ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ.

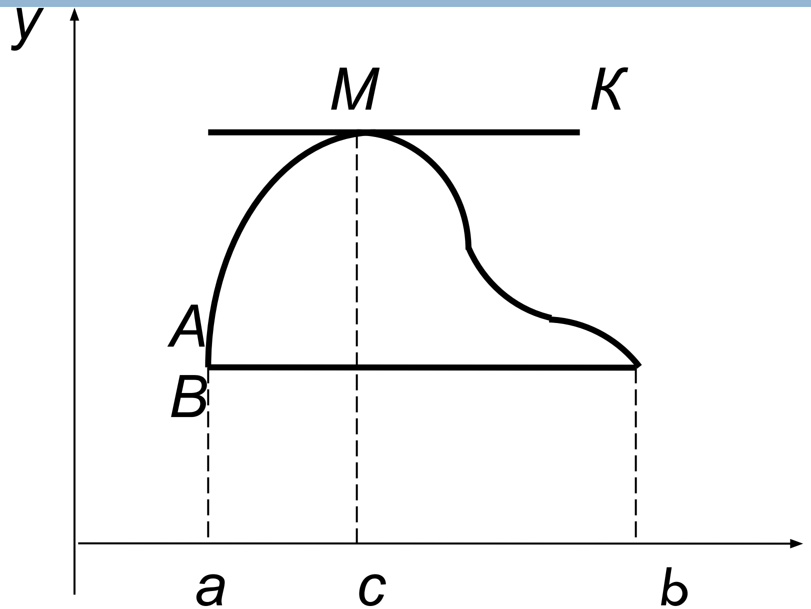
Правило Лопиталя

Основные теоремы о среднем

- **Теорема (Ролля):** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Замечание. С геометрической точки зрения теорема Ролля означает, что на графике функции найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси OX.

Теорема Роля



$f(a) = f(b), \quad a < c < b$

$f'(c) = 0$

Основные теоремы о среднем

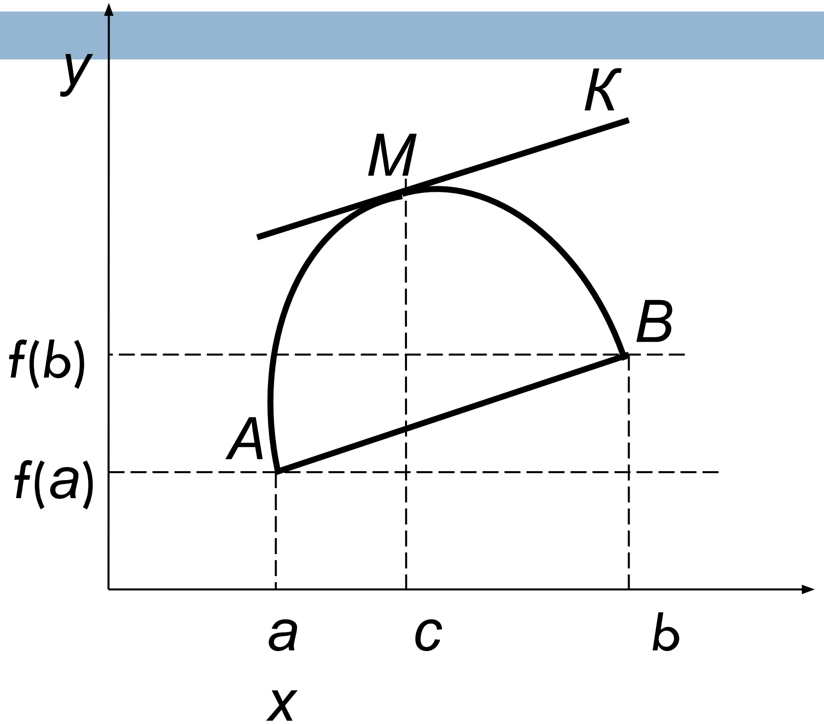
- **Теорема (Лагранжа):** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то существует по крайней мере хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что выполняется равенство $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$.

  Замечание. С геометрической точки зрения, теорема Лагранжа означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $M(c; f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна хорде AB, стягивающей концы графика функции на отрезке $[a; b]$.

  Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

  Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Теорема Лагранжа



$$f(a) \neq f(b), \qquad a < c < b$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Основные теоремы о среднем

- **Теорема (Коши).** Если функции $f(x)$ и $\phi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Правило Лопиталя

- Пусть функции $f(x)$ и $\phi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке или в ∞, при этом $\phi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если отношение производных этих функций имеет предел при $x \to x_0$, то отношение самих функций также имеет предел при $x \to x_0$, равный пределу отношения их производных, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Замечания:

1) Правило Лопиталя раскрывает неопределенности 0/0 и ∞/∞.
2) Если при применении правило Лопиталя не дает результата, то следует применять данное правило еще раз (иногда приходится его применять несколько раз).
3) Если имеем неопределенности ∞ - ∞ или 0 · ∞, то с помощью алгебраических операций сводим данные неопределенности к 0/0 или ∞/∞, а после опять применяем правило Лопиталя.
4) Если имеем неопределенности $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$, то прежде, чем применять правило Лопиталя необходимо исходное выражение прологарифмировать.

Спасибо за внимание