Лекция 8

Функции многих переменных

Понятие функции многих переменных

$x_1, x_2, ..., x_n \in R$ - набор *n* действительных чисел

$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - *n*-мерная точка (вектор)

R^n- *n*-мерное множество

- Если *каждой точке* $x(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ ставится в соответствие *единственное число* $y \in I$, то говорят, что задана числовая функция *n* переменных:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

- область определения

$D \in R^n$ - множество значений функции

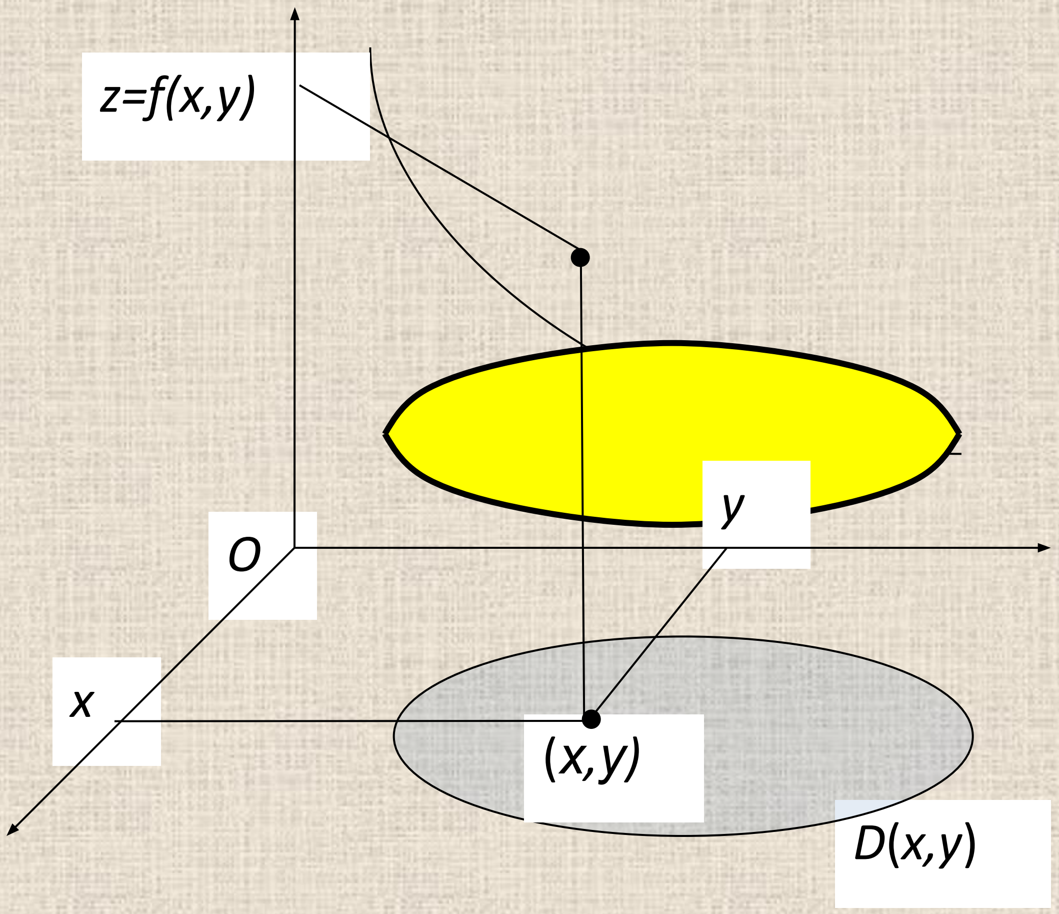
$I \in R$

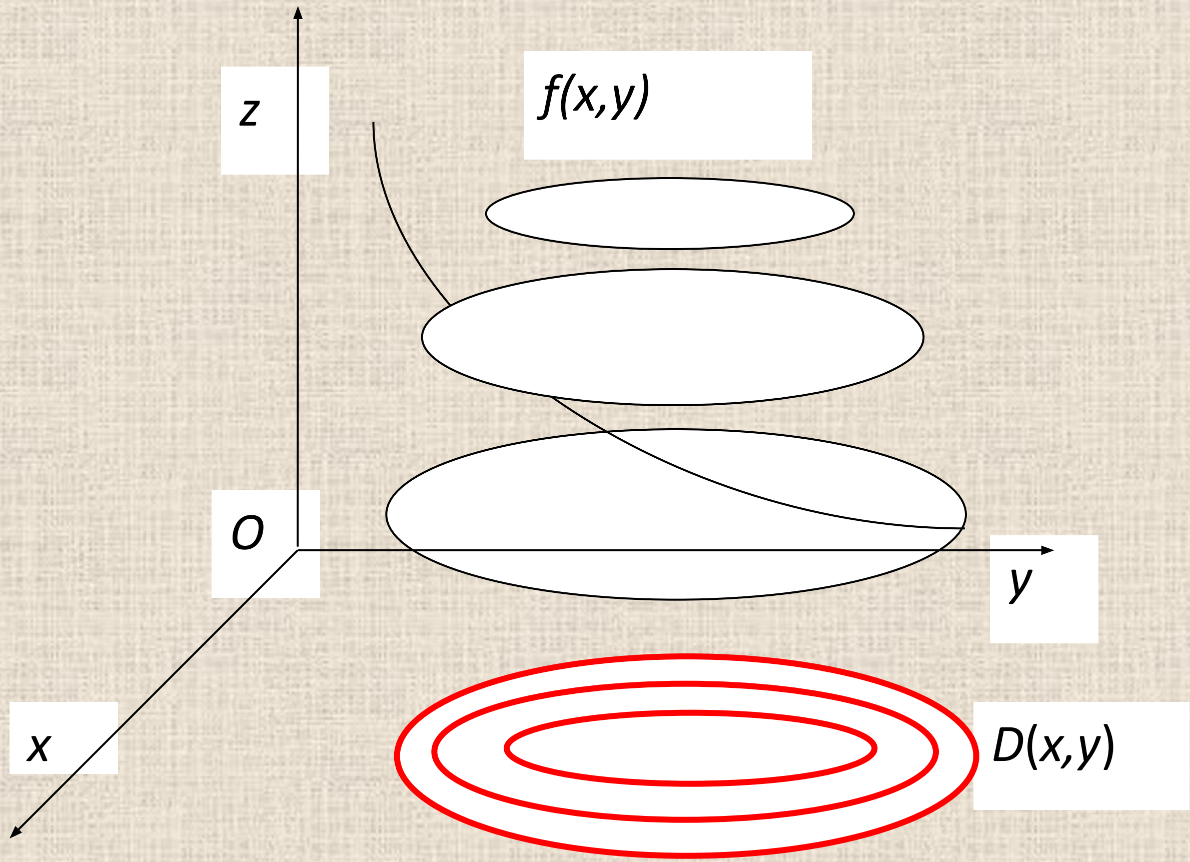
- **Графиком** функции *n* переменных называется *n*-мерная гиперповерхность в пространстве R^{n+1}, каждая точка которой задается координатами

