ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ.

БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШАЯ ФУНКЦИИ

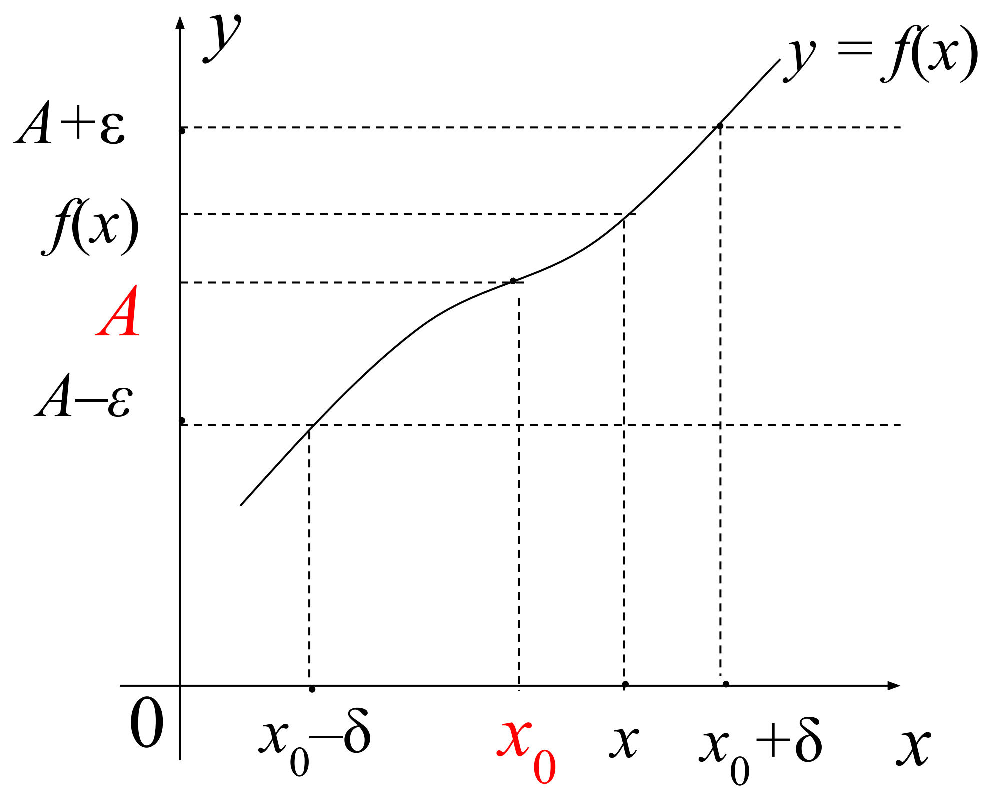
Определение 1:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Число *A* **называется пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнение условия $0 < |x - x_0| < \delta$ следует выполнение условия $|A - f(x)| < \varepsilon$. Причем x_0 – *предельное значение аргумента* и $x \neq x_0$. Предел обозначается:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрическая иллюстрация *определения предела функции при* $x \to x_0$



$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Определение 2:

