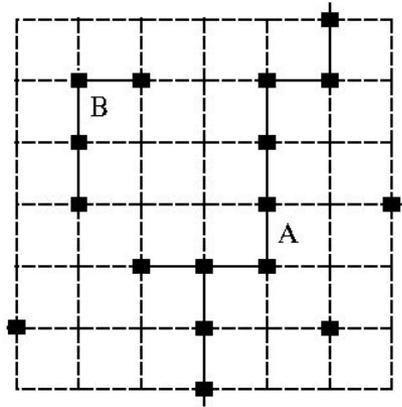


Впервые задача протекания была рассмотрена Бродбентом и Хаммерсли (1957) в связи с задачей о распространении заболеваний во фруктовом саду и с задачей о протекании жидкости через пористую среду.

Broadbent S.R., Hammersly J.M. // "Percolation processes", Proc. Cambridge Phil. Soc. V. 53, p. 629 (1957)

Рассмотрим регулярную решетку, каждое ребро которой является трубой с вентиляем. Часть случайно выбранных вентиляей открыта. Пусть доля таких вентиляей в общем числе есть p . В результате возникает реализация случайной системы. Накачивая воду в один из узлов решетки, мы можем столкнуться с двумя случаями. Имеется лишь конечное или же бесконечное число мокрых (или занятых) узлов. Очевидно, что в пределе $p = 1$ все узлы мокрые (занятые), а в пределе $p = 0$ все узлы кроме одного сухие.



При произвольной концентрации p ситуация зависит не только от величины p но и от выбора узла. Так при закачивании воды в узел B мы смочим четыре узла, при закачивании воды в узел A бесконечное число.

Мы будем говорить о вероятности смочить бесконечное число узлов. Бродбэнт и Хаммерсли предположили, что имеется **порог протекания p_c , который является верхним пределом p , при которых число смоченных узлов конечно.** То, что для бесконечной системы $p_c > 0$ является нетривиальным. Действительно, в конечной системе размера L в место смачивания бесконечного числа узлов рассматривают случай, когда смочены узлы, находящиеся на противоположных границах системы. Конфигурация, когда все связи с открытыми вентилями выстроены в канал, связывающий противоположные стороны, соответствует $p_{\min} \sim T/L^{d-1} \quad p_c \rightarrow 0$

Попробуем сформулировать изложенное на математическом языке. Различают два типа решеточных задач -- задача связей и задача узлов. Первая близка к тому, что мы только что рассматривали. При второй формулировке предполагается, что часть узлов занята (окрашена в черный цвет). **В терминах задачи узлов два занятых узла называются связанными, если они являются ближайшими соседями или если они ближайшие соседи связанных узлов.** Это рекурсивное определение вводит классы эквивалентности на решетке. Различные классы, порожденные этим соотношением, называются кластерами. Кластер может включать как конечное так и бесконечное число узлов. В последнем случае мы будем говорить о бесконечном кластере.



Рассмотрим распределение $n(s, p)$ кластеров по размерам. Здесь s число узлов в кластере, а

$$n(s, p) = \frac{\text{полное число кластеров размера } s}{\text{полное число узлов в решетке}}$$

Численный эксперимент показал, что

$$n(s, p) \sim \begin{cases} s^{-\tau} & s < S(p) \\ \exp(-s/S(p)) & s > S(p) \end{cases} \quad \text{Для } d=2 \text{ } t=2,2$$

Полная концентрация узлов, принадлежащих конечным кластерам

$$\text{Если } p \int_1^{S(p)} sn(s, p) ds \text{ есть БК }_{fincl} < 1,$$

Максимальная концентрация, когда все узлы все еще принадлежат только конечным кластерам называется порогом протекания.

$$\int_1^{\infty} sn(s, p_c) ds = p_c < 1$$

1D перколяция

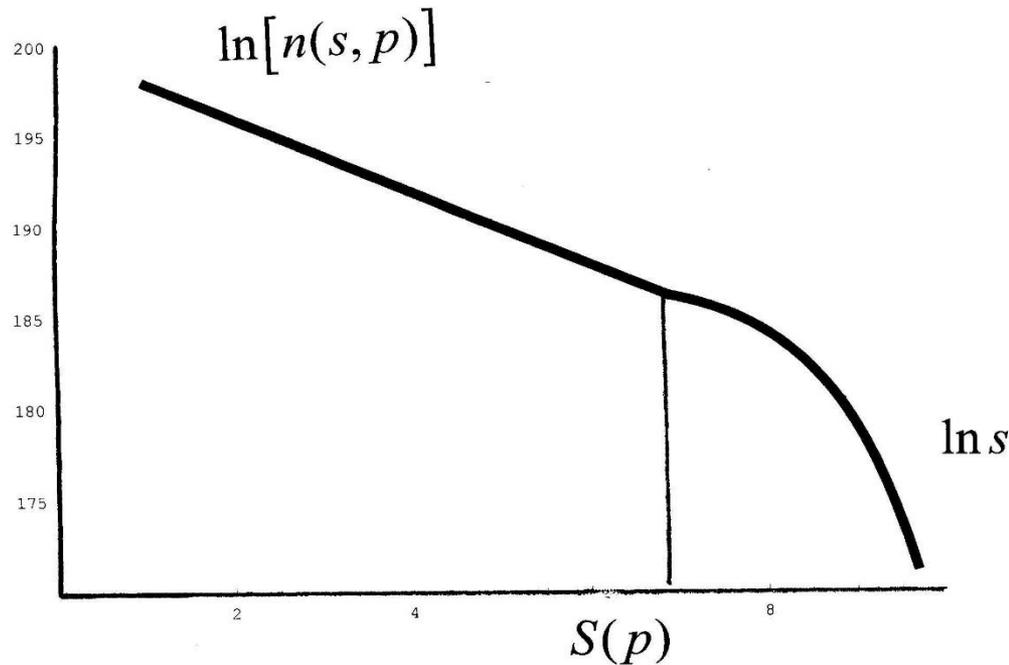
Число кластеров размера s
в расчете на один узел решетки

$$n_s = p^s (1-p)^2$$

Концентрация узлов, принадлежащих
конечным кластерам

$$\begin{aligned} \sum_s s p^s (1-p)^2 &= (1-p)^2 \sum_s p \frac{dp^s}{dp} = \\ &= (1-p)^2 p \frac{d \sum_s p^s}{dp} = (1-p)^2 p \frac{d \frac{p}{1-p}}{dp} = p \end{aligned}$$

В 1D перколяция порог протекания равен 1

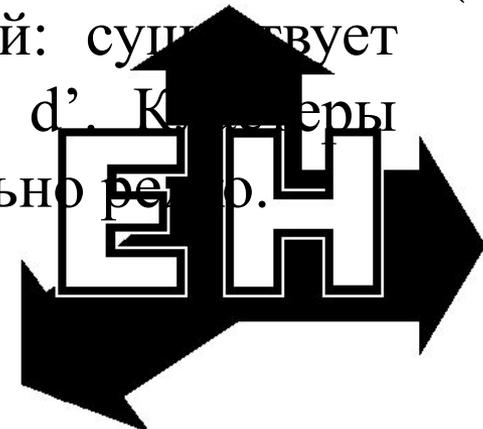


$$\xi(p) \sim S^{1/d'}(p)$$

При рассмотрении части системы с размером $L < \xi(p)$ мы наблюдаем картину слабо зависящую от p . При размере $L > \xi(p)$ эта часть приобретает свойства бесконечной: существует конечный предел размеров x , определяющий d' . Размеры больших размеров встречаются экспоненциально редко.

