Чисельне інтегрування функцій двох змінних

Лекція 8

Кафедра вищої та прикладної математики

Українська інженерно-педагогічна академія

2

План лекції

1. Послідовне застосування квадратурних формул.
2. Кубатурна формула середніх прямокутників.
3. Кубатурна формула Сімпсона.
4. Кубатурна формула Гаусса.
5. Мішана кубатурна формула центральних прямокутників.

3

1. Послідовне застосування квадратурних формул

Розглянемо методи наближеного обчислення подвійних інтегралів, тобто використання так званих *кубатурних формул*

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i, y_i) + R_n(f), \qquad (1)$$

що дозволяють знаходити наближене значення подвійного інтеграла за допомогою лінійної комбінації значень підінтегральної функції в скінченній множині точок $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \cdots, P_n(x_n,y_n) \in D$, яку називають *сіткою вузлів кубатурної формули*, числа $C_i, i=\overline{1,n}$, називаються *коефіцієнтами кубатурної формули*, а $R_n(f)$ − її *залишковим членом*. Зауважимо, що функція $f(x,y)$ вважається обмеженою, як і область D.

1. Послідовне застосування квадратурних формул

Проілюструємо його на прикладі обчислення подвійного інтеграла

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy, \qquad (2)$$

де область D є прямокутник $\{a \le x \le b, c \le y \le d\}$.

Відомо, що

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \qquad (3)$$

Позначивши

$$\int_c^d f(x,y)dy = F(x), \qquad (4)$$

можна записати

$$I = \int_a^b F(x)dx. \qquad (5)$$

1. Послідовне застосування квадратурних формул

Кожний із одновимірних інтегралів можна обчислити за квадратурними формулами, розглянутими вище (формули прямокутників, трапецій, Сімпсона, Гаусса):

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i); \quad F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy \approx \sum_{k=1}^{m} B_k f(x_i, y_k).$$

Об'єднуючи ці результати, отримуємо

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_i B_k f(x_i, y_k).$$

або

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \sum_{i,k} C_{ik} f(x_i, y_k);$$

тут $C_{ik} = A_i B_k$.

2. Кубатурна формула середніх прямокутників

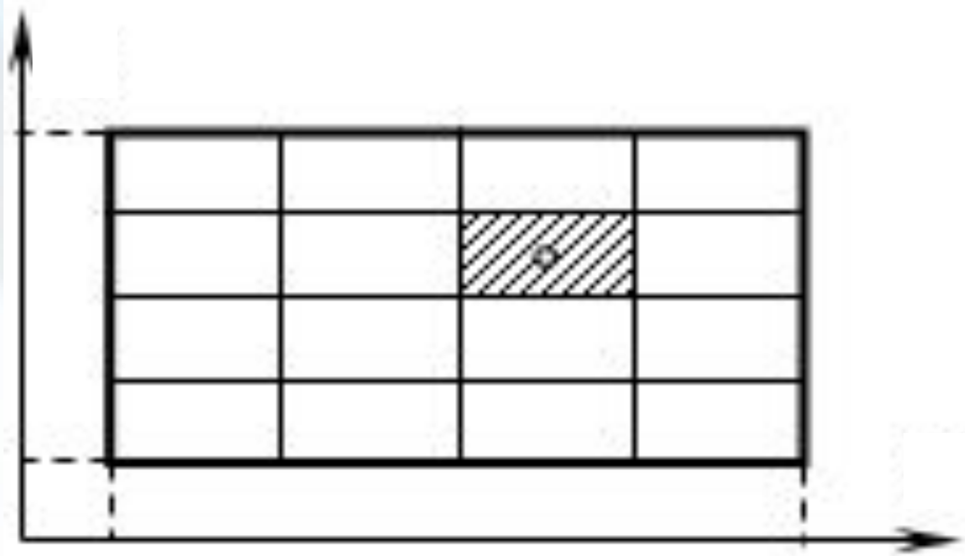
Використаємо для обчислення одновимірних інтегралів квадратурну формулу середніх прямокутників. Позначимо

$$h_x = \frac{b-a}{n}; \qquad h_y = \frac{d-c}{m};$$

$$x_i = a + ih_x; \qquad y_k = c + kh_y;$$

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}; \qquad \eta_k = \frac{y_{k-1} + y_k}{2};$$

$$i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m}.$$



2. Кубатурна формула середніх прямокутників

Тоді

$$I \approx h_x(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) = h_x \sum_{i=1}^{n} F_i;$$

$$F_i = F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)dy \approx h_y\left[f(\xi_i,\eta_1) + f(\xi_i,\eta_2) + \cdots + f(\xi_i,\eta_m)\right] = h_y \sum_{k=1}^{m} f(\xi_i,\eta_k);$$

