Кафедра медицинской и биологической физики

Тема: Элементы векторной алгебры.

лекция № 2 для студентов 1 курса, обучающихся по специальности 030401– Клиническая психология

к.п.н., доцент Шилина Н.Г.

Красноярск, 2015

План лекции:

- Понятие вектора. Действия над векторами.
- Линейно зависимые и линейно независимые векторы.
- Размерность линейного пространства.
- Базис линейного пространства
- Скалярное произведение двух векторов
- Системы координат.

Значение темы

- Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины(векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила.

- Цифровые данные, используемые в различных областях, также можно представить в виде систем векторов.

  Понятие вектора позволяет существенно упростить операции с большими структурированными наборами чисел.

Вектором называют любую конечную последовательность чисел: $a_1, a_2, ..., a_n$. При этом сами числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называют **координатами вектора.**

Координаты вектора получаются вычитанием из координат его конца соответствующих координат начала.

Определение вектора

Понятие вектора позволяет существенно упростить операции с большими структурированными наборами чисел.

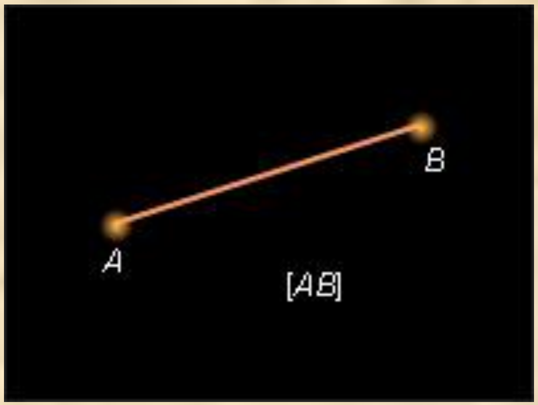
Определим вектор как набор ***N*** чисел. Можно определить вектор-столбец и вектор-строку

$$\boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{x}_N \end{Vmatrix}; \ \boldsymbol{x} = \left\| \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_N \right\|$$

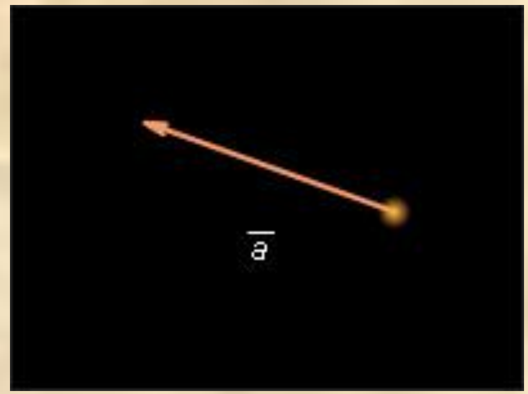
Геометрическим вектором (вектором)

- Называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих точек считается началом, а какая - концом. Начало вектора называют точкой его приложения.

