Лекция 10. Дифференциал, его геометрический смысл. Производные высших порядков, формула Лейбница, дифференциалы высших порядков.

Пусть задана функция $y = f(x)$ на (a,b). Точка $x_0 \in (a,b)$. Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение Δx, тогда функция получает соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Δy будем так же называть **полным** приращением функции, соответствующим приращению Δx.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если полное приращение представимо в следующем виде:

$$\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где: $P = const$, $\alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0.$

Пример

Исследовать на дифференцируемость в точке x_0 функцию $f(x) = 4x^2 - x + 8.$

Решение

$D(f) = R.$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$

$$= 4(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) + 8 - 4x_0{}^2 + x_0 - 8 =$$

$$= 4x_0{}^2 + 8x_0\Delta x + 4\Delta x^2 - x_0 - \Delta x - 4x_0{}^2 + x_0 =$$

$$= (8x_0 - 1)\Delta x + 4\Delta x\Delta x.$$

$\alpha(\Delta x) = 4\Delta x,\ P = 8x_0 - 1 = f'(x_0).$

Следовательно, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

<u>Определение 2.</u> Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если она в этой точке имеет производную $f'(x_0)$.

<u>Теорема</u> (о равносильности двух определений дифференцируемой функции)

Определения 1 и 2 равносильны. Иными словами, функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда <u>полное</u> приращение Δy, соответствующее приращению Δx аргумента x в точке x_0 представимо в виде:

$$\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где: $P = const$, $\alpha(\Delta x) \to 0$.

$\Delta x \to 0$

Доказательство

Необходимость. Дано: $f'(x)$. Надо доказать:

$$\Delta y = P\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где: $P = const$, $\alpha(\Delta x) \to 0.$
$\Delta x \to 0$

Пусть существует $f'(x_0)$ и мы знаем, что это есть:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где: $\alpha(\Delta x) \to 0.$
$\Delta x \to 0$

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \quad \text{где: } \alpha(\Delta x) \to 0.$$
$\Delta x \to 0$

А это и есть нужное представление, где $P = f'(x_0)$

Достаточность. Дано: $\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Надо доказать: существование $f'(x)$.

Пусть : $\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$,

где: $P = const$, $\alpha(\Delta x) \to 0$.
$\Delta x \to 0$

Разделим на Δx: $\Delta y / \Delta x = P + \alpha(\Delta x)$, где: $\alpha(\Delta x) \to 0$.
$\Delta x \to 0$

Таким образом, функция представима в виде константы и бесконечно малой величины, таким образом, по теореме об асимптотическом разложении): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = P$, а значит $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

существует $f'(x_0) = P$.

Исходя из предыдущего, можно сказать, что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если:

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_0)\cdot\Delta x}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}_{\mathrm{II}},\ \text{где: } \alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.\ \text{Ч.т.д.}$$

Первое слагаемое правой части I называется главной частью полного приращения Δy, оно содержит главную информацию о полном приращении. Второе слагаемое II мало влияет на Δy.

Определение 3. Главная часть полного приращения функции Δy линейная относительно приращения аргумента Δx (а именно: $f'(x_0)\cdot\Delta x$) называется дифференциалом этой функции в точке x_0.

Обозначается $dy = df(x_0)$.

Таким образом, $dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$ – переменная величина: различным Δx соответствуют различные значения дифференциала dy.

<u>Определение 4.</u> Дифференциалом аргумента x в точке x_0 называется его приращение Δx, т.е. по определению $dx = \Delta x$.

Это определение оправдывается следующим. Рассмотрим функцию $f(x) = x$.
Дифференциал ее:

$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т. е.: $dy = dx = \Delta x$.

Действительно $dx = \Delta x$.

Перефразируем формулу для дифференциала следующим образом:

$$dy = f'(x_0) \cdot dx,$$

где x_0 - произвольная точка.

Отсюда: $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow$ производная есть

отношение таких дифференциалов.
Тем самым оправдывается определение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$.