$$\xi \sim (|\tau|)^{-\nu}$$

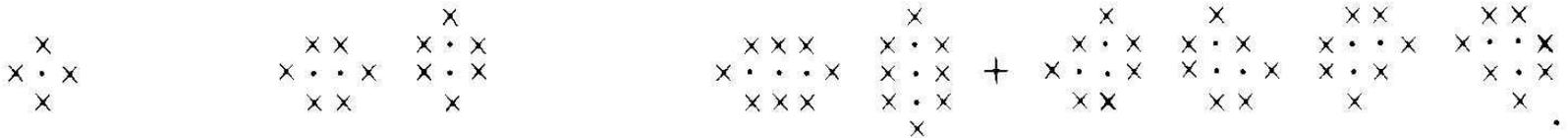
$$\tau = (p - p_c) / p_c$$



До тех пор пока $p < p_c$, с вероятностью единица бесконечный кластер отсутствует. При $p > p_c$ бесконечный кластер присутствует с вероятностью единица. Плотность бесконечного кластера ведет себя степенным образом

$$pP(p) = p - \sum_s sn(s, p) \sim \left[(p - p_c) / p_c \right]^\beta$$

Индекс $\beta=0.16$ для двумерной решетки ($d=2$), и $\beta=0.5$ в трехмерном ($d=3$) случае.



$$n_1 = p(1-p)^4; \quad n_2 = 2p^2(1-p)^6; \quad n_3 = 2p^3(1-p)^8 + 4p^3(1-p)^7.$$

$$n_{14}(p) = p^{14}(3q^{16} + 168q^{17} + 1524q^{18} + 10029q^{19} + 46119q^{20} + 185220q^{21} + 605766q^{22} + 1730943q^{23} + 4287699q^{24} + 9131949q^{25} + 16871550q^{26} + 26571525q^{27} + 35061399q^{28} + 3796541q^{29} + 32198928q^{30} + 19012074q^{31} + 5812482q^{32}),$$

Domb C., Sykes M.F. Phys. Rev. V. 122, p. 77 (1960)

$$[L, M] = \frac{P_L(z)}{Q_v(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_M z^M}{q_0 + q_1 z + \dots + q_L z^L} \quad [L, M]$$

Коэффициенты Паде $q_0, q_1, \dots, q_L, p_0, p_1, \dots, p_M$ аппроксимации подбираются так, чтобы разложение совпадало с разложением аппроксимируемой функции F до порядка $L+M$. По теореме Бэкера $[L, L]$ инвариантно относительно преобразования Эйлера

$$z = aw/(1 + bw)$$

которое используется для улучшения сходимости рядов. Из этой теоремы следует, что $[L, M]$ наиболее быстро

сходится если $F \sim z^{-j} (a_0 + a_1 z + \dots)$

Если же $F \sim z^j (a_0 + a_1 z + \dots)$ то лучшее приближение дает

$$[L + j, L]$$

В нашем случае полюс разложения $P(p) \sim \left[(p - p_c) / p_c \right]^\beta$ дает величину порога протекания.

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{z_c}\right)^{-\lambda} A(z) \quad \text{Находим полюс}$$

$$\frac{d}{dz} \ln F(z) = \frac{-\lambda}{(z - z_c)} (1 + O(z - z_c)) \quad \text{Находим индекс}$$

$$F(z)^{1/\lambda} = \frac{z_c A^{1/\lambda}}{(z - z_c)} [1 + O(z - z_c)] \quad \text{Находим предэкспонент}$$

$$\left[\frac{d}{dz} \ln \frac{d}{dz} F(z) \right] / \left[\frac{d}{dz} \ln F(z) \right] = \frac{\lambda + 1}{\lambda} + O(z - z_c)$$

Можно строго показать, что в системе может существовать либо один бесконечный кластер либо бесконечно много. Приведем нестрогие рассуждения иллюстрирующие суть дела. Предположим, что существует конечное число бесконечных кластеров. Очевидно, что среднее расстояние между двумя любыми из них конечно. Следовательно для их соединения потребуется конечное число узлов. Добавление этих узлов не меняет общую концентрацию p . Можно показать, что существует бесконечное число вариантов соединения двух бесконечных кластеров конечной связью. Это означает, что с вероятностью единица они соединяться. В случае бесконечного числа бесконечных кластеров для их объединения конечными связями требуется бесконечное число узлов, что безусловно изменит концентрацию p .

Newman C.M., Schulman L.S. // "Number and density of percolation clusters" J.Phys, A, V. 14, p. 1735 (1981)

Ситуация напоминает ситуацию при фазовом переходе второго рода. Можно провести более тесную аналогию сопоставив следующие величины, описывающие перколяционный переход и переход магнетика в магнитное состояние:

концентрация	обратная температура $1/T$
среднее число кластеров	свободная энергия в нулевом поле
плотность бесконечного кластера	спонтанная намагниченность
корреляционная длина	корреляционная длина

Данную аналогию можно проследить, если следуя Левинштейну и др. (1975) ввести дополнительный "мнимый" узел, связав его через дополнительные "мнимые" связи со всеми узлами решетки. Введение такого узла радикально меняет связность системы. Очевидно, что в независимости от концентрации p все узлы принадлежат бесконечному кластеру, даже при $p < p_c$. Ситуация аналогична случаю магнитной системы в магнитном поле: при любой температуре наблюдается намагниченность. Таким образом "мнимая" связь играет роль магнитного поля. Величина этого магнитного поля связана с вероятностью "мнимой" связи быть не разорванной. Обычно для подчеркивания аналогии эту вероятность обозначают как

$$p_g = 1 - \exp(-h)$$

Левинштейн М.Е., Шур М.С., Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.
ЖЭТФ Т. 69 С. 386 (1975)

«Свободная энергия» связана с полным числом конечных кластеров

$$F(p, h) = \sum_s n(s, p) \exp(-sh)$$

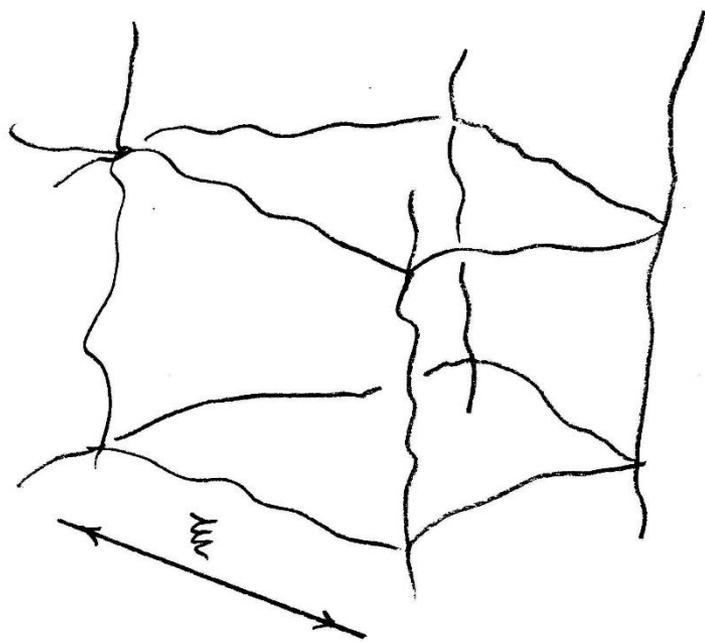
Вероятность того, что данный занятый узел принадлежит бесконечному кластеру равна

$$P(p, h) = \left(p - \sum_s sn(s, p) \exp(-sh) \right) / p =$$
$$= 1 + \frac{1}{p} \frac{\partial F(p, h)}{\partial h} \Big|_{h=0} \sim [\tau]^\beta$$

