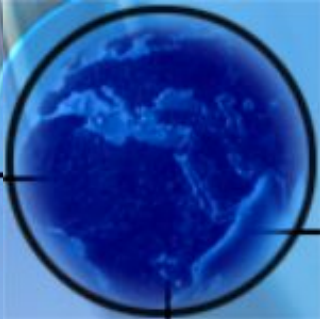


# Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)



## Лекція 9

Кафедра вищої та прикладної математики

Українська інженерно-педагогічна  
академія

- 1. Загальна характеристика методів.**
- 2. Матричний метод**
- 3. Правило Крамера**
- 4. Метод Гаусса.**
- 5. Метод простої ітерації**
- 6. Метод поліпшеної ітерації Зейделя**



# 1. Загальна характеристика методів

Успішне розв'язання багатьох науково-технічних задач в значній мірі залежить від уміння швидко і точно отримувати розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь. До розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь зводяться задачі аналізу та синтезу фізичних систем різноманітної природи (механічних, гідравлічних, електричних і т.п.). Розв'язування великої кількості нелінійних задач зводиться також до знаходження розв'язку послідовності лінійних систем.

**Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що використовуються на практиці, за принципами організації обчислень поділяються на прямі та ітераційні.**

**Прямими** називаються методи, які дозволяють одержати розв'язок за скінченну кількість арифметичних операцій. До таких методів належать метод Гаусса, метод головних елементів та інші.



# 1. Загальна характеристика методів

Ітераційними методами називаються методи, які дозволяють знайти розв'язок системи з заданою точністю за допомогою збіжного нескінченного процесу.

До ітераційних методів належать метод простої ітерації, метод Зейделя, градієнтні методи та їх модифікації.

В зв'язку з немінучим округленням результати навіть точних методів є наближеними, причому оцінити похибку в загальному випадку дуже важко. При використанні ітераційних методів додається ще похибка методу.

В подальшому будемо вважати, що СЛАР сумісна і визначена.

## 2. Матричний метод

5

Система  $m$  лінійних алгебраїчних рівнянь з  $n$  невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – невідомі, які треба знайти;  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  – коефіцієнти системи;  $b_1, b_2, \dots, b_m$  – вільні члени.

Матриця, що складена з коефіцієнтів системи, позначається буквою  $A$ , і називається матрицею системи, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



## 2. Матричний метод

Матриця, яка отримана з матриці системи  $A$  додаванням до неї стовбця вільних членів, позначається  $A|B$  та називається розширеною матрицею системи, тобто

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Матриці-стовбці, що складені з вільних членів та з невідомих членів, позначаються, відповідно,  $B$  і  $X$  та називається стовбцем вільних членів і стовбцем невідомих, тобто

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Застосовуючи ці позначення, СЛАР (1) можна записати в матричній формі

$$AX = B.$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді  $X = A^{-1}B$ .

## 3. Правило Крамера

Нехай задана квадратна СЛАР.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2)$$

Введемо позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$\Delta$  – визначник основної матриці,

$\Delta_i$  – визначник, отриманий з визначника  $\Delta$  в результаті заміни  $i$ -ого стовпця стовпцем вільних членів.

**Правило Крамера:** Якщо основна матриця невироджена, то СЛАР (1) має єдиний розв'язок, причому

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Якщо  $\Delta = 0$ , і хоча б один з визначників  $\Delta_i \neq 0$ , то система несумісна.



## 4. Метод Гаусса.

Найбільш простим і зручним із точних методів розв'язування СЛАР є метод послідовного виключення невідомих, який називається також методом Гаусса. Метод має багато різноманітних обчислювальних схем. Розглянемо схему, яка була вивчена в курсі вищої математики.

Розглянемо СЛАР з  $n$  невідомими (1). За допомогою елементарних перетворень системи приведемо її до більш простого вигляду. Очевидно, що замість елементарних перетворень рівнянь системи зручніше проводити відповідні перетворення над рядками розширеної матриці системи.

Випишемо розширену матрицю системи

$$A|B = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$



## 4. Метод Гаусса.

Крім елементарних перетворень над рядками, в цій матриці можна переставляти стовпці (крім стовпця вільних членів) разом з відповідними їм невідомими.

За допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю  $A|B$  до наступного еквівалентного вигляду

$$A|B \sim \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right). \quad (3)$$

де числа  $a_{11}, \tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{rr} \neq 0$ .

## 4. Метод Гаусса

Можливі наступні випадки:

- 1) Хоча б один з коефіцієнтів  $\tilde{b}_{r+1}, \tilde{b}_{r+2}, \dots, \tilde{b}_m$  відмінний від нуля. Тоді система, яка відповідає розширеній матриці (3), а отже й система (5.1), несумісна.
- 2) Коефіцієнти  $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \dots = \tilde{b}_m = 0$ . Тоді в матриці (3) останні  $m - r$  рядків є нульовими. Отже, система рівнянь, що відповідає розширеній матриці (3), має одну з двох форм:

а) трикутну (при  $RgA = n$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{array} \right.$$

є  $a_{11}, \tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{rr}$  відмінні від нуля.