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(uv) = vdu + udv$;
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$;
4. $dc = 0 \quad (c = const)$;
5. $d(cu) = cdu \ (c = const)$ – свойство однородности

Доказательство

1. $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx =$
$= du \pm dv$;

Доказательство (продолжение)

$$2.\ d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = \\ = v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + udv;$$

$$3.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right)dx =$$

$$= \frac{v(u'dx) - u(v'dx)}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2};$$

$$4.\ dc = c'dx = 0;$$

$$5.\ d(cu) = (cu)'dx = (c'u + u'c)dx = \\ = u(c'dx) + c(u'dx) = cdu.$$

Механический смысл дифференциала

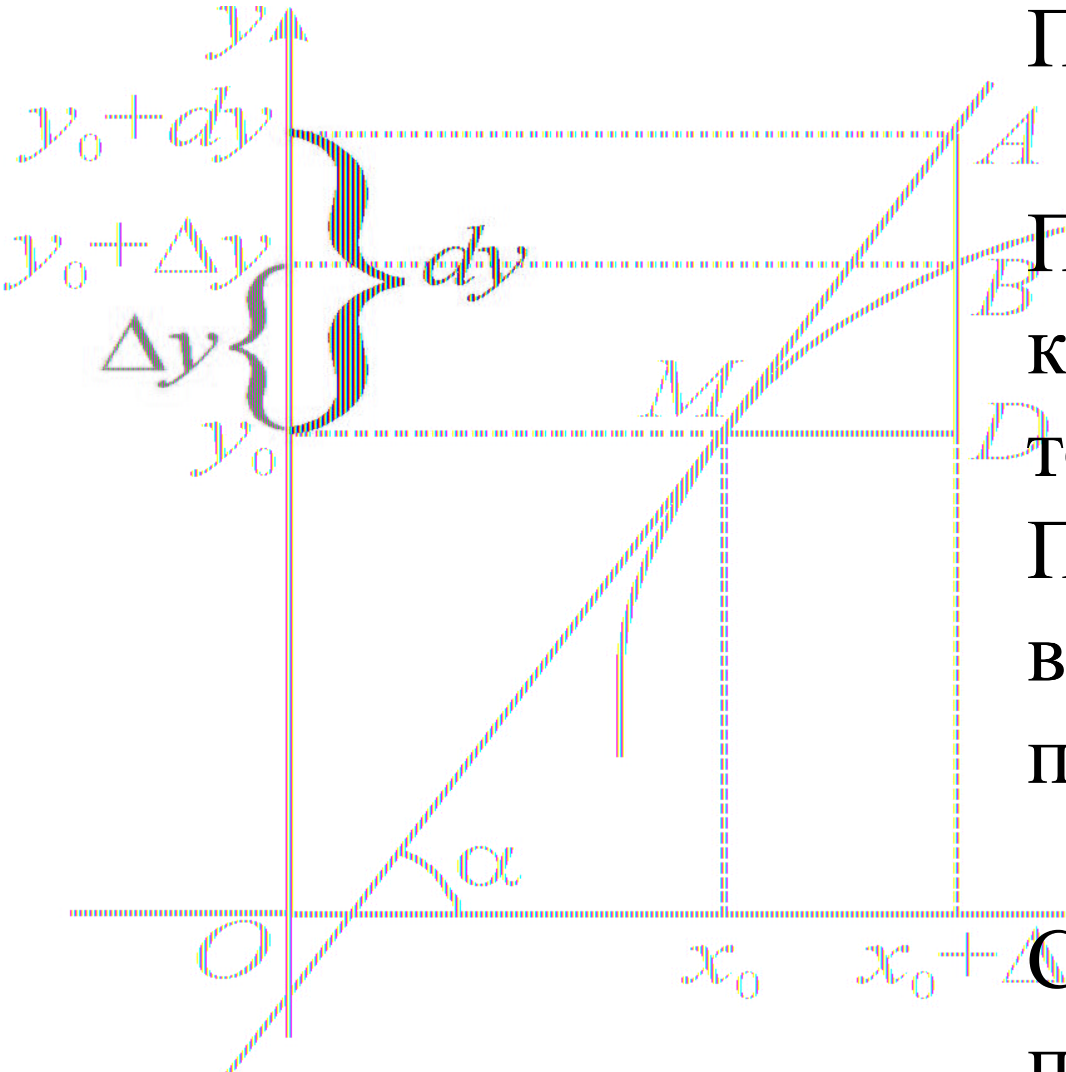
Возвращаемся к задаче о вычислении скорости. Пусть материальная точка совершает прямолинейное, вообще говоря неравномерное движение по закону: $s = f(t)$, где s – путь, пройденный за время t. Дифференциал функции:

$$ds = df(t_0) = f'(t_0)dt,$$

где $f'(t_0)$ – мгновенная скорость в момент времени t_0.