Далее средний размер конечного кластера равен

$$S(p, h) = \frac{\sum_s s^2 n(s, p) \exp(-sh)}{\sum_s p_s} = \frac{1}{p - pP(p)} \frac{\partial^2 F(p, h)}{\partial h^2} \underset{h=0}{\sim} [\tau]^{-\gamma}$$

Рассмотрим простейшие модели БК. Первая модель для расчета проводимости была предложена Ластом и Таулессом. Приведем их рассуждения. Пусть БК есть неправильная кубическая решетка с ребром равным корреляционной длине ξ . В направлении параллельном



приложенному напряжению есть

$$N = P(p)\xi^3 / 3 \quad \text{связей,}$$

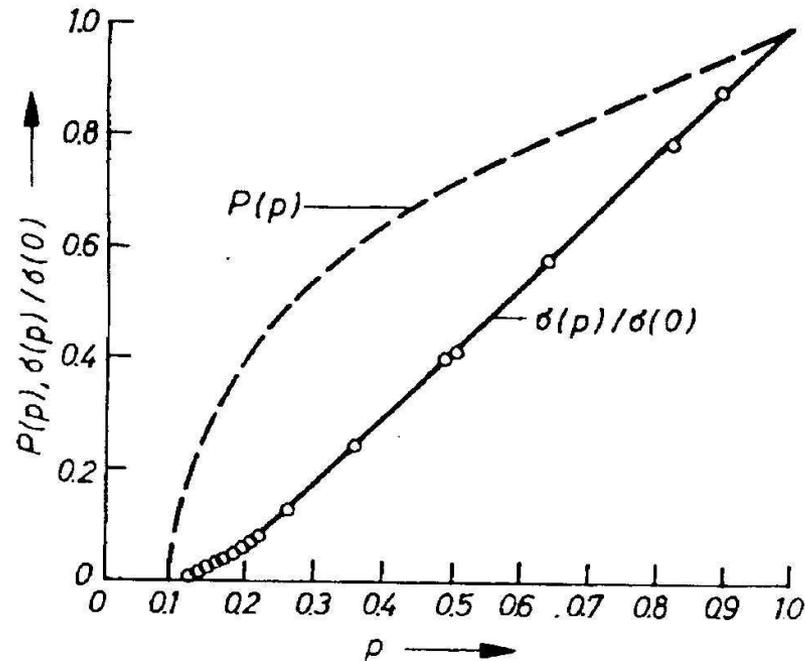
несущих ток. Так как длина канала полагалась равной ξ , то в кубе $N / \xi = P(p)\xi^2 / 3$ каналов.

сопротивление куба R пропорционально

$$\xi / \left[\frac{1}{3} P(p) \xi^2 \right]$$

а удельная проводимость системы равна $\sigma = 1/(R\xi)$. Следовательно

$$\sigma \sim P(p)$$



Однако критический индекс t , описывающий поведение проводимости больше индекса ν . Отсюда Ласт и Таулесс сделали вывод о том, что помимо каналов БК состоит и из "мертвых концов" -- цепочек связей, присоединенных к БК только в одном месте и не несущих тока.

d	v	β/v	β'/v	t/v
2	1.34	0.1	0.42	1
3	0.88	0.44	1.15	2

Скал и Шкловским была разработана так называемая модель связей-узлов. В этой модели предполагалось, что скелет БК представляет из себя неправильную решетку с шагом ξ . Длина связей L , соединяющих соседние узлы полагалась отличной от ξ . Очевидно, что проводимость системы обратно пропорциональна L . Для оценки L рассмотрим задачу "вторичного протекания".

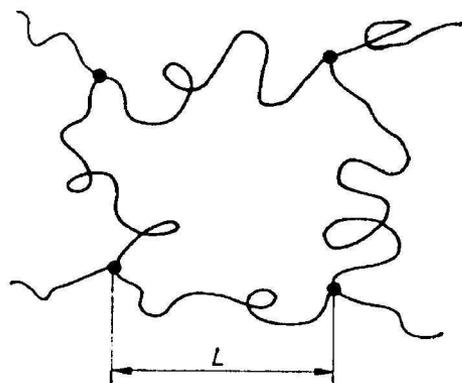


Fig. 5.15. Schematic representation of the node-link model (L — correlation length)

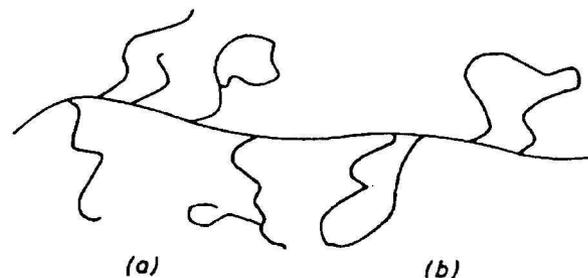


Fig. 5.16. Schematic representation of a percolation path with "dead" ends (a) and loops (b)

Рассмотрим перколяционную систему с концентрацией $p_1 > p_c$. Разорвем в ней $y = (p_1 - p_c) / p_1$ связей так чтобы концентрация оставшихся связей p'_1 была равна порогу протекания:

$$(1 - y)p_1 = \left[1 - (p_1 - p_c) / p_1 \right] p_1 = p_c$$

Таким образом мы получим систему на пороге протекания. Одновременно та же процедура переводит и макро-решетку БК в пороговое состояние. Вероятность разрыва макросвязи БК $y' = yL$. Концентрация неразорванных макроосвязей p' равна $1 - y' = 1 - yL = p'_c$, где p'_c -- порог протекания макрорешетки. Из скейлинговых соображений p'_c не должен зависеть от начальной концентрации, тогда $L \sim (1 - p'_c) / y \sim 1 / (p_1 - p_c)$. Это можно переписать в виде $L \sim \tau^{-\zeta} \sim \xi^{\zeta/\nu}$ с $\zeta = 1$.