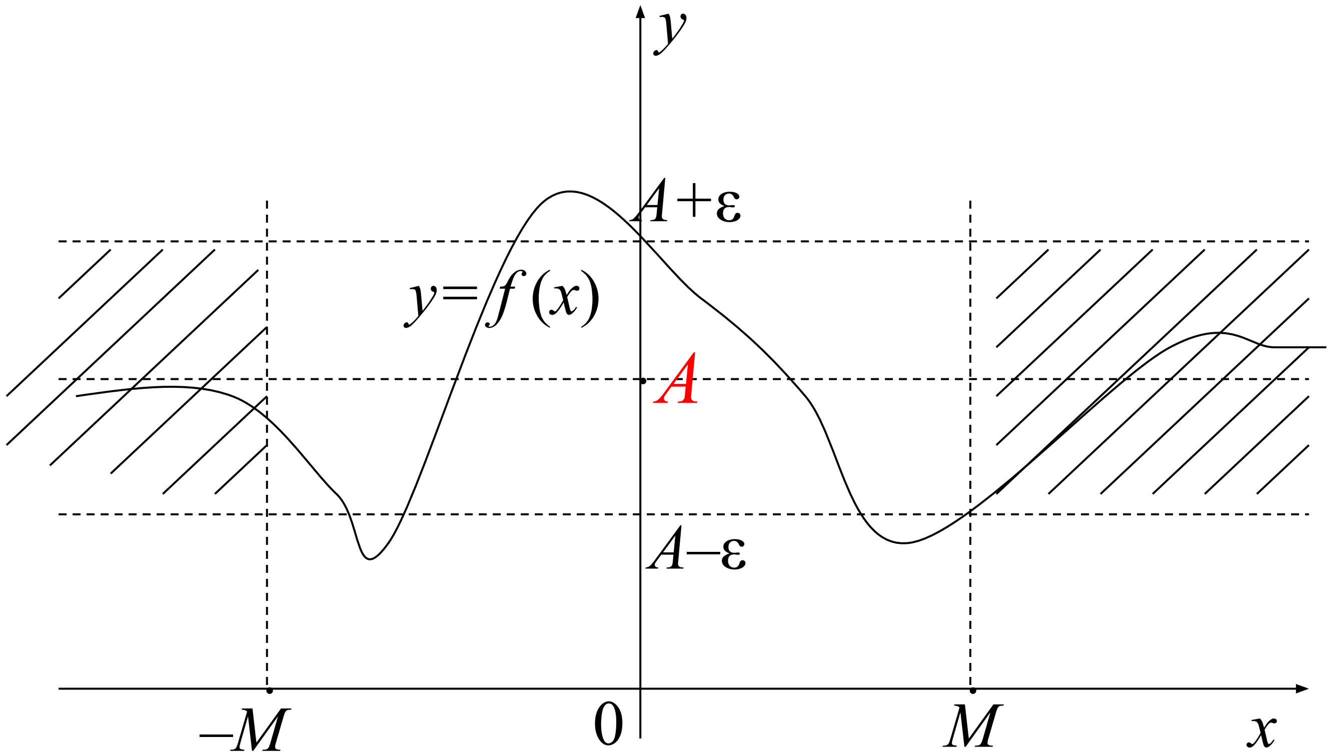
Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого достаточно малого ε > 0 существует такое $M > 0$, что всех $x > M$ выполняется условие: $\left|A - f(x)\right| < \varepsilon$.

Причем ∞ – *предельное значение аргумента*.

Предел обозначается:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Геометрическая иллюстрация *определения предела функции при* $x \to \infty$

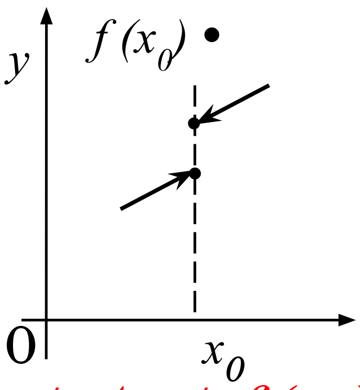


Односторонние пределы

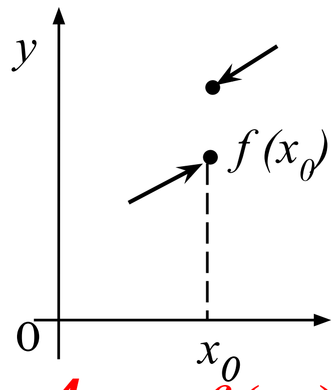
- Число A_1 называется ***левосторонним пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если предел берется при приближении x к x_0 слева. ***Левосторонний предел функции*** записывается в виде : $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

- Число A_2 называется ***правосторонним пределом*** функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если предел берется при приближении x к x_0 справа. ***Правосторонний предел функции*** записывается в виде : $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