Таким образом, **механический смысл дифференциала** заключается в следующем: ds – путь, который прошла бы точка за промежуток времени dt, если бы она двигалась равномерно со скоростью $f'(t_0)$, которую она имела в начале пути.

Геометрический смысл дифференциала



Пусть дана функция

$$y = f(x).$$

Проведем касательную к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение

$$\Delta x = MD.$$

Соответствующее приращение получит

$$\Delta y = DB.$$

Дифференциал:

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)dx = \mathrm{tg}\alpha \cdot dx =$$
$$= (AD/MD) \cdot MD = AD.$$

Следовательно, геометрический смысл дифференциала dy есть приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx.

В отличие от дифференциала, Δy есть приращение ординаты самой кривой $y = f(x)$.

Инвариантность формы дифференциала

(Инвариантность – неизменность).

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Ее дифференциал

$$dy = f'(x) \cdot dx, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная.

Оказывается, что эта формула остается прежней, когда x – зависимая переменная, т.е.

$$x = \phi(t).$$

В этом свойство инвариантности формулы (1).

Действительно, имеем: $y = f(\phi(t))$, считаем $\phi(t)$ дифференцируемой по t. Тогда существует производная $y_t' = y_x' \cdot x_t'$. Тогда можно вычислить дифференциал, исходя из аргумента t по «t»:

$$dy = y_t' dt = y_x' \cdot (x_t' \cdot dt) = y_x' \cdot dx = f'(x) \cdot dx. \qquad \text{ч.т.д.}$$

Замечание. Форма дифференциала

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

свойством инвариантности в отличие от формы

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

не обладает, так как у Δx и dx полное приращение функции $x = \phi(t)$, вообще говоря не совпадает.

Применение дифференциала при приближенных вычислениях

Как известно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее полное приращение представимо в виде:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где: } \alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0.$$

Или $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где: $\alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$.

Причем, dy является главной частью приращения Δy. Поэтому:

$$\Delta y \approx dy.$$

Это равенство тем точнее, чем меньше приращение аргумента Δx. Тогда:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \text{ или}$$
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Это основная формула является основной для приближенных вычислений значений функции с помощью дифференциала. Она тем точнее, чем ближе точка x находится к точке x_0.

Особенно часто эта формула используется когда $x_0 = 0$. В этом случае она принимает следующий вид:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$$

Она служит источником многих приближенных формул, если вместо $f(x)$ рассматривать конкретные функции.

Примеры

№ 1

$f(x) = (1 + x)^{\mu}.$

$x_0 = 0,$

Найдем:

$f(0) = (1 + 0)^{\mu} = 1,$

$f'(x) = \mu(1 + x)^{\mu\text{-}1},$

$f'(0) = \mu(1 + 0)^{\mu\text{-}1} = \mu,$

Тогда:

$(1 + x)^{\mu} \approx 1 + \mu x.$

Для $x \to 0.$

№ 2

$f(x) = \ln(1 + x).$

$x_0 = 0,$

Найдем:

$f(0) = \ln(1 + 0) = 0,$

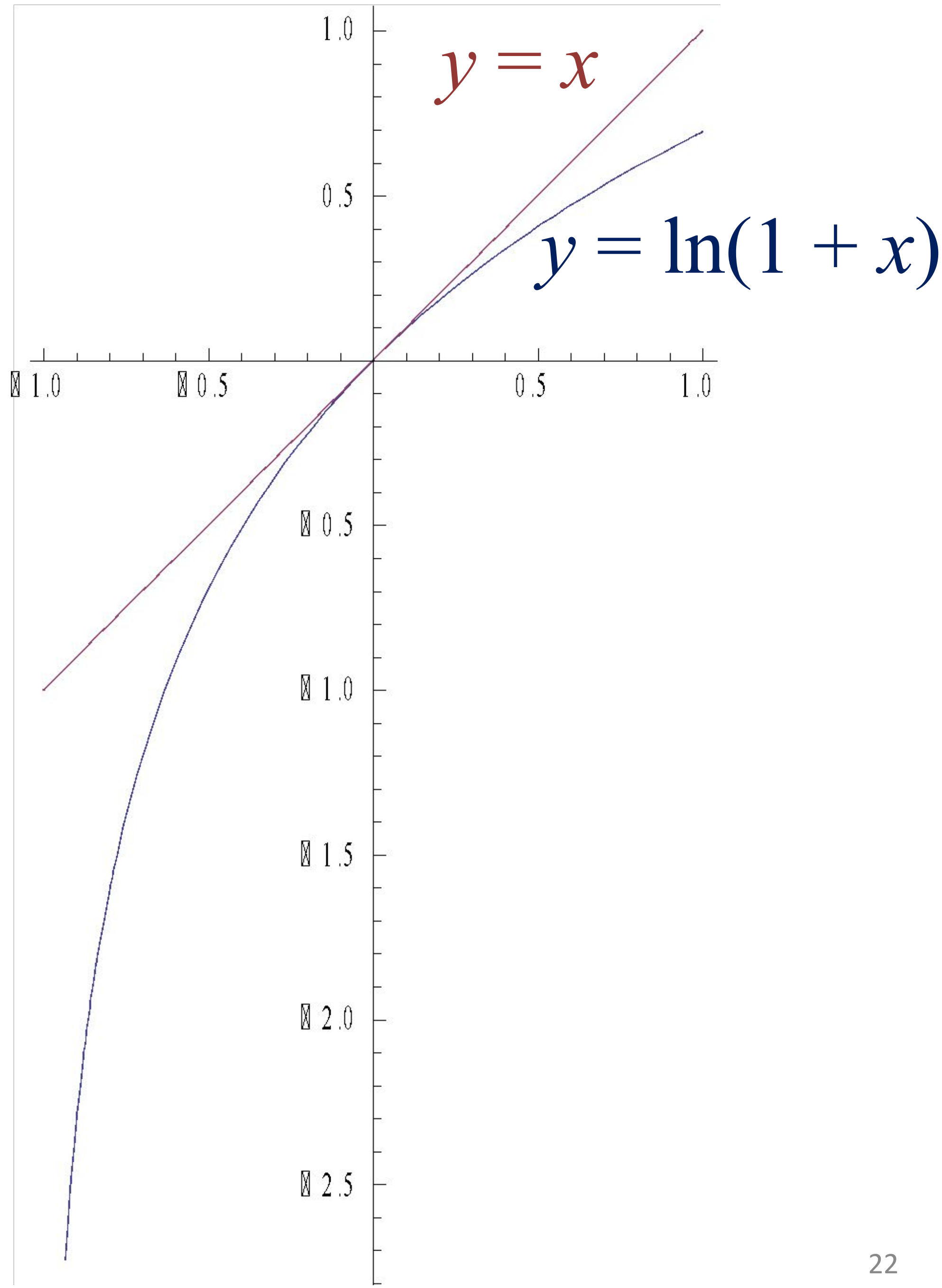
$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1,$$

Тогда:

$\ln(1 + x) \approx x.$

Для $x \to 0.$



№ 3

$f(x) = e^x.$

$x_0 = 0,$

Найдем:

$f(0) = e^0 = 1,$

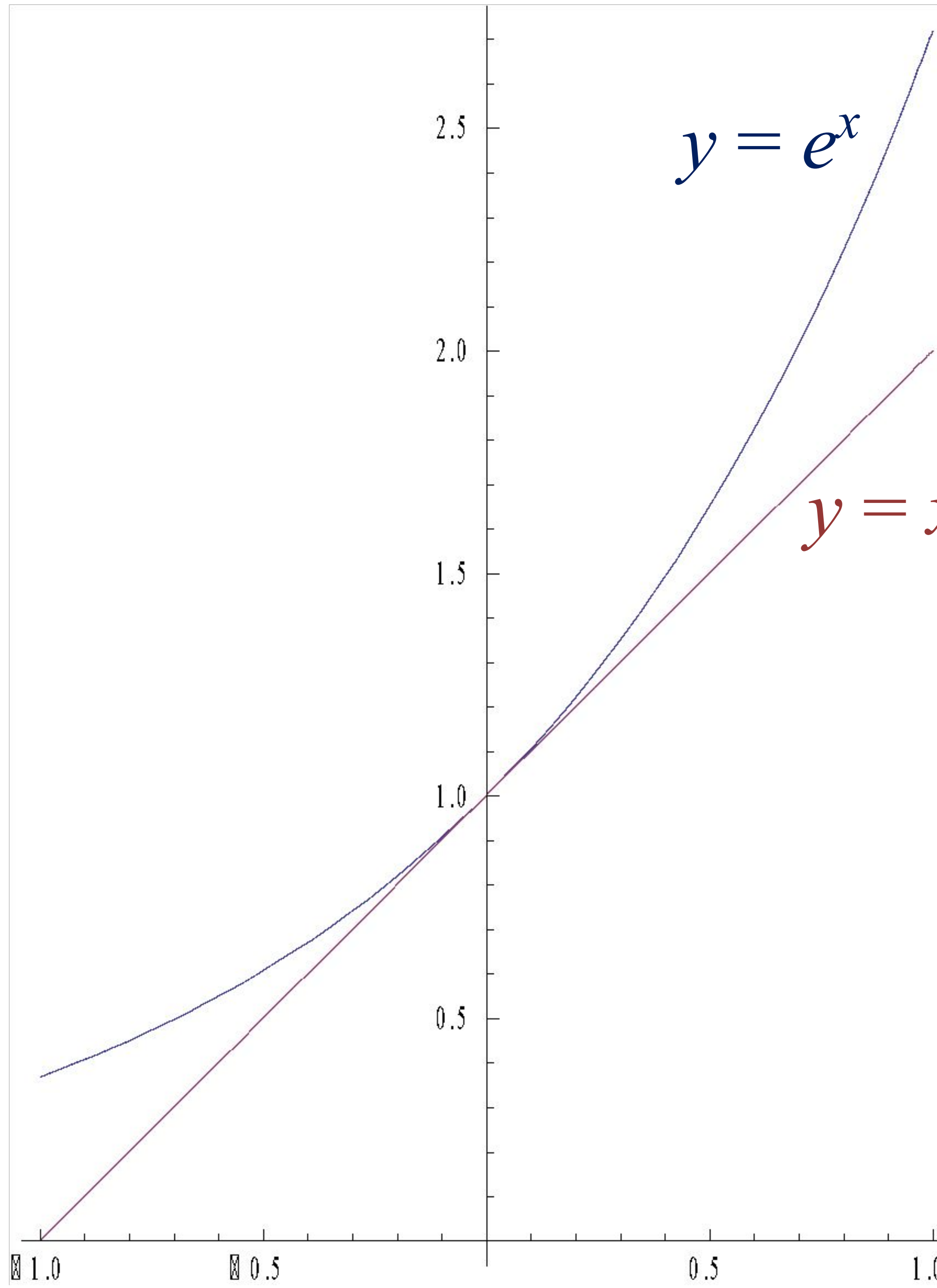
$f'(x) = e^x,$

$f'(0) = e^0 = 1,$

Тогда:

$e^x \approx 1 + x.$

Для $x \to 0.$



№ 4

$f(x) = \sin x.$

$x_0 = 0,$

Найдем:

$f(0) = \sin 0 = 0,$

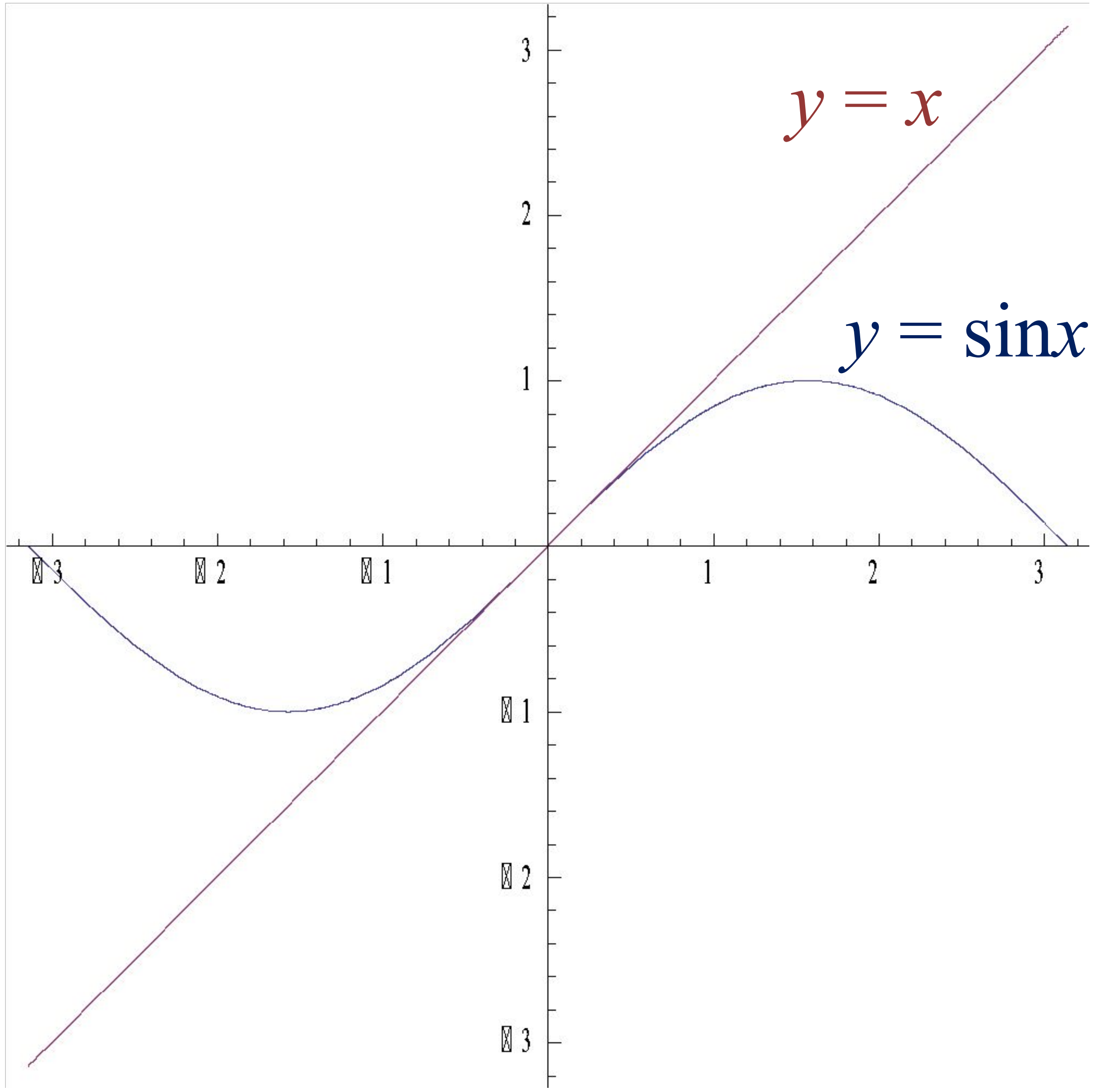
$f'(x) = \cos x,$

$f'(0) = \cos 0 = 1,$

Тогда:

$\sin x \approx x.$

Для $x \to 0.$



Пример

Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{17}$.

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} =$$

$$4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 4\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right) = \frac{33}{8}$$

Таблица дифференциалов

Она получается из таблицы производных по формуле:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Каждая строчка таблицы производных дает соответствующую строчку таблицы дифференциалов.

Пример

$$dx^{\mu} = \mu x^{\mu-1}dx,$$

$$d\sin x = \cos x dx.$$

Производные высших порядков

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) производную $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, т.е. существует $[f'(x)]'$ в точке x_0. Эта производная называется второй производной функции f в точке x_0 или производной второго порядка.

Обозначения: $f''(x_0) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$

Пусть вторая производная $f''(x)$ определена на всем интервале $(a,\ b)$, т.е. это функция. Может случиться, что эта функция $f''(x)$ вновь дифференцируема в точке $x_0 \in (a,\ b)$, тогда $[f''(x)]'$ называется производной третьего порядка.

Обозначения: $f'''(x_0) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3 y}{dx^3}$

Пусть на интервале (a, b) определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ при $n \in N$. Если существует ее производная в точке $x_0 \in (a, b)$, тогда $[f^{(n-1)}(x)]'$ называется производной n-го порядка функции f в данной точке.

Обозначения: $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Механический смысл второй производной

Путь $s = f(t)$

$f'(t)$ – мгновенная скорость $= v$.

Возьмем момент времени t_0 и зададим приращение Δt. Тогда скорость получит приращение

$$\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0) = f'(t_0 + \Delta t) - f'(t_0).$$

Рассмотрим отношение

$$w_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

это есть среднее ускорение за промежуток времени Δt. А его предел:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0) = f''(t_0)$$

называется **мгновенное ускорение движения**, т.е. скорость изменения скорости.

Дифференциалы высших порядков

Пусть задан дифференциал

$$dy = f'(x)dx.$$

В частности, он является функцией x. Может случиться, что эта функция вновь дифференцируема и можно вычислить ее дифференциал. Полагаем по определению:

$$d^2y = d(dy).$$

Вычислим:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx =$$
$$= dx(f'(x))'dx = f''(x)dx^2.$$

Дифференциал $dx = const$.

Таким образом, получаем формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Отсюда:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично получаем: $d^3y = d(d^2y)$.

И вообще: $d^ny = d(d^{n-1}y)$, то есть:

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \ .$$