і для обчислення подвійного інтеграла одержуємо формулу

$$\iint_D f(x,y)dxdy \approx J_{n0}(f) = h_x h_y \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_i,\eta_k) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f\left(a + \frac{2i-1}{2}h_x, c + \frac{2k-1}{2}h_y\right).$$

3. Кубатурна формула Сімпсона

Якщо ж для обчислення одновимірних інтегралів використати формулу Сімпсона, то дістанемо при $n = 2N, h_x = \dfrac{b-a}{2N}, m = 2M, h_y = \dfrac{d-c}{2M}$

$$I = \frac{h_x}{3}[F_0 + 4(F_1 + F_3 + \dots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \dots + F_{n-2}) + F_n]; \qquad (6)$$

$$F_i = F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy = \frac{h_y}{3}[f(x_i, y_0) + 4(f(x_i, y_1) + f(x_i, y_3) + \dots +$$

$$+ f(x_i, y_{m-1})) + 2(f(x_i, y_2) + f(x_i, y_4) + \dots + f(x_i, y_{m-2})) + f(x_i, y_m)], \qquad (7)$$

$$x_i = a + ih_x, \quad y_k = c + kh_y, \quad i = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, m}.$$

4. Кубатурна формула Гаусса

Розглянемо тепер $\iint_D f(x,y)dxdy$ у випадку $D=\{-1\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$ і скористаємося квадратурною формулою Гаусса. Нехай ξ_i і q_i $(i=\overline{1,n})$ – вузли і вагові коефіцієнти по змінній x, а η_k і r_k $(k=\overline{1,m})$ – вузли і вагові коефіцієнти по змінній y. Аналогічно тому, як це зроблено у випадку формули Сімпсона, отримуємо наступну кубатурну формулу Гаусса:

$$\iint_D f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} q_i r_k f(\xi_i,\eta_k).$$

Випадок, коли $D=\{a\le x\le b, c\le y\le d\}$ зводиться до попереднього описаною раніше заміною змінних x,y.

Приклад

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, де область D − прямокутник $0 \le x \le \pi/2$, $\pi/4 \le y \le \pi/2$, за формулою центральних прямокутників, Сімпсона при $n_x = 4, n_y = 2$, за формулою Гаусса. Порівняти наближені значення інтегралу із точним.

Розв'язування.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy.$$

Обчислимо вузли інтегрування.

$$h_x = (\pi/2-0)/4 = \pi/8; h_y = (\pi/2-\pi/4)/2 = \pi/8;$$
$$x_0 = 0, x_1 = \pi/8, x_2 = \pi/4, x_3 = 3\pi/8, x_4 = \pi/2;$$
$$y_0 = \pi/4, y_1 = 3\pi/8, y_2 = \pi/2.$$

Приклад (обчислення за формулою центральних прямокутників)

$i := 1..nx$

$\frac{2 \cdot i - 1}{2} \cdot hx =$

0.196
0.589
0.982
1.374

$k := 1..ny$

$\frac{2k - 1}{2} \cdot hy =$

0.196
0.589

$f\left(a + \frac{2 \cdot i - 1}{2} \cdot hx, c + \frac{2k - 1}{2} \cdot hy\right)$

0.383
0
-0.383
-0.707
0
-0.383
-0.707
-0.924

$$I \approx I_{serpr} = 0.392699 \cdot 0.392699 \cdot (-2.720777) = -0.419578$$

Для порівняння наведемо точне значення даного інтеграла

$$I = \left(-\cos\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -0,414214,$$

тобто інтеграл обчислено з похибкою

$\Delta = |-0,414214 - (-0,414325)| = 0,005364 \approx 0,005$.

Приклад (обчислення за формулою Сімпсона)

Позначимо

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x+y)dy = F(x).$$

Тоді

$$\int_{0}^{\pi/2} dx \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x+y)dy = \int_{0}^{\pi/2} F(x)dx$$

і, застосовуючи формулу Сімпсона по змінній x при $n_x = 4$, маємо

$$\int_{0}^{\pi/2} F(x)dx \approx \frac{\pi}{24}\left[F(x_0)+4F(x_1)+2F(x_2)+4F(x_3)+F(x_4)\right].$$

Отже,

$$\int_{0}^{\pi/2} dx \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x+y)dy \approx \frac{\pi}{24}\left[F(x_0)+4F(x_1)+2F(x_2)+4F(x_3)+F(x_4)\right].$$

Приклад (обчислення за формулою Сімпсона)

