Сигналы. Преобразования. sin-cos форма представления

- **Для представления в такой форме запишем**

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t) \right).$$

- **где $\omega_1 = 2\pi/T$ – круговая частота, а кратные частоты –** ***гармоники, коэффициенты гармоник рассчитываются***

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

- ***a_0 рассчитывается -***

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt.$$

Сигналы

Если функция является четной, то все b_k будут равны нулю и в формуле останутся только косинусные слагаемые.

А если нечетная – то останутся лишь синусные составляющие.

Эта форма представления ряда Фурье имеет две составляющие, а в ***вещественной*** форме за счет тригонометрических преобразований мы можем трансформировать в следующий вид:

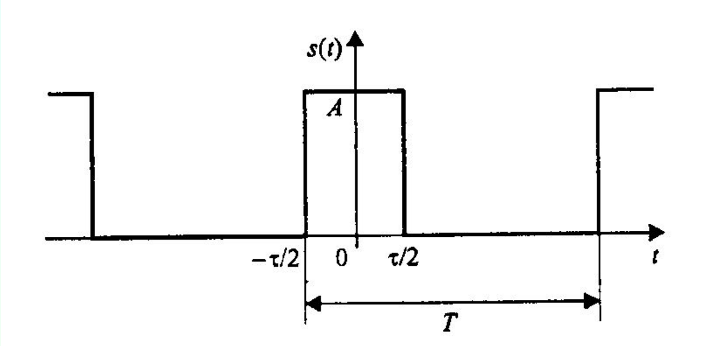
$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Если функция является четной, то значения фазы могут принимать только два значение 0 и π, а если нечетная – возможные значения фазы равны ±π/2.

Вопрос: как будет представлена запись ряда Фурье в комплексной форме?

Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

Последовательность прямоугольных сигналов



Так как приведенный сигнал является четной функцией, то запишем sin-cos форму ряда Фурье:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right).$$

Если использовать скважность q последовательности импульсов в формулу, то получим следующий вид формулы

$$a_k = \frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}}.$$

Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

Отметим, что при такой форме записи, значение постоянного слагаемого ряда равно

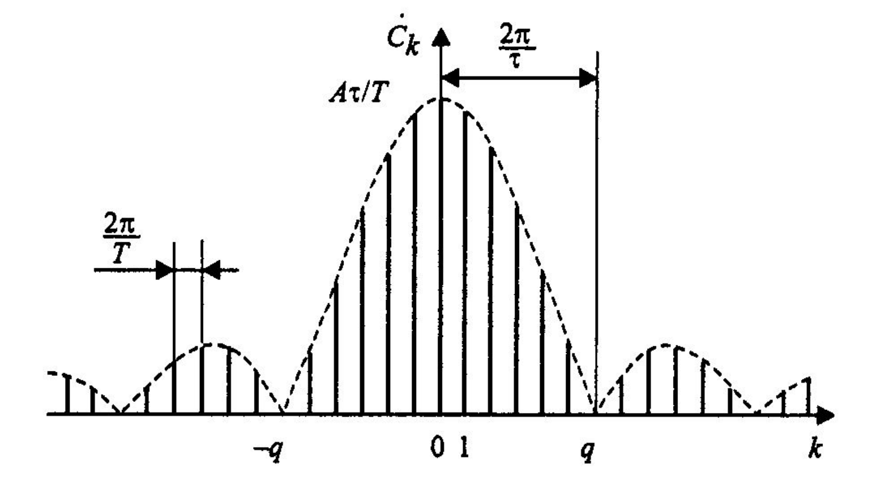
$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{A\tau}{T}.$$

при x→0, sin(x)/x→1.

Запишем последовательность в виде ряда Фурье с учетом вышеизложенного

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right).$$

Амплитуды гармонических сигналов зависят от номера гармоник по закону , sin(x)/x и представлено на рисунке в виде лепестков.



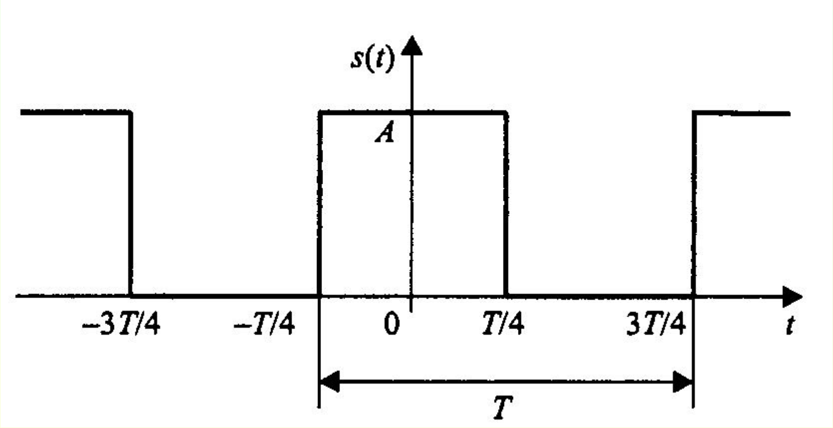
Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

Отметим важное свойство спектра последовательности прямоугольных импульсов – в таком спектре отсутствуют гармоники с номерами, кратными скважности.

Расстояние по частоте между соседними гармониками равно частоте следования импульсов - $2\pi/T$. Ширина лепестков спектра равна $2\pi/\tau$. **То есть – чем короче сигнал, тем шире его спектр!!**

Меандр

Частным случаем прямоугольного сигнала является меандр – сигнал прямоугольной формы со скважность равной 2.



Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

Меандр

Если $q = 2$, то можно записать следующее выражение

$$a_k = A\frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k/2} = \begin{cases} A, & k = 0, \\ 0, & k = 2m,\ m \neq 0, \\ \dfrac{2A}{\pi k}, & k = 4m+1, \\ -\dfrac{2A}{\pi k}, & k = 4m-1. \end{cases}$$

где m – произвольное целое число.

Видно, что в спектре данного сигнала присутствуют только нечетные гармоники. Представление меандра в виде ряда Фурье запишем следующим образом

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) - \ldots\right).$$

Гармонические составляющие, из которых складывается меандр, имеют амплитуды, обратно пропорциональные номерам гармоник, и чередующиеся знаки.

Примеры разложения сигналов в ряд Фурье

Пилообразный сигнал и треугольный сигнал

Домашнее задание!!!

Преобразование Фурье