$$\zeta / \nu_2 = 0.75$$

$$\zeta / \nu_3 = 1.136$$

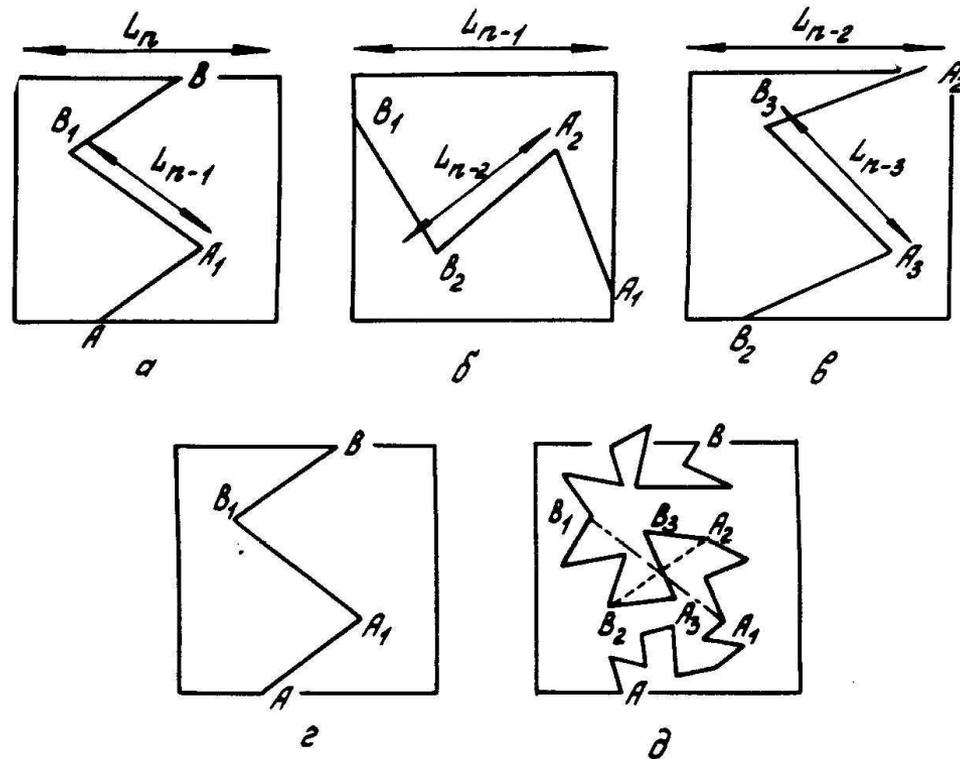


Рис. 1. Фотографии различных масштабов одного и того же фрагмента бесконечного кластера
 а, б, в - выполненные с одним и тем же относительным разрешением. Самоподобность бесконечного кластера заключается в том, что эти фотографии статистически эквивалентны; г, д - фотографии фрагмента с линейным размером L_n , но выполненные с разными относительными разрешениями; г - относительное разрешение ϵ то же, что и в случаях а, б, в; д - относительное разрешение равно ϵ^3 , минимально разрешимый масштаб равен L_{n-3} ; участок $B_2 A_3 B_3 A_2$ идентичен случаю б и соответствует участку $B_2 A_2$ на рис. 1, б; участок эквивалентный $B_1 A_1$ на рис. 1, а, г, показан штрих-пунктиром

Пусть макро-связь масштаба a состоит из k макросвязей масштаба a/b , иными словами длина макро-связи подчиняется функциональному уравнению.

$$L(a) = kL(a/b)$$

В свою очередь макро-связь масштаба a/b можно представить как k связей масштаба a/b^2 и т.д до тех пор пока мы не придем к элементарному масштабу a_0 , в качестве которого может выступать диаметр включения. Таким образом $a = a_0 b^n$, где $n = \ln(a/a_0)/\ln(b)$ число проделанных разрешений. Длина же такой связи равна $L = a_0 k^n$. Откуда мы получаем $L(a) \sim a_0 (a/a_0)^{\ln(k)/\ln(b)}$. Это должно быть верно и для $a = \xi(p) \sim [(p - p_c)/p_c]^{-\nu}$.

$$L \sim \left[(p - p_c) / p_c \right]^{-\nu \ln(k) / \ln(b)}$$

Вернемся к модели БК, предложенной Шкловским и Де Женом. Рассмотрим связь в этой модели критических индексов t и β' с ζ . Полная проводимость Σ куба с ребром ξ рана обратному сопротивлению связи

$$\Sigma = 1/(\sigma L) \sim \xi^{-\zeta/\nu}$$

Удельная проводимость, которую мы отождествляем с макроскопической проводимостью, связана с Σ соотношением $\Sigma = \sigma \xi^d$. Откуда $\sigma \sim 1/(\xi^{d-2} L) \sim \tau^{\zeta+(d-2)\nu}$

$$t = \zeta + (d - 2)\nu$$

Плотность B остова бесконечного кластера равна

$$B \sim L/\xi^d \sim \tau^{d\nu-\zeta}$$

$$\beta' = d\nu - \zeta$$

Это дает довольно хорошую оценку для критических индексов трехмерной системы: $t_{Scal-Shklovskii} = 1 + \nu = 1.88$

$$\beta'_{Scal-Shklovskii} = 3\nu - 1 = 1.64$$

Точные значения $t = 2$ $\beta' = 1.5$. Важно, что $L/\xi \sim \xi^{1/\nu-1} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \infty$

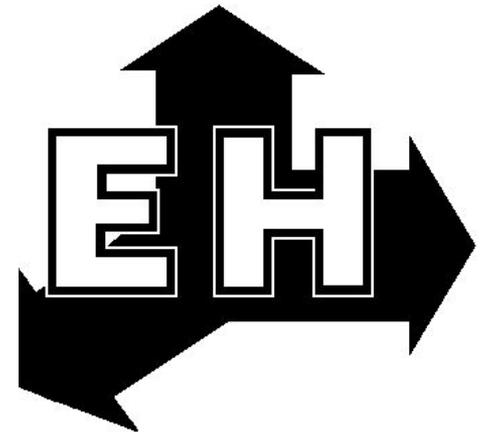
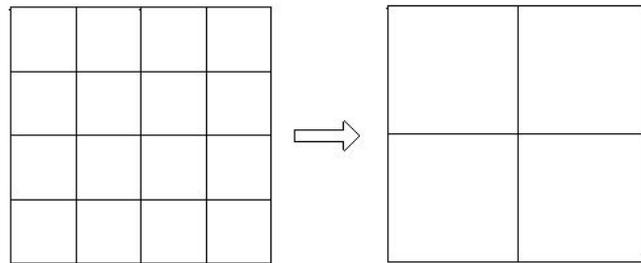
Для двумерной системы оценки выглядят гораздо хуже

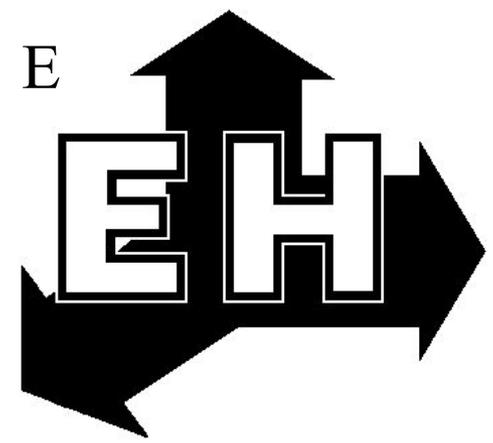
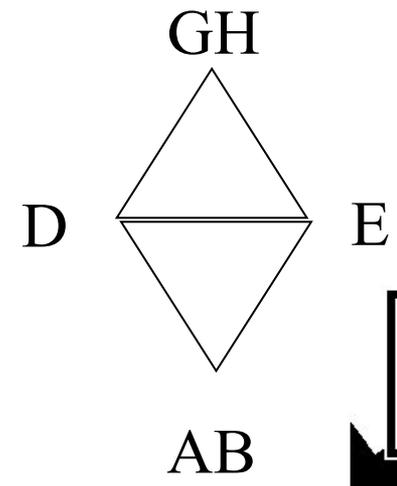
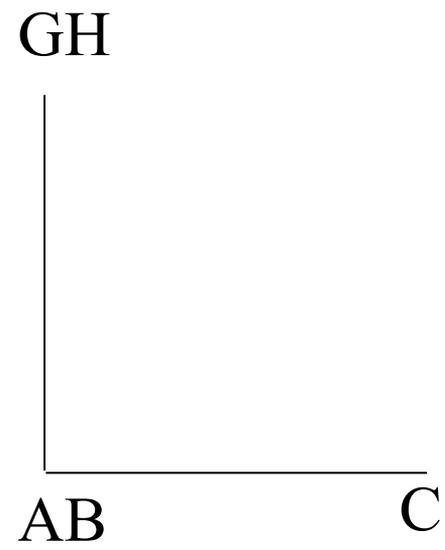
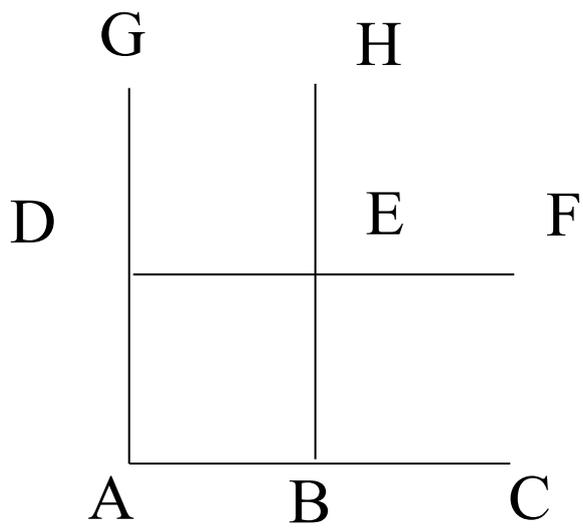
$$t_{Scal-Shklovskii} = \zeta = 1 \quad \beta'_{Scal-Shklovskii} = 2\nu - \zeta = 1.7$$