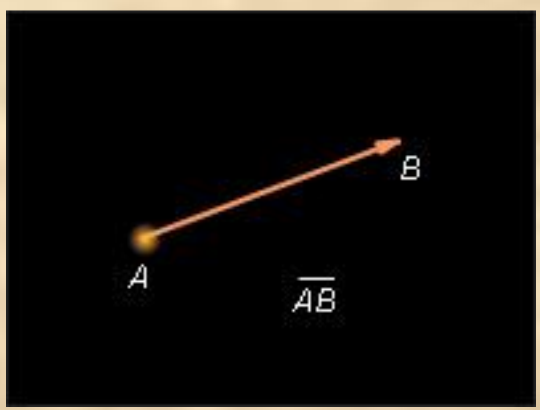
Обозначения



Отрезок АВ

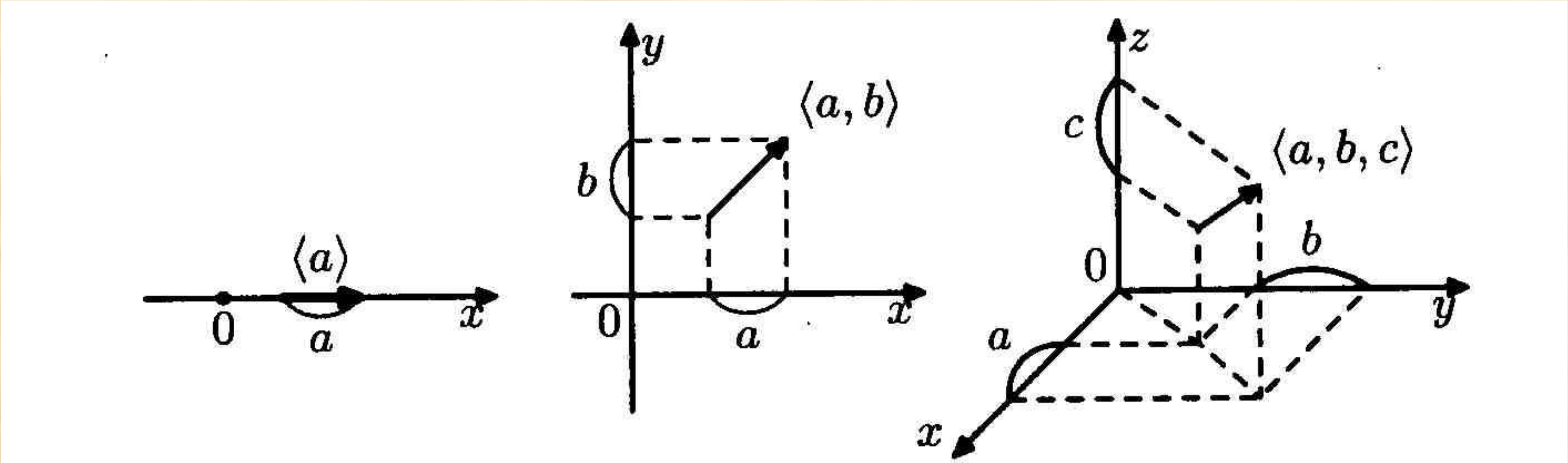


$\vec{a}$



$\overrightarrow{AB}$

Векторы с 1,2 или3 координатами - это



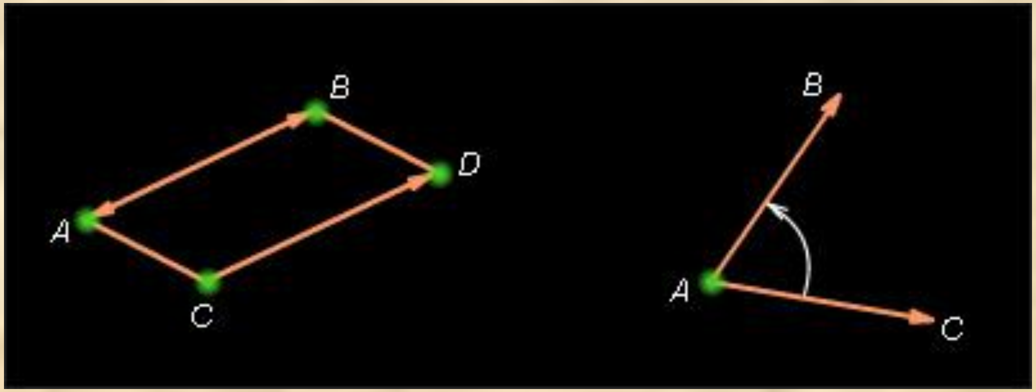
направленные отрезки на прямой, плоскости, в пространстве

Два вектора ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) и ($b_1, b_2, \ldots, b_m$) называются **равными** в том и только том случае, если они имеют одинаковое число координат ($n = m$) и если их соответственные координаты равны между собой: $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Равенство векторов пишется так: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Для геометрических векторов

- Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины



$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$,

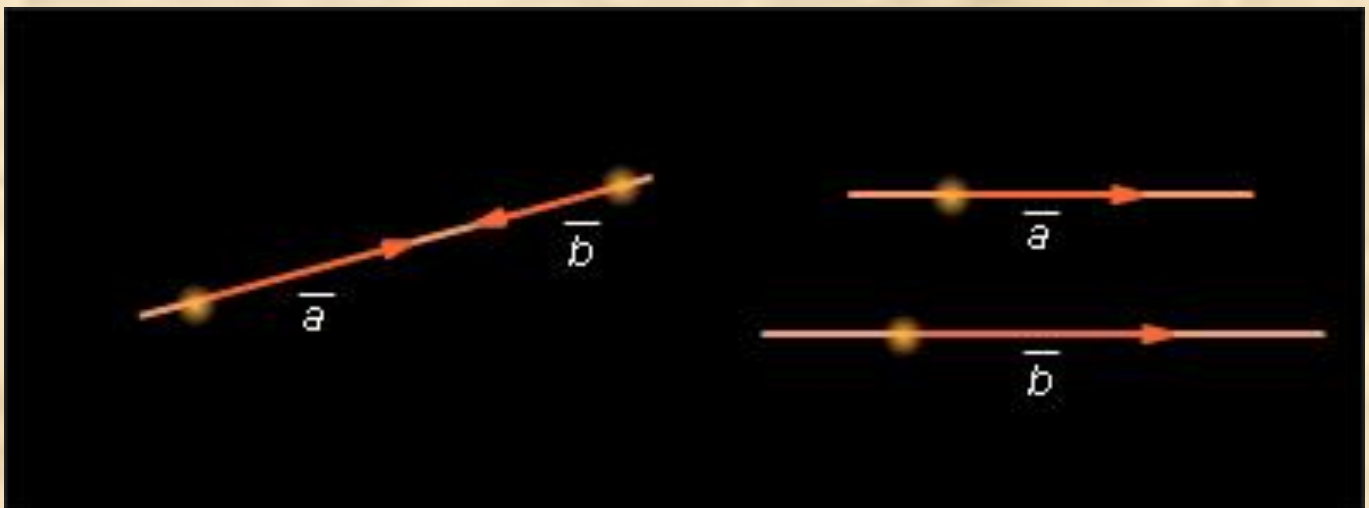
Нуль-вектор -

вектор у которого начало и конец совпадает, его модуль равен нулю и нет определенного направления.

Следовательно можно считать все нуль векторы равными и ввести для них общее обозначение $\vec{0}$

Коллинеарные векторы

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых



$aIIb$

Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости

Сложение векторов

Два вектора равны, если равны все их компоненты.

Сумма двух векторов ***x*** и ***y*** записывается как ***x+y*** и определяется как вектор

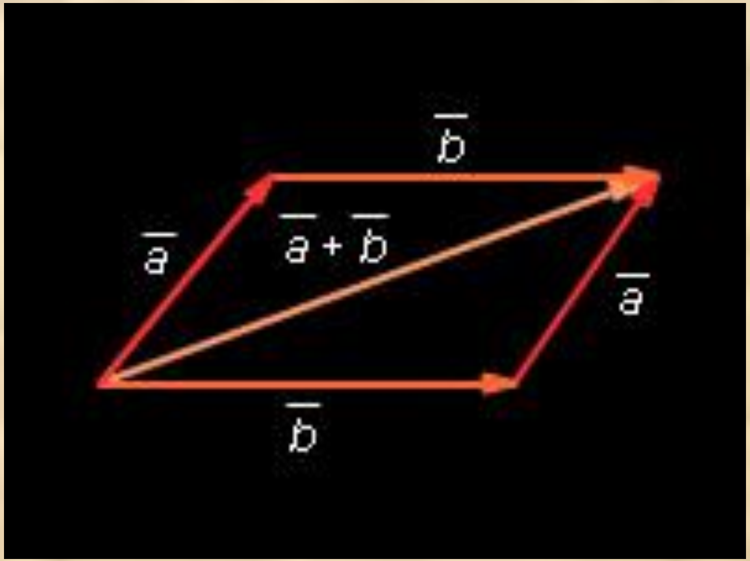
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{y}_N \end{Vmatrix}$$

Разность двух векторов ***x-y*** есть вектор ***z***, такой, что ***y+z=x***

Сумма векторов ***a*** и ***b*** определяется равенством ***a*** + ***b*** $=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$.

Например, (1, –1, 0, 3, 8) + (4, 3, – 3, –5, –7) = (5, 2, –3, –2, 1).