Інтеграли $F(x_i)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x_i+y)dy,\quad (i=\overline{0,4})$ обчислимо наближено за формулою Сімпсона по змінній y при $n_y=2$. Послідовно отримуємо:

$$F(x_0)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x_0+y)dy\approx\frac{\pi}{24}\left[\cos(0+y_0)+4\cos(0+y_1)+\cos(0+y_2)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+4\cos(\frac{3\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{2})\right)=\frac{\pi}{24}\cdot 2,237841,$$

$$F(x_1)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x_1+y)dy\approx\frac{\pi}{24}\left[\cos(\frac{\pi}{8}+y_0)+\cos(\frac{\pi}{8}+y_1)+\cos(\frac{\pi}{8}+y_2)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\cos(\frac{3\pi}{8})+4\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{5\pi}{8})\right)=0,$$

$$F(x_2)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x_2+y)dy\approx\frac{\pi}{24}\left[\cos(\frac{\pi}{4}+y_0)+\cos(\frac{\pi}{4}+y_1)+\cos(\frac{\pi}{4}+y_2)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\cos(\frac{\pi}{2})+4\cos(\frac{5\pi}{8})+\cos(\frac{3\pi}{4})\right)=\frac{\pi}{24}\cdot(-2,237841),$$

Приклад (обчислення за формулою Сімпсона)

$$F(x_3)=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x_3+y)dy\approx\frac{\pi}{24}\left[\cos(\frac{3\pi}{8}+y_0)+\cos(\frac{3\pi}{8}+y_1)+\cos(\frac{3\pi}{8}+y_2)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\cos(\frac{5\pi}{8})+4\cos(\frac{3\pi}{4})+\cos(\frac{7\pi}{8})\right)=\frac{\pi}{24}\cdot(-4{,}134990),$$

$$F(x_4)=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x_4+y)dy\approx\frac{\pi}{24}\left[\cos(\frac{\pi}{2}+y_0)+\cos(\frac{\pi}{2}+y_1)+\cos(\frac{\pi}{2}+y_2)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\cos(\frac{3\pi}{4})+4\cos(\frac{7\pi}{8})+\cos(\pi))\right)=\frac{\pi}{24}\cdot(-5{,}402625).$$

Підставляючи значення $F_i(i=\overline{1,4})$ у формулу, отримуємо

$$I\approx\left(\frac{\pi}{24}\right)^2(2{,}237841+4\cdot 0+2(-2{,}237841)+4(-4{,}134990)-5{,}402625)=-0{,}414325.$$

Інтеграл обчислено з похибкою $\Delta=|-0{,}414214-(-0{,}414325)|=0{,}000111\approx 0{,}0001$.

Приклад (обчислення за формулою Гаусса)

$ORIGIN := 1 \qquad nx := 4 \qquad ny := 2$

$$\xi := \begin{pmatrix} -0.861136 \\ -0.339981 \\ 0.339981 \\ 0.861136 \end{pmatrix} \qquad q := \begin{pmatrix} 0.347854 \\ 0.652145 \\ 0.652145 \\ 0.347854 \end{pmatrix} \qquad \eta := \begin{pmatrix} -0.577350 \\ 0.577350 \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$II3 := \frac{b-a}{2}\cdot\frac{d-c}{2}\cdot\sum_{i=1}^{nx}\sum_{k=1}^{ny}\left(q_i\cdot r_k\cdot f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot\xi_i, \frac{c+d}{2}+\frac{d-c}{2}\cdot\eta_k\right)\right)$$

$$\frac{d-c}{2}\cdot\eta_k\Big)\Big)$$

$II3 = -0.414176 \qquad IIt := -0.41421356 \qquad |II3 - IIt| = 0.0000376$

Приклад (порівняння похибок)

Зазначимо, що точне значення заданого визначеного інтегралу дорівнює -0.4142141356. Враховуючи це, знайдемо абсолютні похибки наближених значень інтеграла, отриманих за наведеними формулами.

$$IIt := -0.41421356$$

$$\Delta 1 := |II1 - IIt| \qquad \Delta 2 := |II2 - IIt| \qquad \Delta 3 := |II3 - IIt|$$

$$\Delta 1 = 0.0054 \qquad \Delta 2 = 1.115037 \times 10^{-4} \qquad \Delta 3 = 3.7552 \times 10^{-5}$$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок, що в заданому прикладі найгірша точність результата, отриманого за формулою центральних прямокутників, а найменшу похибку дала формула Гаусса.

5. Мішана кубатурна формула центральних прямокутників

Формула

$$J_n(f)=\frac{(b-a)(d-c)}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n^2}f\left(a+\frac{k-0,5}{n}(b-a),c+\frac{l-0,5}{n^2}(d-c)\right)+$$

$$+\frac{(b-a)(d-c)}{n^3}\sum_{k=1}^{n^2}\sum_{l=1}^{n}f\left(a+\frac{k-0,5}{n^2}(b-a),c+\frac{l-0,5}{n}(d-c)\right)-$$

$$-\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}f\left(a+\frac{k-0,5}{n}(b-a),c+\frac{l-0,5}{n}(d-c)\right)$$

називається мішаною двовимірною кубатурною формулою центральних прямокутників.