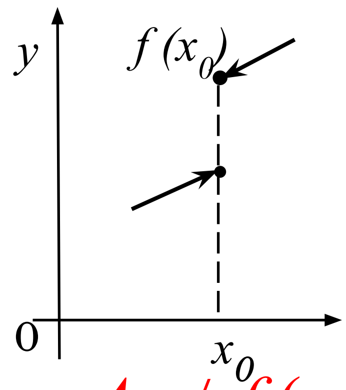
РАЗРЫВЫ ФУНКЦИЙ



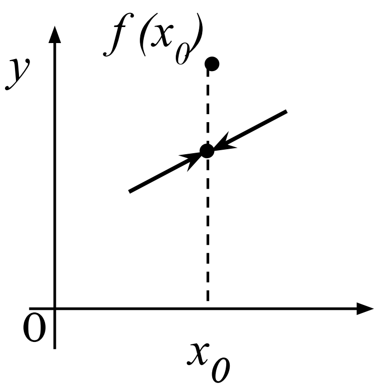
$A_1 \neq A_2 \neq f(x_0)$



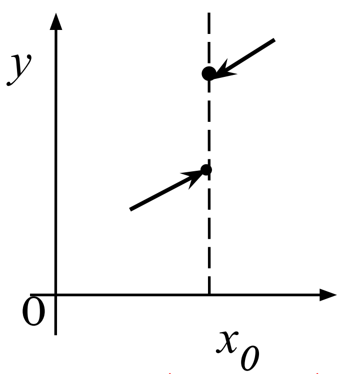
$A_1 = f(x_0) \neq A_2$



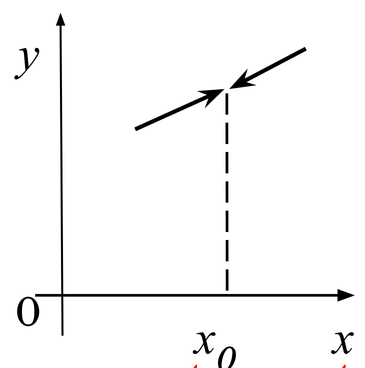
$A_1 \neq f(x_0) = A_2$



$A_1 = A_2 \neq f(x_0)$



$A_1 \neq A_2$



$A_1 = A_2$

Функция не определена в точке x_0

Теорема (существования предела)

- Для того, чтобы функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имела пределом число A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Бесконечно малая функция (БМФ)

Определение.
Функция $\alpha = \alpha\,(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечно малой функцией, если выполняется условие:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

Свойства БМФ

1. Сумма конечного числа БМФ при $x \to x_0$ является БМФ.
2. Произведение двух БМФ при $x \to x_0$ является БМФ.
3. Произведение БМФ на ограниченную функцию при $x \to x_0$ является БМФ.
4. Частное от деления БМФ на ограниченную функцию при $x \to x_0$ является БМФ.

Сравнение БМФ

Определение 1. Две БМФ $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$, если выполняется условие:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Определение 2. Если для двух БМФ $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$

выполняется условие: $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = c,$$

где $c \neq 0$, $c \neq 1$, $c \neq \infty$, то говорят, что эти БМФ имеют *одинаковый порядок малости.*

Определение 3. Если для двух БМФ $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$

выполняется условие: $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0,$$ то говорят, что $\alpha_1(x)$

имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha_2(x)$.

Бесконечно большая функция (ББФ)

Определение.
Функция β = β (x) при $x \to x_0$ называется бесконечно большой функцией, если выполняется условие:

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$$

Свойства БМФ

1. Сумма конечного числа ББФ при $x \to x_0$ является ББФ.
2. Произведение двух ББФ при $x \to x_0$ является ББФ.
3. Произведение ББФ на ограниченную функцию при $x \to x_0$ является ББФ.
4. Частное от деления ББФ на ограниченную функцию при $x \to x_0$ является ББФ.

Связь ББФ и БМФ

- Если α = α (x) – БМФ при $x \to x_0$, то:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$$

- Если β = β (x) – ББФ при $x \to x_0$, то:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\beta(x)} = 0$$

Таблица простейших пределов.
В правом столбце - символические равенства.

	В форме пределов	В сокращенной форме (часто употребляемой)
$c \neq 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{c}{x} = \infty$	$\frac{c}{0} = \infty$
$c \neq 0$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{c}{x} = 0$	$\frac{c}{\infty} = 0$
$c \neq 0$	$\lim\limits_{x\to \infty} cx = \infty$	$c \cdot \infty = \infty$
$c \neq 0$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{c} = \infty$	$\frac{\infty}{c} = \infty$
$\alpha < 1$	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$	$a^{-\infty} = +\infty$
$\alpha < 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$	$a^{+\infty} = 0$
$\alpha > 1$	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$	$a^{-\infty} = 0$
$\alpha > 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$	$a^{+\infty} = +\infty$
$\alpha > 1$	$\lim\limits_{x\to +0} \log_a x = -\infty$	$\log_a 0 = -\infty$
$\alpha > 1$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$	$\log_a(+\infty) = +\infty$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Всякая функция $y=f(x)$ при $x\to x_0$ может иметь не более одного предела.