Правило параллелограмма

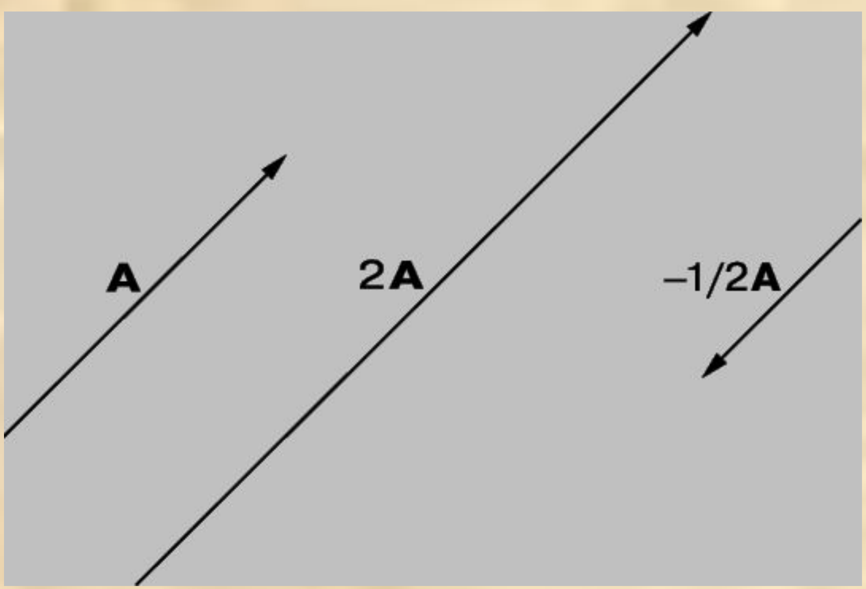


Умножение векторов

- **Произведением** вектора $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число k называют вектор $k\boldsymbol{a}$, определяемый равенством $k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$.
- Умножение вектора на число сводится к растяжению при $|k| > 1$ или сжатию при $|k| < 1$ исходного вектора с сохранением его направления при $k > 0$ или с заменой на противоположное при $k < 0$

Умножение вектора на скаляр

$$c_1 \boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} c_1 x_1 \\ c_1 x_2 \\ \cdots \\ c_1 x_N \end{Vmatrix}$$



Свойства операций:

- коммутативность: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- ассоциативность: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$;
- дистрибутивность: $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$,

  $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.
- Вектор, все координаты которого равны нулю, называют **нулевым** вектором ($\mathbf{0}$).
- Вектор $(-1)\mathbf{a}$ называется **противоположным** вектору $\mathbf{a}$ (обозначается $-\mathbf{a}$). $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Линейно зависимые и линейно независимые векторы

Множество *L* называют **линейным пространством** (или **векторным пространством**), а его элементы – **векторами**, если:

1. На этом множестве задана операция сложения: каждым двум векторам ***a*** и ***b*** из *L* сопоставлен некоторый третий вектор из L, обозначаемый ***a*** + ***b*** и называемый суммой векторов ***a*** и ***b***;
2. Задана операция умножения векторов на числа: каждый паре ***a***, *k* (вектор ***a*** и число *k*) сопоставлен некоторый вектор, обозначаемый *k**a*** и называемый произведением вектора ***a*** на число *k*;

3. Эти операции удовлетворяют следующим требованиям:

- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$;
- существует единственный вектор $\mathbf{0}$ такой, что $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$;
- для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует единственный вектор $\boldsymbol{a}'$ такой, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$;
- $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$;
- $k_1(k_2\boldsymbol{a}) = (k_1k_2)\boldsymbol{a}$ для любых чисел k_1 и k_2 и любого вектора $\boldsymbol{a}$;
- $(k_1 + k_2)\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{a}$ для любых чисел k_1 и k_2 и любого вектора $\boldsymbol{a}$;
- $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ для любого числа k и любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов

- Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.
- Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.
- Для того чтобы три вектора были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.
- Любые четыре вектора линейно зависимы.

