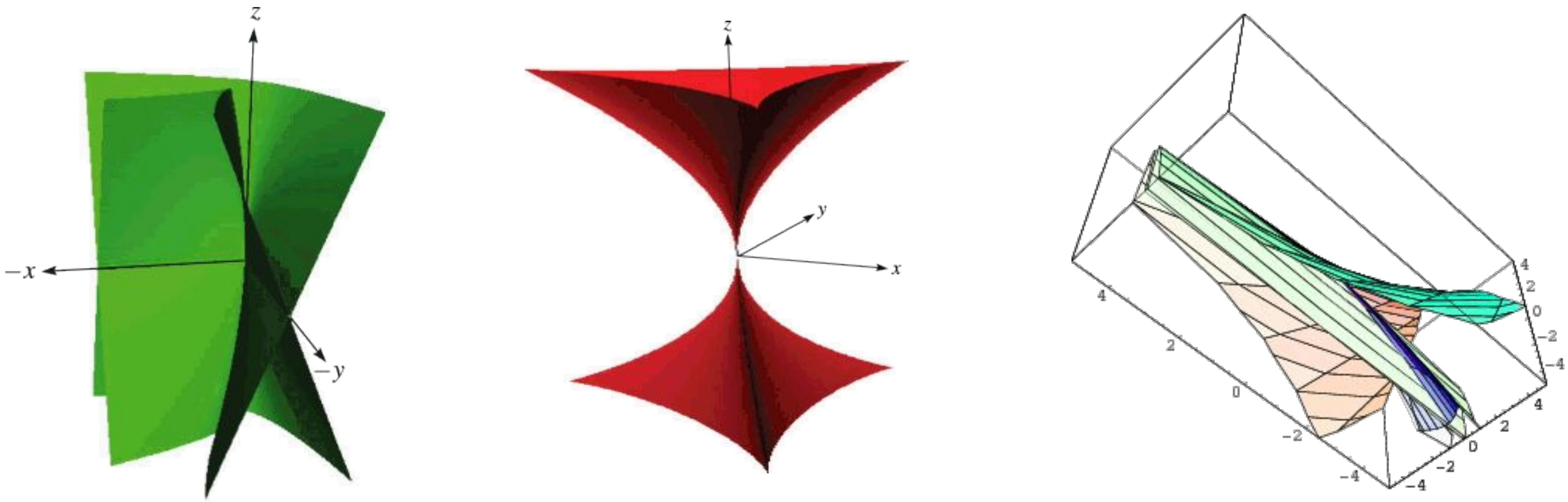
Катастрофа типа "Бабочка«

В зависимости от значений параметров потенциальная функция может иметь три, два или один локальный минимум, причём все минимумы разделены областями с бифуркациями типа "свёртка". В точке с поэтичным наименованием "бабочка" встречаются три различные пространства (трёхмерных плоскости) таких бифуркаций типа "свёртка", две поверхности бифуркаций с точками возврата и скривая бифуркаций типа "ласточкин хвост". Все эти бифуркации пропадают в одной точке и преобразуются в простую структуру с точкой возврата тогда, когда значение параметра а становится положительным.



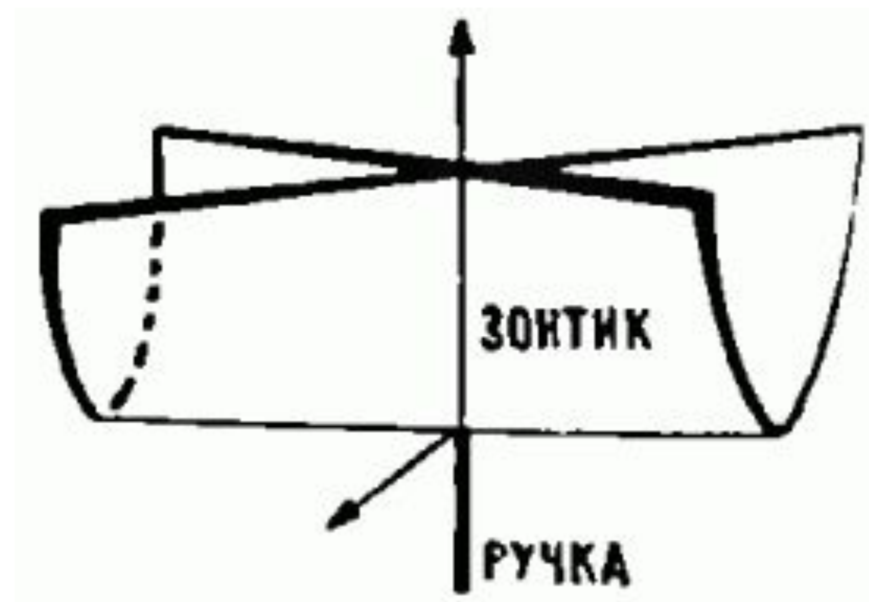
Потенциальные функции с двумя активными переменными

Омбилические катастрофы являются примерами катастроф второго порядка. Они, к примеру, могут наблюдаться в оптике при отражении света от трёхмерных поверхностей.



Зонтик Уитни – Кэли

Зонтиком эта поверхность называется потому, что уравнению, задающему поверхность, удовлетворяет и отрицательная часть оси Z - своего рода «ручка» зонтика.



Запись и классификация катастроф по Арнольду

- В. И. Арнольд предложил классификацию катастроф, использующую глубокие связи с теорией групп Ли.
- *A*0 — несингулярная точка: .
- *A*1 — локальный экстремум: устойчивый минимум или неустойчивый максимум .
- *A*2 — складка
- *A*3 — сборка
- *A*4 — ласточкин хвост
- *A*5 — бабочка
- *A*k — бесконечная последовательность форм от одной переменной
- *D*4+ — кошелёк = гиперболическая омбилика
- *D*4- — пирамида = эллиптическая омбилика
- *D5* — параболическая омбилика
- *D*k — бесконечная последовательность других омбилик
- *E*6 — символическая омбилика
- *E*7
- *E*8

В теории сингулярности есть объекты, которые соответствуют большинству других простых групп Ли.

Применения теории катастроф

Создание и развитие этой части математического анализа было связано с широкими возможностями наглядного моделирования некоторых сложных явлений, особенно тех, которые встречаются при описании самых разных естественных явлений (радуга, каустика, устойчивость сложных систем, колебания и разрушение в строительной механике, поведение в этологии, и даже бунты в тюрьмах)

Спасибо за внимание

Список литературы:

- В. И. Арнольд. В.И. АРНОЛЬД О ТЕОРИИ КАТАСТРОФ - Наука и жизнь, 1989, № 10
- В. И. Арнольд. Теория катастроф - М., 1990
- Стегний В. Н. Архитектоника генома, системные мутации и эволюция — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993. — 143 с.
- Дубинин Н. П. Эволюция популяций и радиация. — М.: Атомиздат, 1966. — 744 с.
- Вид и видообразование. // Соросовский Образовательный Журнал. — 1997. — № 4. — С. 2—10.