Точные значения $t=\nu=1.356$, $\beta'=0.42$. Важно, что $L/\xi \sim \xi^{1/\nu-1} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$

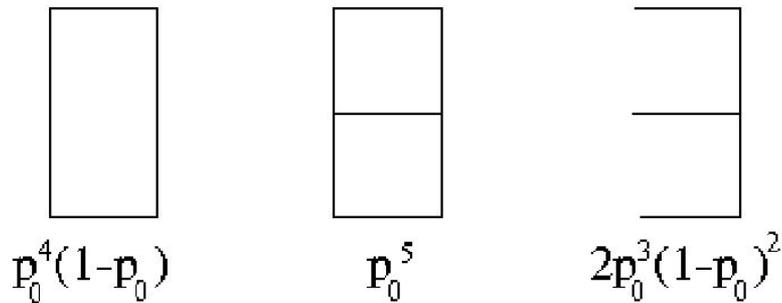
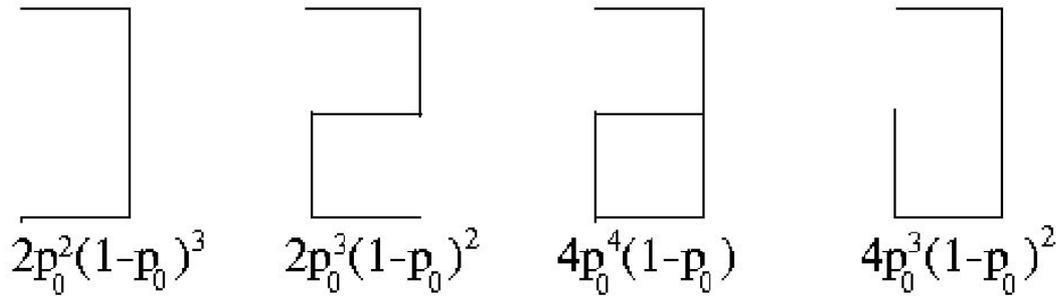
Очевидно, что модель Скал-Шкловского не учитывает дублирование макросвязи. Если для размерностей выше трех, то это не приводит к качественным расхождением модельных представлений с имеющимся экспериментом, то, для двумерного случая учет дублирования существенен

Для описания фрактальных систем широко используется аппарат ренормализационной группы. Проиллюстрируем его, рассмотрев задачу протекания на квадратной решетке. Оценим вероятность p' того, что система размером $2a_0$ проводит, если исходная вероятность равна p . Следуя Бернаскони, разобьем исходную решетку на ячейки 2×2 и заменим каждую такую ячейку новой, состоящей из двух ренормализованных связей.

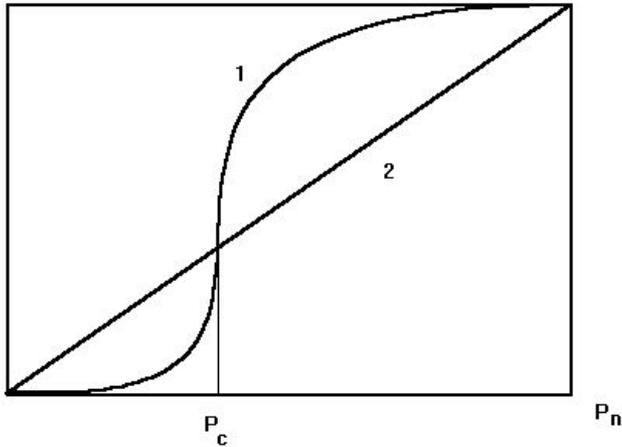




Далее найдем вероятность p' того, что новая связь проводит. Рассмотрим $2a_0$ -ячейку. Всего существует 32 возможные конфигурации, 16 из них проводят



$$\begin{aligned}
 p_1 &= 2p_0^2(1-p_0)^3 + 2p_0^3(1-p_0)^2 + 4p_0^3(1-p_0)^2 + 4p_0^4(1-p_0) + \\
 &\quad + p_0^4(1-p_0) + p_0^5 + 2p_0^3(1-p_0)^2 = \\
 &= p_0^2(2p_0^3 - 5p_0^2 + 2p_0 + 2)
 \end{aligned}$$

P_{n+1} 

Далее мы можем рассмотреть ячейку, составленную из ренормализованных связей. Вероятность проводить для нее связана с вероятностью проводить ренормализованной связи тем же уравнением что и p' связано с p :

$$p_2 = p_1^2(2p_1^3 - 5p_1^2 + 2p_1 + 2)$$

Повторяя эту процедуру мы рано или поздно придем к масштабу, равному корреляционной длине. При этом для $p < p_c$ вероятность проводить должна стремиться к нулю, а для $p > p_c$ она должна быть близка к единице. Из рисунка очевидно, что $p_c = 0.5$. Отметим, что порог протекания как и точки $p=0$ и $p=1$ являются неподвижными точками ренормгруппового преобразования. Причем в отличие от точек $p=0$ и $p=1$ порог протекания является неустойчивой точкой.



Оценим критический индекс ν . Для этого разложим в ряд Тейлора вблизи порога протекания:

p_{n+1}

$$p_{n+1} = p_c + \left(\frac{dp_{n+1}}{dp_n} \right)_{p_n=p_c} (p_n - p_c)$$

Вводя обозначение $\zeta = (dp_{n+1}/dp_n)_{p_n=p_c}$ раскладывая последовательно $(p_n - p_c)$, $(p_{n-1} - p_c)$ и т.д., получим

$$(p_{n+1} - p_c) = \zeta(p_n - p_c) = \zeta^2(p_{n-1} - p_c) = \dots = \zeta^n(p_0 - p_c)$$

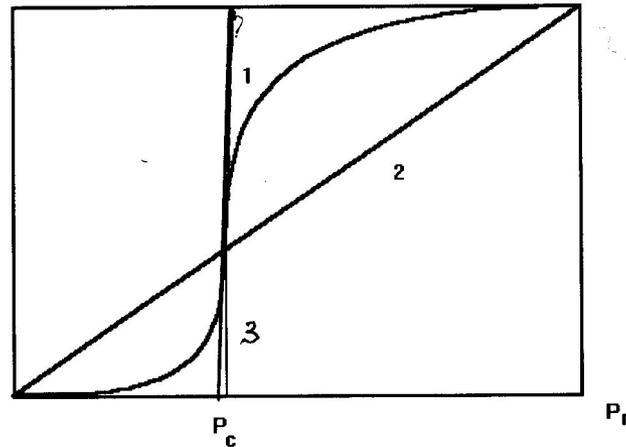
Откуда для n получается оценка $n = \ln \left[\frac{(p_{n+1} - p_c)}{(p_0 - p_c)} \right] / \ln \zeta$