## 4. Метод Гаусса

Ця система має єдиний розв'язок. Для знаходження розв'язку системи зазвичай поступають наступним чином: спочатку з останнього рівняння знаходять значення невідомого  $x_n$ , потім, підставляючи його у передостаннє рівняння, знаходять  $x_{n-1}$ , і т.д. продовжуючи процес, знаходимо всі невідомі  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Таким чином, при розв'язуванні СЛАР методом Гаусса спочатку система зводиться до одного рівняння з одним невідомим, а потім знаходяться по черзі всі невідомі.

Процес зведення системи до одного рівняння називається прямим ходом, а процес обчислення невідомих – зворотним ходом.

**На практиці, щоб зменшити похибки округлення, користуються методом головних елементів, який є найкращим варіантом методу Гаусса.**

В методі головних елементів на кожному кроці виключається невідоме з найбільшим за модулем коефіцієнтом. В усьому іншому метод головних елементів нічим не відрізняється від методу Гаусса.

# Приклад

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 20x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ -x_1 + 25x_2 + 3x_3 = 46, \\ 2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 7 \end{cases}$$

методом Гаусса.

**Розв'язування.** Розв'яжемо задану систему методом Гаусса. Знаходимо  $x_3$  з першого рівняння системи:  $x_3 = 15 - 20x_1 + 2x_2$ .

Підставимо його в друге і третє рівняння. Привівши подібні члени, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -61x_1 + 31x_2 = 1 \\ 302x_1 - 35x_2 = 232 \end{cases}$$

Тепер знаходимо  $x_2$  з першого рівняння:  $x_2 = \frac{61}{31}x_1 + \frac{1}{31}$ .

Підставивши його значення в друге рівняння, одержимо:

$$\frac{7227}{31}x_1 = \frac{7227}{31}$$

Звідси знаходимо  $x_1 = 1$ . Тоді  $x_2 = \frac{61}{31} + \frac{1}{31} = 2$ ,  $x_3 = 15 - 20 + 4 = -1$

Таким чином,  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ .





## 5. Метод простої ітерації

Метод простої ітерації полягає у знаходженні послідовних наближень за формулою

$$X^{(k+1)} = CX^{(k)} + D, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При цьому за **нульове наближення**  $X^{(0)}$  можна взяти довільний вектор; на практиці найчастіше покладають  $X^{(0)} = D$ . Якщо послідовність наближень  $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$  має границю  $X^*$ , то  $X^*$  є розв'язком системи (4), до того ж  $\|X^{(k)} - X^*\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Якщо для системи (4) має місце принаймні одна із умов**

$$q_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1 \quad \text{або} \quad q_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad \text{або} \quad q_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 < 1, \quad (5)$$

**то ітераційний процес збігається до єдиного розв'язку цієї системи незалежно від вибору початкового наближення.** При цьому має місце, наприклад, така оцінка для наближень, отриманих методом простої ітерації: як тільки

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \frac{1 - q_0}{q_0} \varepsilon = \varepsilon_1, \quad i = \overline{1, n}.$$

то  $\left| x_i^* - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}.$



## 5. Метод простої ітерації

Аналогічні критерії отримуються для інших двох умов. Процес ітерації закінчується, коли вказані критерії свідчать про досягнення заданої точності.

### **Практично поступають так:**

1. В заданій системі виділяють рівняння, модуль одного з коефіцієнтів яких більший суми модулів всіх інших коефіцієнтів рівняння.
2. Кожне з виділених рівнянь записують на такому місці, щоб найбільший за модулем коефіцієнт був діагональним.
3. Решту невиділених рівнянь заміняють лінійною комбінацією рівнянь системи так, щоб був виконаний принцип комплектування нової системи і всі вільні місця були заповнені. При цьому треба потурбуватися, щоб кожне невикористане раніше рівняння попало хоча б в одну лінійну комбінацію, яка стає рівнянням нової системи. Розв'язавши нову систему відносно діагональних невідомих, одержимо систему, для якої виконуються умови збіжності ітераційного процесу.

Розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} 20x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ -x_1 + 25x_2 + 3x_3 = 46, \\ 2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 7 \end{cases}$$

ітераційними методами: методом простої ітерації із заданою точністю  $\varepsilon = 0.01$

**Розв'язання.** Спочатку розв'яжемо систему методом простої ітерації. Зведемо систему до вигляду, придатного для ітерацій. Для цього розв'яжемо систему відносно діагональних невідомих. Одержимо систему

$$\begin{cases} x_1 = 0.75 + 0.1x_2 - 0.05x_3 \\ x_2 = 1.84 + 0.04x_1 - 0.15x_3 \\ x_3 = 0.133x_1 - 0.333x_2 - 0.467, \end{cases} \quad (1)$$

для якої виконуються умови збіжності ітераційного процесу.

$$\text{Дійсно, } \sum_{j=1}^3 |c_{i1}| = 0.15, \quad \sum_{j=1}^3 |c_{i2}| = 0.16, \quad \sum_{j=1}^3 |c_{3j}| = 0.467.$$

Отже,  $q_0 = \max(0.15, 0.16, 0.467) = 0.467$ .



# Приклад

Ітераційний процес треба закінчити при виконанні умови

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \frac{1 - q_0}{q_0} \varepsilon = \frac{1 - 0.467}{0.467} \cdot 0.01 = 0.0114 = \varepsilon_1, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2)$$

Візьмемо за початкове наближення розв'язку

$$x_1^{(0)} = 0.75, \quad x_2^{(0)} = 1.84, \quad x_3^{(0)} = -0.467.$$

Тоді

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.84 - 0.05 \cdot (-0.467) = 0.957, \\ x_2^{(1)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.75 - 0.12 \cdot (-0.467) = 1.926, \\ x_3^{(1)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.75 - 0.333 \cdot 1.84 = -0.980. \end{cases}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0.957 - 0.75| = 0.207;$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |1.926 - 1.84| = 0.086;$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |-0.980 - (-0.467)| = 0.513.$$

$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = 0.513 > \varepsilon_1$ , отже (2) не виконується (потрібна

точність ще не досягнута), знаходимо наступне наближення.

# Приклад

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.926 - 0.05 \cdot (-0.980) = 0.992, \\ x_2^{(2)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.957 - 0.12 \cdot (-0.980) = 1.996, \\ x_3^{(2)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.957 - 0.333 \cdot 1.926 = -0.981. \end{cases}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.035; \quad |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.07; \quad |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.001.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0.07 > \varepsilon_1.$$

І знову потрібна точність не досягнута. Знаходимо **третє наближення**:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.926 - 0.05 \cdot (-0.981) = 0.999, \\ x_2^{(3)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.992 - 0.12 \cdot (-0.981) = 1.997, \\ x_3^{(3)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.992 - 0.333 \cdot 1.926 = -0.9997 = -1.000. \end{cases}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.007; \quad |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.001; \quad |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.019.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0.019 > \varepsilon_1.$$

Отже (2) не виконується (потрібна точність ще не досягнута), знаходимо наступне наближення.



$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.997 - 0.05 \cdot (-1.000) = 0.9997 = 1.000, \\ x_2^{(4)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.999 - 0.12 \cdot (-1.000) = 1.9999 = 2.000, \\ x_3^{(4)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.999 - 0.333 \cdot 1.997 = -0.999. \end{cases}$$

$$|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = 0.001; \quad |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = 0.003; \quad |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = 0.001.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| = 0.003 < \varepsilon_1.$$

Тепер потрібна точність досягнута. Отже, з точністю до 0,01 можна покласти:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ , що збігається з точним розв'язком системи, знайденим в завданні 1.

## 6. Метод поліпшеної ітерації Зейделя

Нехай систему лінійних алгебраїчних рівнянь подано у вигляді:

$$x_i = d_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, n}$$

**Алгоритм метода Зейделя полягає в наступному.**

1. Виберемо довільно початкове наближення розв'язку  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ . Зауважимо, що початковий вектор  $X^{(0)}$  можна брати довільним, але необхідно використовувати всю наявну інформацію про систему, щоб  $X^{(0)}$  був як можна ближче до розв'язку системи  $X$ .

2. В перше рівняння системи підставляємо значення змінних  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  і обчислюємо нове значення змінної  $x_1$ :

$$x_1^{(1)} = d_1 + c_{11}x_1^{(0)} + c_{12}x_2^{(0)} + \dots + c_{1n}x_n^{(0)}.$$

Використовуючи обчислене значення  $x_1^{(1)}$  і початкові значення всіх інших змінних  $x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  із другого рівняння системи знаходимо  $x_2^{(1)}$ :

$$x_2^{(1)} = d_2 + c_{21}x_1^{(1)} + c_{22}x_2^{(0)} + \dots + c_{2n}x_n^{(0)}.$$



Аналогічно,

$$x_3^{(1)} = d_3 + c_{31}x_1^{(1)} + c_{32}x_2^{(1)} + c_{33}x_3^{(0)} \dots + c_{3n}x_n^{(0)}.$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо значення всіх решти змінних.  
Так

$$x_n^{(1)} = d_n + c_{n1}x_1^{(1)} + c_{n2}x_2^{(1)} + \dots + c_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)} + c_{nn}x_n^{(0)}.$$

В результаті маємо **перше наближення** розв'язку системи

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^T$$

Позначка "Т" означає транспонування.