5. Мішана кубатурна формула центральних прямокутників

Вона має таку похибку

$$J_n(f)-\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=O(n^{-4}),\forall f\in C^{2,2}(D),D=[a,b]\times[c,d].$$

Класична двовимірну кубатурну формулу центральних прямокутників має похибку

$$J_{0n}(f)-\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=O(n^{-2}),\forall f\in C^{2,2}(D),D=[a,b]\times[c,d].$$

Звертаємо увагу на те, що формула $J_n(f)$ використовує $Q_1=O(2n^3-n^2)$ значень функції $f(x,y)$, а формула $J_{0,n^2}(f)$ використовує для досягнення тієї ж точності $Q_2=O(n^4)$ значень $f(x,y)$. Тобто мішана кубатурна формула $J_n(f)$ є значно більш ефективною, ніж формула $J_{0,n^2}(f)$.

Приклад (обчислення за формулою мішаних центральних прямокутників)

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, де область D − прямокутник $0 \le x \le \pi/2$, $\pi/4 \le y \le \pi/2$, за формулою мішаних центральних прямокутників. Порівняти наближене значення інтегралу із точним.

$$nx := 4 \qquad ny := 2$$

$$S := (b-a)\cdot(d-c) \qquad n := 6$$

$$\Pi4 := \frac{S}{nx\cdot ny^2}\cdot\sum_{k=1}^{nx}\sum_{l=1}^{ny^2} f\left[a+\frac{k-0.5}{nx}\cdot(b-a),\, c+\frac{l-0.5}{ny^2}\cdot(d-c)\right] \ldots$$

$$+\frac{S}{nx^2\cdot ny}\cdot\sum_{k=1}^{nx^2}\sum_{l=1}^{ny} f\left[a+\frac{k-0.5}{nx^2}\cdot(b-a),\, c+\frac{l-0.5}{ny}\cdot(d-c)\right] \ldots$$

$$+\frac{S\cdot(-1)}{nx\cdot ny}\cdot\sum_{k=1}^{nx}\sum_{l=1}^{ny} f\left[a+\frac{k-0.5}{nx}\cdot(b-a),\, c+\frac{l-0.5}{ny}\cdot(d-c)\right]$$

$$\Pi4 = -0.41503$$

Приклад (порівняння похибок формули мішаних центральних та центральних прямокутників)

Формула мішаних центральних прямокутників дає ту ж точність, що і формула звичайних прямокутників у випадку, коли кількість вузлів збільшена до n = nx*nx*ny*ny , але використовує при цьому меншу кількість вузлів.

$$hx := \frac{b-a}{nx^2} \qquad hy := \frac{d-c}{ny^2}$$

$$hx = 0.0982 \qquad hy = 0.19635$$

$$II1 := \frac{b-a}{nx^2}\cdot\frac{d-c}{ny^2}\cdot\sum_{i=1}^{nx\cdot nx}\sum_{k=1}^{ny\cdot ny} f\left(a+\frac{2\cdot i-1}{2}\cdot hx, c+\frac{2k-1}{2}\cdot hy\right)$$

$$II1 = -0.41504635665979156$$

$$\Delta1 := |II1 - IIt| \qquad \Delta1 = 0.0008 \qquad \Delta4 := |II4 - IIt| \qquad \Delta4 = 8.20646\times10^{-4}$$

$$Nserpr := nx\cdot nx\cdot ny\cdot ny \qquad Nmserpr := nx\cdot ny^2 + ny\cdot nx^2 - nx\cdot ny$$

$$Nserpr = 64 \qquad Nmserpr = 40$$

Висновки

Познайомилися з методом послідовного інтегрування.

Метод послідовного інтегрування можна застосувати і у випадку області інтегрування більш складної форми. Нехай, наприклад,

$$D = \{\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), \quad c \le y \le d\}.$$

Тоді

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx,$$

і можна записати

$$\Phi(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx; \quad I = \int_c^d \Phi(y)dy.$$

Результат знову отримується повторним використанням квадратурної формули прямокутників, Сімпсона або Гаусса, при цьому спочатку вибираються вузли інтегрування η_k по змінній y, а потім вузли ξ_i по змінній x, які залежать від вибору вузлів $\eta_k : \xi_i = \xi_i(\eta_k)$.

Висновки

У випадку, коли область інтегрування має більш складну форму, її потрібно розбити на підобласті розглянутого виду і для обчислення інтеграла по кожній із них використати ту чи іншу кубатурну формулу.

Необхідно зазначити, що описаним шляхом звичайно отримуються кубатурні формули із великою кількістю вузлів, яка швидко зростає при переході до інтегралів більшої кратності. Тому є сенс використовувати квадратурні формули максимальної точності (з мінімальною кількістю вузлів, наприклад, формули Гаусса).

Загальна похибка наближених формул залежить від кількості вузлів інтегрування і гладкості підінтегральної функції.