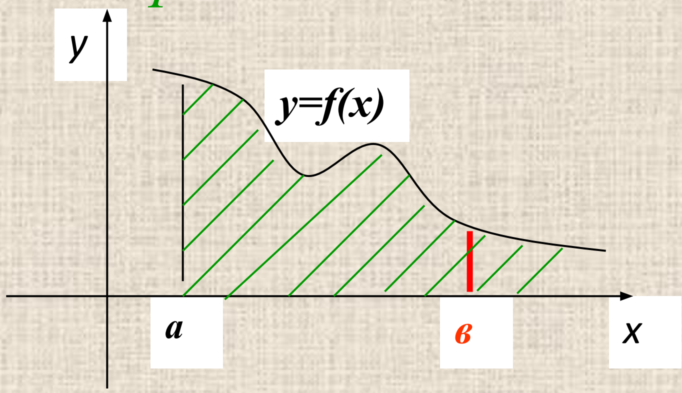
Лекция 7

Несобственные интегралы

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (I рода)

- Пусть промежутком интегрирования является луч $[a;+\infty)$, а функция *y=f(x)* интегрируема на каждом конечном отрезке [a,b].

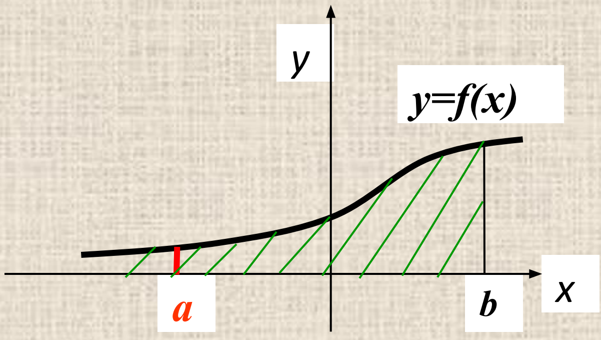
Геометрически задача состоит в нахождении площади под кривой.



$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

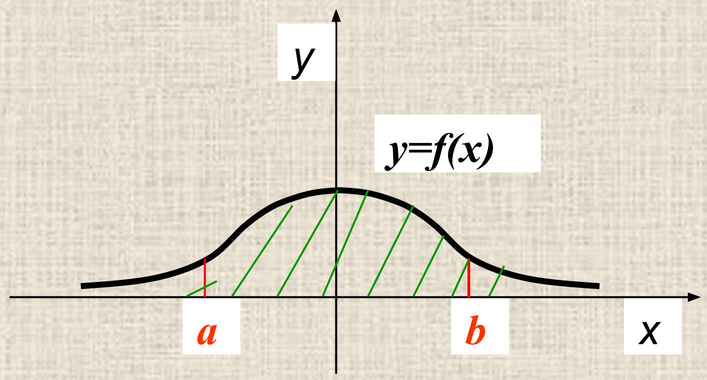
Возьмем точку в, найдем площадь криволинейной трапеции через определенный интеграл и устремим в к ∞.

- Промежуток интегрирования – луч $(-\infty; в]$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

- Промежуток интегрирования: $(-\infty; +\infty)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Примеры

- $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ ln\,x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(ln\,b-ln1)=+\infty$$

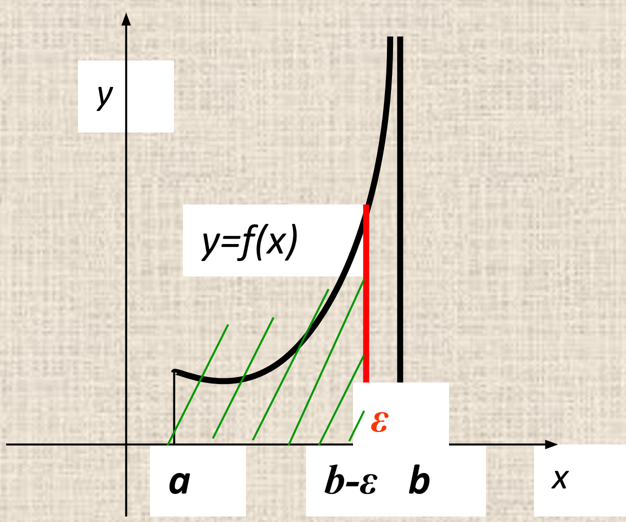
- $$\int_{-\infty}^1\frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^1=\lim_{a\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{a}\right)=-1$$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

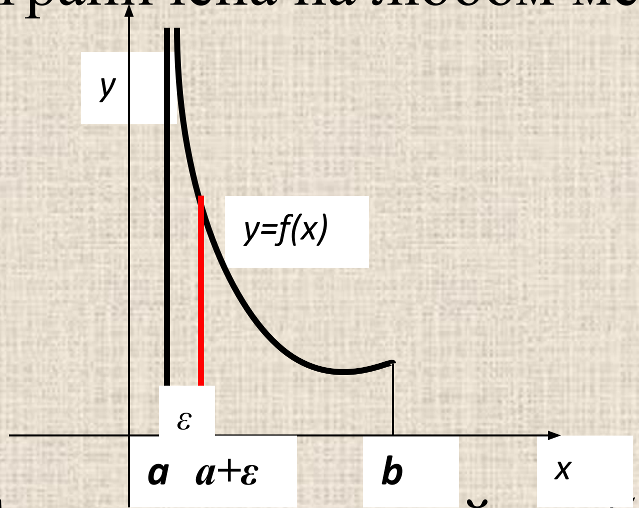
Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода)

- Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке $[a;в)$. В точке *в* функция не ограничена, но $\forall\varepsilon > 0$ ограничена в отрезке $[a;b-\varepsilon]$ (точку *в* назовем тогда особой точкой).



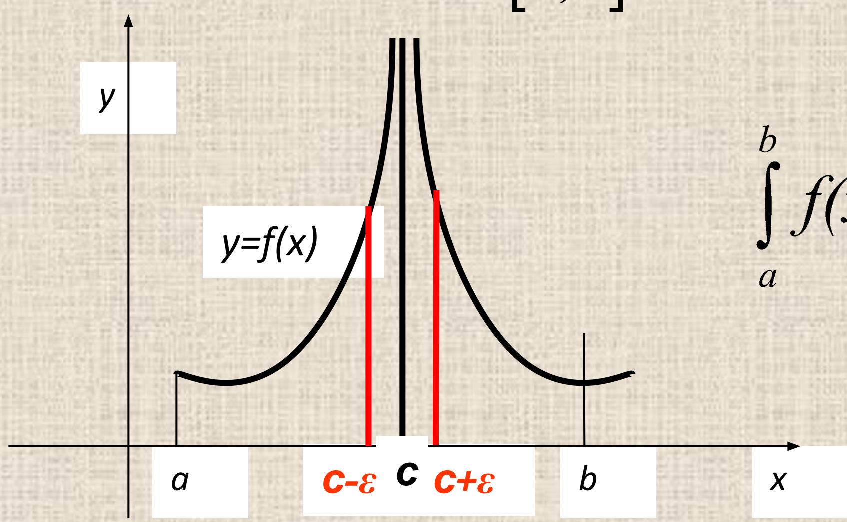
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

- если a – особая точка, функция не ограничена в точке a, но ограничена на любом меньшем отрезке $[a+\varepsilon;b]$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

- Если единственной особой точкой на отрезке $[a,b]$ является точка $c \in [a,в]$, то полагают



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$