Теорема 2 (*правила предельного перехода*). Если две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют пределы при $x\to x_0$, то справедливы равенства:

$$1)\ \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x);$$

$$2)\ \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x);$$

$$3)\ \lim_{x\to x_0}\left[\tilde{n}\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim_{x\to x_0}f(x);\quad 4)\ \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)};\quad 5)\ \lim_{x\to x_0}c=c;$$

$$6)\ \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)};\qquad 7)\ \lim_{x\to x_0}\ln f(x)=\ln\lim_{x\to x_0}f(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Замечательные пределы

- Первый замечательный:

(раскрывает неопределенность 0/0)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

- Второй замечательный:

(раскрывает неопределенность 1^{∞})

$$1)\ \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e=2,71\ldots;$$

$$2)\ \lim_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e=2,71\ldots.$$

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

Пусть x стремится к x_0 или к $\pm\infty$

Если $f(x)$ стремится	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$ стремится	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x)+g(x)$ стремится	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\infty-\infty$

Если $f(x)$ стремится	a	$a\neq 0$	∞	0
$g(x)$ стремится	b	$+\infty$	∞	∞
$f(x)\cdot g(x)$ стремится	$a\cdot b$	$+\infty$	∞	$0\cdot\infty$

Если $f(x)$ стремится	a	∞	$a\neq 0$	a	0	∞
$g(x)$ стремится	$b\neq 0$	$b\neq 0$	$-\infty$	∞	0	∞
$f(x)/g(x)$ стремится	a/b	∞	0	0	$0/0$	∞/∞

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

1. Используя правило предельного перехода вычисляем предел функции, подставляя в нее предельное значение аргумента.
2. Если в результате вычислений получаем 0, ∞ или действительное число, то записываем ответ.
3. Если в результате вычислений имеем неопределенности:

$$0/0\ ,\ \infty\ /\ \infty\ ,\infty\ -\ \infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\quad 1^{\infty}\ ,\ 0^{\infty},\ \infty^{0},$$

то для их раскрытия используем искусственные приемы или правило Лопиталя.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1) Если находим предел дробного выражения, в числителе и знаменателе которого многочлен и имеем неопределенность 0 / 0, то для раскрытия данной неопределенности:

а) числитель и знаменатель дроби разлагаем на множители;

б) сокращаем на критический множитель;

в) вычисляем предел.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

2) Если находим предел дробно-иррационального выражения и имеем неопределенность 0 / 0, то для раскрытия данной неопределенности:

а) умножаем числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение;

б) применяем формулу разности квадратов (или суммы и разности кубов);

в) сокращаем на критический множитель;

г) вычисляем предел.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

3) Если находим предел дробного выражения в числители и знаменателе которого могут встречаться тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные, логарифмические функции и имеем неопределенность 0 / 0, то для раскрытия данной неопределенности:

а) воспользуемся таблицей эквивалентных БМФ;

б) сокращаем на критический множитель;

в) вычисляем предел.

Таблица эквивалентных БМФ при $\alpha(x)\to 0$

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 4) $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

5) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$; 6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$; 8) $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

4. Если находим предел дробно-рационального и дробно-иррационального выражения и имеем неопределенность ∞ / ∞, то для раскрытия данной неопределенности:

а) в числителе и знаменателе дроби выносим переменную в наибольшей степени за скобку.

б) сокращаем на критический множитель;

в) вычисляем предел.

Замечание. Иначе раскрывать неопределенность данного вида можно, используя формулу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_m}{b_n}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

Здесь $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – рациональные (многочлены) или иррациональные выражения старших степеней m и n.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

5. Если находим предел алгебраического выражения и имеем неопределенность $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$, то для раскрытия данной неопределенности:

   а) преобразуем алгебраическое выражение так, чтобы иметь неопределенности $0 / 0$ или ∞ / ∞.

   б) раскрываем данные неопределенности (смотри: п. 1, п. 3, п. 4);

   в) вычисляем предел.

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

6. Если находим предел алгебраического выражения и имеем неопределенность 1^{∞}, то для раскрытия данной неопределенности:

а) используем одну из формул второго замечательного предела:

$$1)\ \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=e=2,71\ldots;$$

$$2)\ \lim_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e=2,71.$$

б) вычисляем предел.

Замечание. Если при вычислении пределов имеем a^{∞}, где $a>0$, $a\neq 1$ – действительное число, то целесообразно воспользоваться формулой:

$$a^{\infty}=\begin{cases}\infty, & 1<a<\infty;\\ 0, & 0<a<1.\end{cases}$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

7. Если находим предел алгебраического выражения и имеем неопределенность $1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$, то для раскрытия данных неопределенностей:

   а) используем прием логарифмирования;

   б) сводим к неопределенностям 0 / 0, ∞ / ∞;

   в) применяем правило Лопиталя;

   г) вычисляем предел.

- ***Замечание.*** При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left[u(x)\right]^{v(x)}$,

где $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = e,$ возможны варианты:

1. если $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[u(x)\right]^{v(x)} = 0$;

2. если $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = \infty,$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[u(x)\right]^{v(x)} = \infty$.

Спасибо за внимание!! =)