На каждом шаге размер системы меняется в два раза, так что конечный размер $n+1$ системы L равен

$$L_n = 2^{\ln \left[\frac{(p_{n+1} - p_c)}{(p_0 - p_c)} \right] / \ln \zeta} = \left[\frac{(p_{n+1} - p_c)}{(p_0 - p_c)} \right]^{\ln 2 / \ln \zeta}$$



Предположение о том, что уже при $L_n = \xi$ система приобретает черты макроскопической, эквивалентна замене действительной зависимости p_{n+1} (кусочно-линейной аппроксимацией



При этом $p(L) = \begin{cases} 1 & p > p_c \\ 0 & p < p_c \end{cases}$ Что дает $n = \ln \left[\frac{(1-p_c)}{p_c \tau} \right] / \ln \zeta$

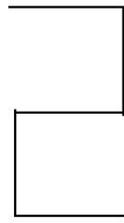
$$\xi = L_n = 2^n = \left(\frac{1-p_c}{p_c} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln \zeta}} \tau^{-\frac{\ln 2}{\ln \zeta}} \quad v = \frac{\ln 2}{\ln \zeta}$$

Далее найдем проводимость макросвязи.

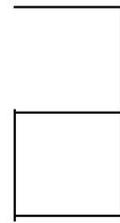
$$\sigma_{n+1} = 0.5\sigma_n \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{3}\sigma_n \quad \sigma_{n+1} = \frac{3}{5}\sigma_n \quad \sigma_{n+1} = 0.5\sigma_n$$



$$2p_0^2(1-p_0)^3$$



$$2p_0^3(1-p_0)^2$$



$$4p_0^4(1-p_0)$$



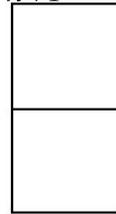
$$4p_0^3(1-p_0)^2$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n$$



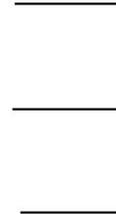
$$p_0^4(1-p_0)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n$$



$$p_0^5$$

$$\sigma_{n+1} = 0.5\sigma_n$$



$$2p_0^3(1-p_0)^2$$

$$\sigma_{n+1} = \frac{\left[p_0^2(1-p_0)^3 + \frac{2}{3}p_0^3(1-p_0)^2 + \frac{12}{5}p_0^3(1-p_0)^2 + 2p_0^4(1-p_0) + p_0^4(1-p_0) + p_0^5 + p_0^3(1-p_0)^2 \right]}{p_0^2(2p_0^3 - 5p_0^2 + 2p_0 + 2)} \sigma_n$$

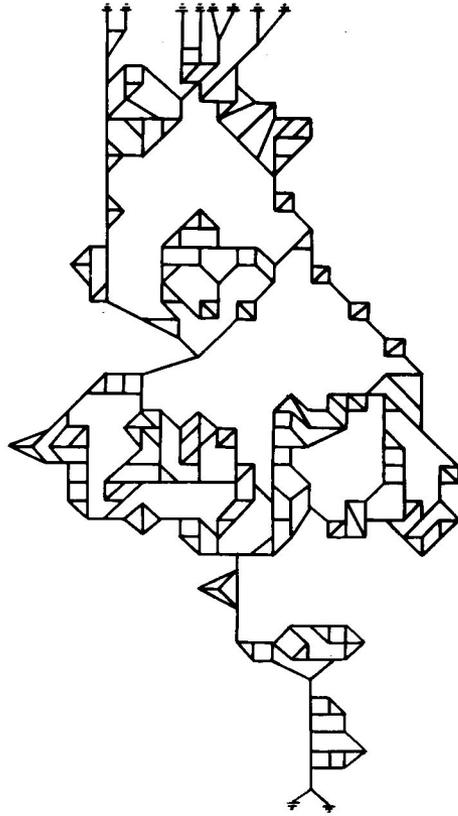
$$\sigma_{n+1} = \kappa \sigma_n = \dots = \kappa^n \sigma_0$$

$$\xi = 2^n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln \xi}{\ln 2}$$

$$\sigma(\tau) = \kappa^{\frac{\ln \xi}{\ln 2}} \sigma_0 = \sigma_0 e^{\frac{\ln \xi}{\ln 2} \ln \kappa} = \sigma_0 \xi(\tau)^{\frac{\ln \kappa}{\ln 2}} = \sigma_0 \tau^{\nu \frac{\ln 1/\kappa}{\ln 2}}$$

$$\tau = \frac{p - p_c}{p_c} \quad \xi \sim |\tau|^{-\nu}$$

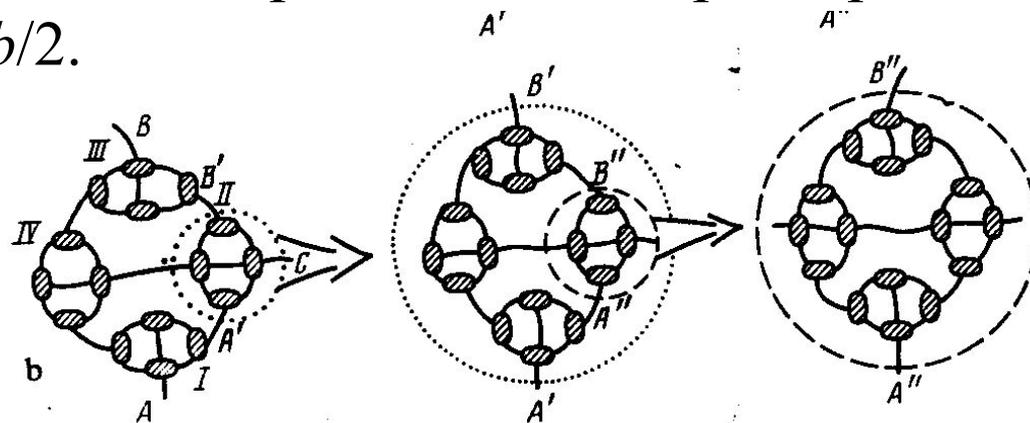
$$t = \nu \frac{\ln 1/\kappa}{\ln 2}$$



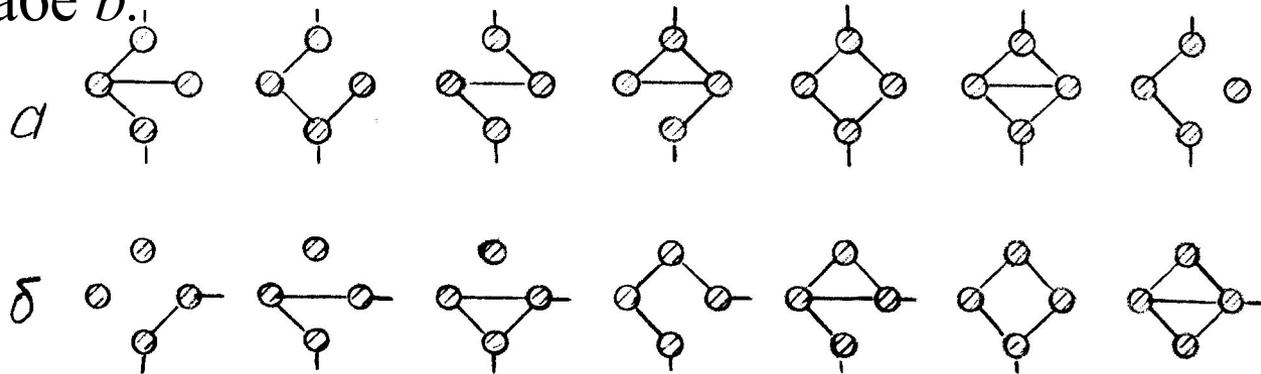
$$\sigma = 1 / \left(1 / \sigma_{Шк\ell} + 1 / \sigma_{кап} \right) = \sigma_{Ш\ell\ell} \frac{\sigma_{кап}}{\sigma_{кап} + \sigma_{Шк\ell}} < \sigma_{Шк\ell}$$

$$t > t_{Shklovskii}$$

Для того чтобы понять, что же происходит в двумерной перколяционной системе на пороге протекания обратимся к, так называемой, капельной модели БК. В капельной модели предполагается, что СБК состоит из капель, соединенных макросвязями. Капля размером b состоит из капель размером $b/2$, соединенных одножильными макросвязями длиной $b^{1/\nu}$. В свою очередь, на масштабе $2b$ капли размером b соединяются одножильными макросвязями длиной b в новую каплю размера $2b$. При этом структура СБК является самопохожей: закон построения капли размером $2b$ из капель размером b такой же, как закон построения капли размером b из капель размером $b/2$.