## 6. Метод поліпшеної ітерації Зейделя

3. Беручи замість нульового наближення  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  перше наближення  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ , повторюємо всі дії, описані у пункті 2 і отримуємо друге наближення  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$  і т.д.

Взагалі, якщо вже відоме  $k$ -те наближення  $X^{(k)}$ , то  $(k+1)$ -ше наближення знаходиться за формулами

$$x_1^{(k+1)} = d_1 + \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j^{(k)};$$

$$x_2^{(k+1)} = d_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n c_{2j} x_j^{(k)};$$

.....

$$x_i^{(k+1)} = d_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n c_{ij} x_j^{(k)};$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = d_n + \sum_{j=1}^{i-1} c_{nj} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)}$$

Доведено, що при виконанні хоча б однієї з умов (5.5) процес Зейделя збігається до єдиного розв'язку системи незалежно від вибору початкового наближення.



## 6. Метод поліпшеної ітерації Зейделя

На практиці ітераційний процес продовжують до тих пір, поки всі  $x_i^{(k+1)}$  не стануть достатньо близькими до  $x_i^{(k)}$ . Ітерації припиняють за умови

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$$

де  $\varepsilon$  --- потрібна точність розв'язку.

Здебільшого метод Зейделя збігається швидше, ніж метод простої ітерації.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 20x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ -x_1 + 25x_2 + 3x_3 = 46, \\ 2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = 7 \end{cases}$$

методом методом Зейделя з точністю  $\varepsilon = 0.01$ .

**Розв'язання.** Розв'яжемо систему відносно діагональних невідомих. Одержимо систему (1), для якої виконуються умови збіжності ітераційного процесу.

За методом Зейделя ітераційний процес треба закінчити при виконанні умови  $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = \varepsilon = 0.01$ .

Візьмемо за **початкове наближення** розв'язку

$$x_1^{(0)} = 0.75, \quad x_2^{(0)} = 1.84, \quad x_3^{(0)} = -0.467.$$



Тоді

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.84 - 0.05 \cdot (-0.467) = 0.957, \\ x_2^{(1)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.957 - 0.12 \cdot (-0.467) = 1.934, \\ x_3^{(1)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.957 - 0.333 \cdot 1.934 = -0.984. \end{cases}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0.957 - 0.75| = 0.207;$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |1.934 - 1.84| = 0.094;$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |-0.984 - (-0.467)| = 0.517.$$

$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = 0.517 > 0.01$ . Оскільки потрібна точність ще не досягнута, знаходимо наступне наближення.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.934 - 0.05 \cdot (-0.984) = 0.993, \\ x_2^{(2)} = 1.84 + 0.04 \cdot 0.993 - 0.12 \cdot (-0.984) = 1.998, \\ x_3^{(2)} = -0.467 + 0.133 \cdot 0.993 - 0.333 \cdot 1.998 = -1.000. \end{cases}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.036; \quad |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.064; \quad |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.016.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0.064 > 0.01$$

І знову потрібна точність не досягнута.

Знаходимо третє наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0.75 + 0.1 \cdot 1.998 - 0.05 \cdot (-1.000) = 0.9998 = 1.000, \\ x_2^{(3)} = 1.84 + 0.04 \cdot 1.000 - 0.12 \cdot (-1.000) = 2.000, \\ x_3^{(3)} = -0.467 + 0.133 \cdot 1.000 - 0.333 \cdot 2.000 = -1.000. \end{cases}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.007; \quad |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.002; \quad |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.000.$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0.007 < 0.01$$

Тепер потрібна точність досягнута. Таким чином, з точністю до 0,01  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ , що збігається з точним розв'язком.

Порівнюючи застосування різних методів для розв'язування наведеної в прикладах системи, можна сказати, що найкращим є метод Гаусса, а серед ітераційних методів більш ефективним є метод Зейделя, бо він дозволяє знайти розв'язок системи за меншу кількість ітерацій.



У випадку, коли область інтегрування має більш складну форму, її потрібно розбити на підобласті розглянутого виду і для обчислення інтеграла по кожній із них використати ту чи іншу кубатурну формулу.

Необхідно зазначити, що описаним шляхом звичайно отримуються кубатурні формули із великою кількістю вузлів, яка швидко зростає при переході до інтегралів більшої кратності. Тому є сенс використовувати квадратурні формули максимальної точності (з мінімальною кількістю вузлів, наприклад, формули Гаусса).

Загальна похибка наближених формул залежить від кількості вузлів інтегрування і гладкості підінтегральної функції.