Примеры линейных пространств

- векторы плоскости (обозначение R^2)
- нашего пространства, в котором мы живем, его называют трехмерным (определяется тремя измерениями: длиной, шириной, высотой) и обозначают R^3

Обобщением этих пространств является пространство R^n векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, имеющих n координат (n–мерных векторов).

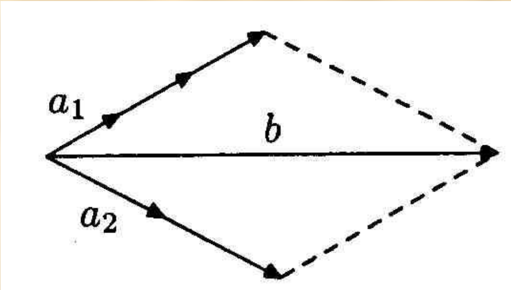
- Пусть $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_p}$ – множество векторов из пространства L. Возьмем произвольные числа k_1, $k_2, \ldots, k_p$ и составим вектор $\boldsymbol{a} = k_1 \boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + ... + a_p\boldsymbol{k_p}$.
- Любой вектор $\boldsymbol{a}$ данного вида называется **линейной комбинацией** векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_p}$, а числа k_1, $k_2, \ldots, k_p$ – коэффициентами этой линейной комбинации.

Пример

- $\boldsymbol{a_1}$ = (2,–1,4,0), $\boldsymbol{a_2}$ = (3, –5, –2,2), $\boldsymbol{a_3}$ = (–3, 6, –8,5), то линейная комбинация

3$\boldsymbol{a_1}$ –2$\boldsymbol{a_2}$ – $\boldsymbol{a_3}$ = (6, –3,12,0) –(6, –10, –4,4) – (–3,6, –8,5) = (3,1,24, –9).

- вектор ***b*** является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$, т.к. ***b*** = 3$\boldsymbol{a_1}$+ 2$\boldsymbol{a_2}$.



- Векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$ называются **линейно зависимыми** (или образующими **линейно зависимую систему**), если существуют такие числа c_1 $c_2, \ldots, c_p$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство:

$$c_1 \boldsymbol{a_1} + c_2 \boldsymbol{a_2} + c_p \boldsymbol{a_p} = 0.$$

- Если же это равенство возможно только в случае $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$, то векторы $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_p}$ называются **линейно независимыми** (образующими **линейно независимую систему**).

Условия линейной зависимости и независимости векторов

1. Всякая система векторов, содержащая нуль–вектор **0**, линейно зависима.
2. Если *k* (*k*< *p*) векторов системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p$ линейно зависимы, то и вся система линейно зависима.
3. Если из системы линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p$ удалить *r* (*r*<*p*) векторов, то оставшиеся векторы образуют также линейно независимую систему.
4. Если среди векторов системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p$ имеются такие векторы $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{a}_m$, что $\mathbf{a}_k = \lambda \mathbf{a}_m$, где λ – некоторое число, то вся система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_p$ линейно зависима.
5. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Теорема

- Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_p$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией всех остальных.
- Линейное пространство L называется **n–мерным**, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые n +1 векторов являются линейно зависимыми.

- **Базисом** n–мерного линейного пространства L называется любая упорядоченная система n линейно независимых векторов в пространстве R^n
- Пример такой системы в пространстве R^n :

  $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0)$,
  $\mathbf{e}_2=(0,1,\ldots,0)$,
  ………………
  $\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$.

- **Теорема 1.** Если в пространстве L некоторая система n-мерных векторов обладает свойством, что определитель, строками которого являются данные векторы, не равен нулю, то эти векторы образуют базис в L.
- **Теорема 2.** Разложение произвольного вектора ***a*** по базису всегда единственно.
- Числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – коэффициенты разложения вектора ***a*** по некоторому базису – называются **координатами** вектора ***a*** в этом базисе.

- Пусть даны два линейных пространства L_1 и L_2. Предположим, что между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию).
- Если элемент $\boldsymbol{x} \in L_1$, а $\boldsymbol{y} \in L_2$, то факт их взаимно однозначного соответствия записывается так: $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$. Предположим также, что если $\boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{x_2} \leftrightarrow \boldsymbol{y_2}$ то $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \leftrightarrow \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}$ и $\alpha \boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \alpha \boldsymbol{y_1}$, где α – любое действительное число.
- Если выполнены эти условия, то пространства L_1 и L_2 называются **изоморфными**.