В реальной системе капли масштаба b объединяются в капли масштаба $2b$ различными способами, так что имеется набор конфигураций $2b$ -капель. Из свойства самоподобия СБК следует, что эти конфигурации одни и те же на любом масштабе b .



При соединении капелек размера b в каплю размера $2b$ часть b -капель проводит вдоль (а), а часть поперек капли (б), поэтому необходимо рассматривать проводимость вдоль капли $\sigma_{\parallel}(b)$ и проводимость поперек капли $\sigma_{\perp}(b)$

$$\sigma(2b) = \sigma(b) \left[1 + 2\sigma(b) / \sigma_{link}(b) + 2\sigma(b) / \sigma_{\perp}(b) \right]^{-1}$$

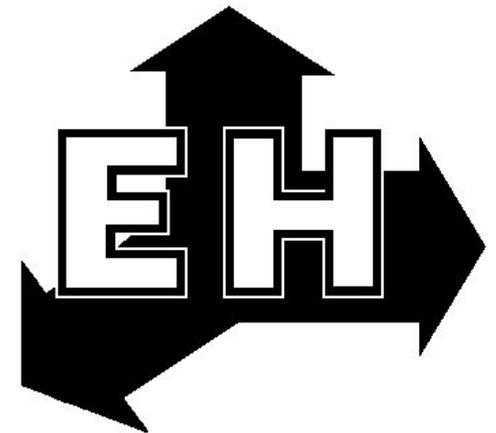
Полагая, что проводимость макросвязи $\sigma_{link}(b)$ обратно пропорциональна ее длине, получаем для переменных $a = \sigma(b) / \sigma_{link}(b)$ $k = \sigma(b) / \sigma_{\perp}(b)$ следующие соотношения: $a(2b) = a(b) 2^{1/\nu} Z^{-1}[a(b), k(b)]$

$$k(2b) = \frac{\left[(a(b) + 2k(b))^{16} (1 + 2k(b) + 2a(b))^6 (2 + 2k(b) + 3a(b))^2 \times \right. \\ \left. (2 + 6k(b) + 7a(b) + 3k^2(b) + 8k(b)a(b) + 5a^2(b)) \right]^{1/21}}{Z[a(b), k(b)] \left[\begin{array}{l} (1 + 2a(b) + 2k(b))(1 + 3a(b) + 4k(b))^3 \times \\ (2 + 12k(b) + 10a(b) + 7k^2(b) + \\ 16a(b)k(b) + 8a^2(b)) \end{array} \right]^{1/21}}$$

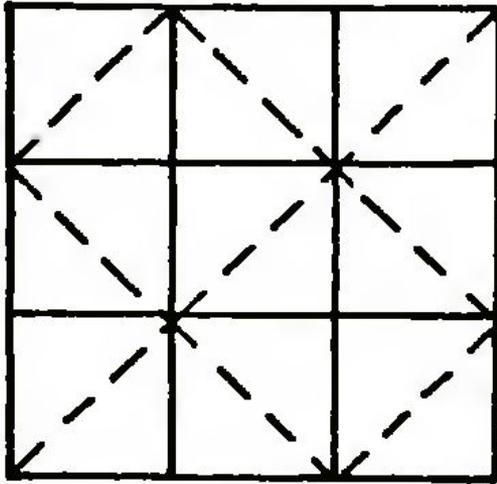
$$Z[a(b), k(b)] = \left[\begin{array}{l} (1 + 2k(b) + 2a(b))^5 (1.5a(b) + 2k(b)) \times \\ (4k(b) + 3a(b) + 7k^2(b) + \\ 12a(b)k(b) + 5a^2(b)) \end{array} \right]^{1/8} \times (1 + 3a(b) + 4k(b))$$

Применяя процедуру удвоения n раз, мы переходим к большему масштабу $L \sim 2^n b$. Одновременно с ростом L величины a и k стремятся к значениям, соответствующим устойчивой неподвижной точке системы: $a^* = 0, k^* \approx 0,7$.
Линеаризуя полученную систему, в окрестности этой точки, легко получить асимптотическое поведение при больших L :

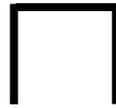
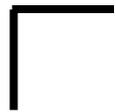
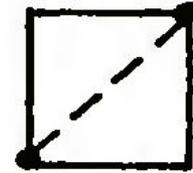
$$\sigma(L) \sim L^{t'} \quad t' = \ln Z(a^*, k^*) / \ln 2 \approx -1,03$$



Stauffer D., Aharony A., Introduction to percolation theory

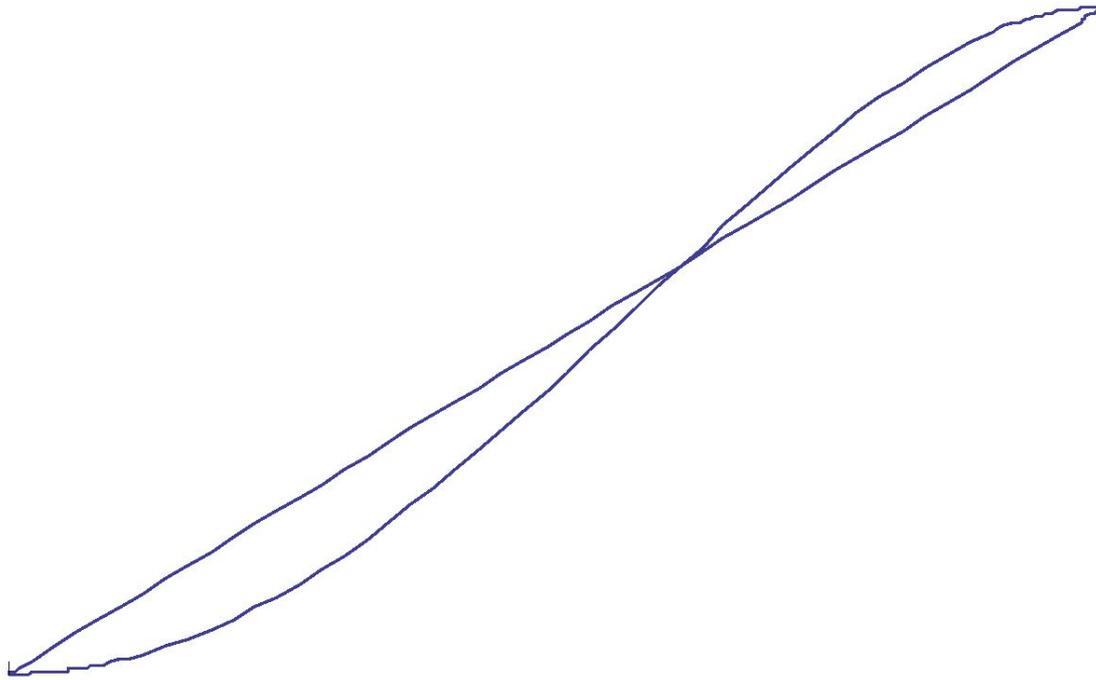


$$b = \sqrt{2}$$



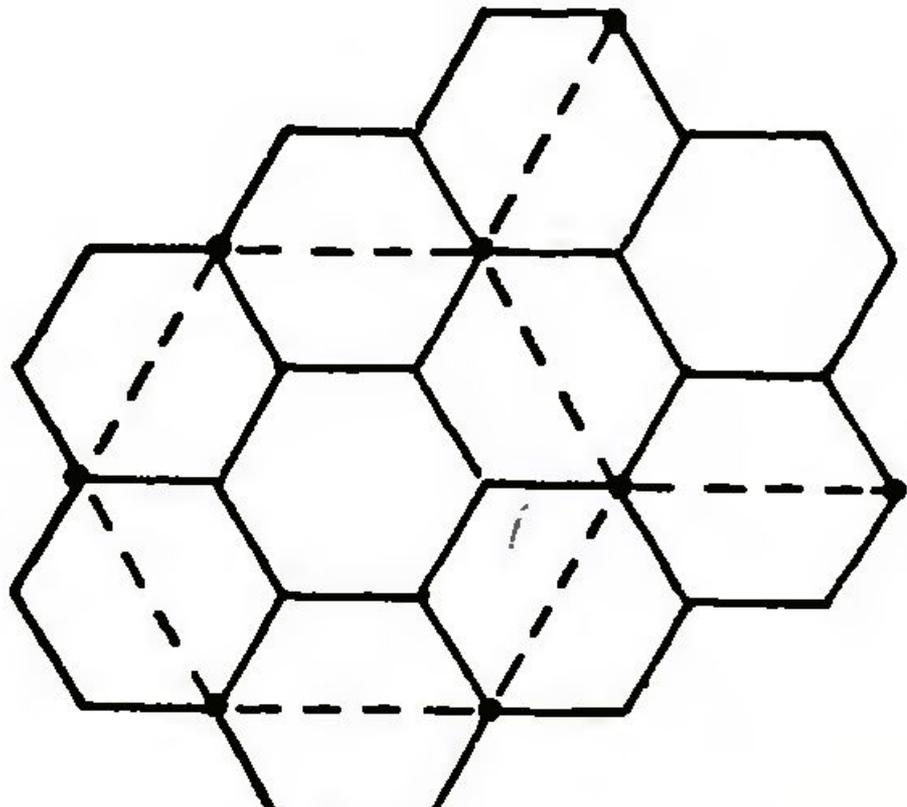
$$2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 = 2p^2 - p^4$$

$$p = 2p^2 - p^4$$

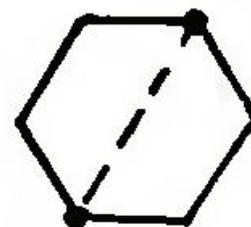
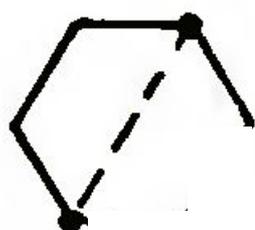
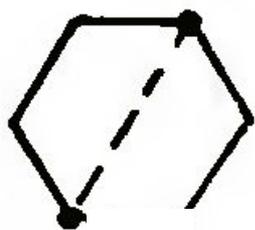
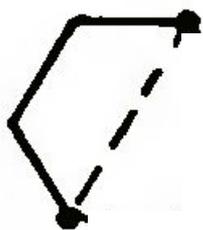
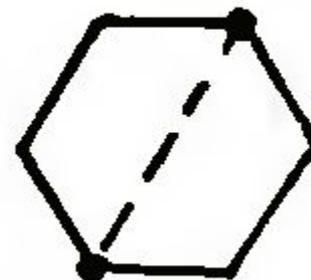


$$p = 2p^2 - p^4$$

$$p_c = 0.618034$$

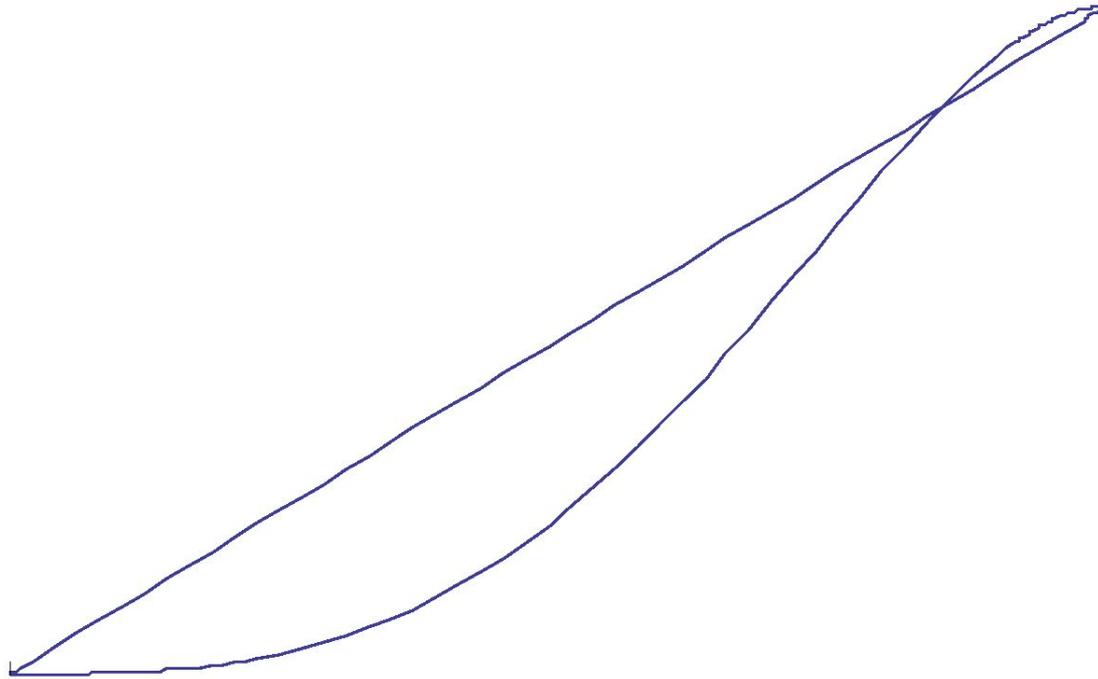


$b = 2$



$$2p^3(1-p)^3 + 6p^5(1-p) + 6p^4(1-p)^2 + p^6 = 2p^3 - p^6$$

$$p = 2p^3 - p^6$$



$$p = 2p^3 - p^6$$

$$p_c = 0.848375$$

*Скал А.С., Шкловский Б.И. // ФТП Т. 8, С. 1586-1592
(1974)*

*de Gennes P. J. // J. de Phys. (Paris) Lett. V. 37, 0. L1-L3,
(1976)*

Bernasconi J., // Phys. Rev. B, 18, p. 2185-2191 (1978)

*Сарычев А.К, Виноградов А.П. // "Структура каналов
протекания и переход металл-диэлектрик в
композитах". ЖЭТФ 1983 85 p.1144*

Сарычев А.К. // ЖЭТФ Т. 72, С. 1001-1004, (1977)