- **Теорема 3.** Два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.
- Например, изоморфны множество всех векторов трехмерного пространства и множество последовательностей из R^3, каждая из которых содержит три числа.

Скалярное произведение двух векторов

- **Скалярным произведением** двух векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Скалярное произведение двух векторов

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{N} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i$$

$$(x, y) = (y, x)$$

$$(x + y, z + w) = (x, z) + (x, w) + (y, z) + (y, w)$$

$$(c_1 x, y) = c_1 (x, y)$$

(x, x) – квадрат длины вектора ***x***

Свойства скалярного произведения

- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ – коммутативность;
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ – дистрибутивность;
- $(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, k – любое действительное число;
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$, если $\boldsymbol{x}$ – ненулевой вектор;
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x}$ –нулевой вектор

- Линейное пространство *L*, в котором введена операция скалярного произведения, называется **евклидовым пространством**.
- **Длиной (модулем)** вектора ***x*** называется число: $|x| = \sqrt{(x, x)}$ или

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \ldots . x_n^2}$$

Пример

Рассчитать модуль вектора

a = $\left(\sqrt{3}, 3, 2\right)$

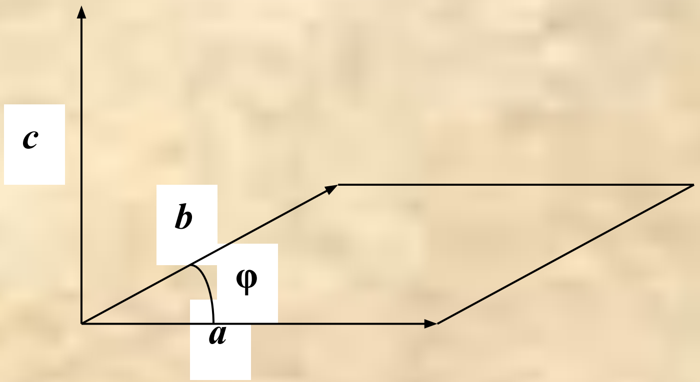
$$|a| = \sqrt{3 + 9 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

Свойства модуля вектора

- $|\mathbf{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- $|k\mathbf{x}| = |k|\cdot|\mathbf{x}|$. k – любое действительное число;
- $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$ (неравенство Коши – Буняковского);
- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (неравенство треугольника).

- Пусть ***x*** и ***y*** – два ненулевых вектора. **Углом** между ними называют число *φ*, определенное с помощью равенства

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$



- Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называются **перпендикулярными** или **ортогональными** друг другу, если их скалярное произведение равно нулю. Нулевой вектор ортогонален любому другому.
- Систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_p$ в евклидовом пространстве L называют **ортогональной**, если любые два различных вектора этой системы ортогональны друг другу.

Ортогональность векторов

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \boldsymbol{y} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

- Вектор **е** называют **нормированным** или **единичным**, если его модуль равен 1.
- Систему векторов e_1, e_2,…,e_p называют **ортонормированной,** если любые два вектора этой системы ортогональны друг другу и если модуль каждого из них равен 1.
- В *n*–мерном евклидовом пространстве система *n* ортонормированных векторов образует **ортонормированный** базис.

Тест

Умножение вектора на число при $|k| > 1$ сводится к

1. растяжению исходного вектора
2. сжатию исходного вектора

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- **Обязательная:**
- Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.
- Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных/А.Д. Наследов.- СПб.: Речь, 2008.
- **Дополнительная:**
- Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др. – М.: ИНФРА–М, 2011. –373 с.
- Болдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Высшая математика /К.В. Болдин К, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта, 2010
- **Электронные ресурсы:**
- УБИЦ КрасГМУ Портал центра дистанционного образования Электронная библиотека
- Ресурсы интернет

КрасГМУ

Красноярский
Государственный
Медицинский
Университет
им. проф.
В.Ф.Войно-Ясенецкого

БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