$$(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n))$$

- *z=f(x,y)* – совокупность точек *(x,y,z)*,

$$(x, y) \in D(z), \quad z = f(x, y)$$


z=f(x,y)
O
y
x
(x,y)
D(x,y)



- **Линия уровня** функции $z=f(x,y)$ - множество точек плоскости *XOY*, являющихся проекцией сечения графика функции плоскостью, параллельной *XOY*.
- Уравнение линии уровня: $\boldsymbol{f(x,y)=C}$

пример

Построить график функции двух переменных

$$z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$D(z) = \left\{R^2 \setminus (1;1)\right\}$$

;

Линия уровня: f(x,y)=c

;

При c=1: $\frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 1$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

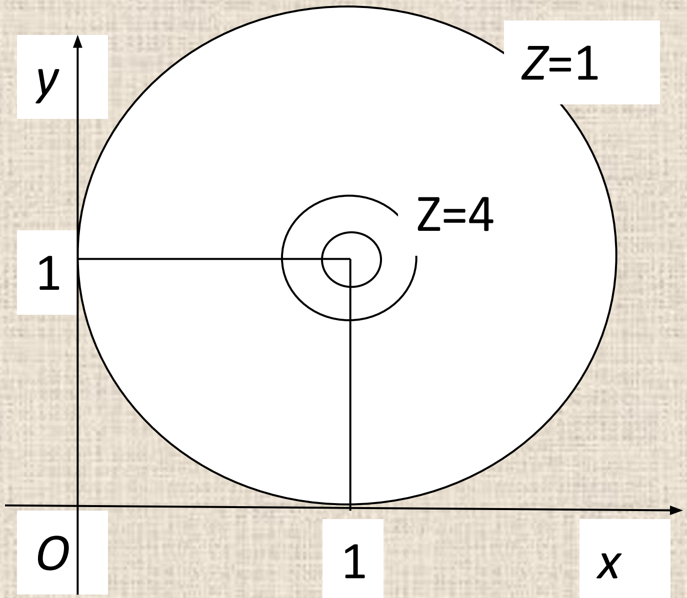
;

.

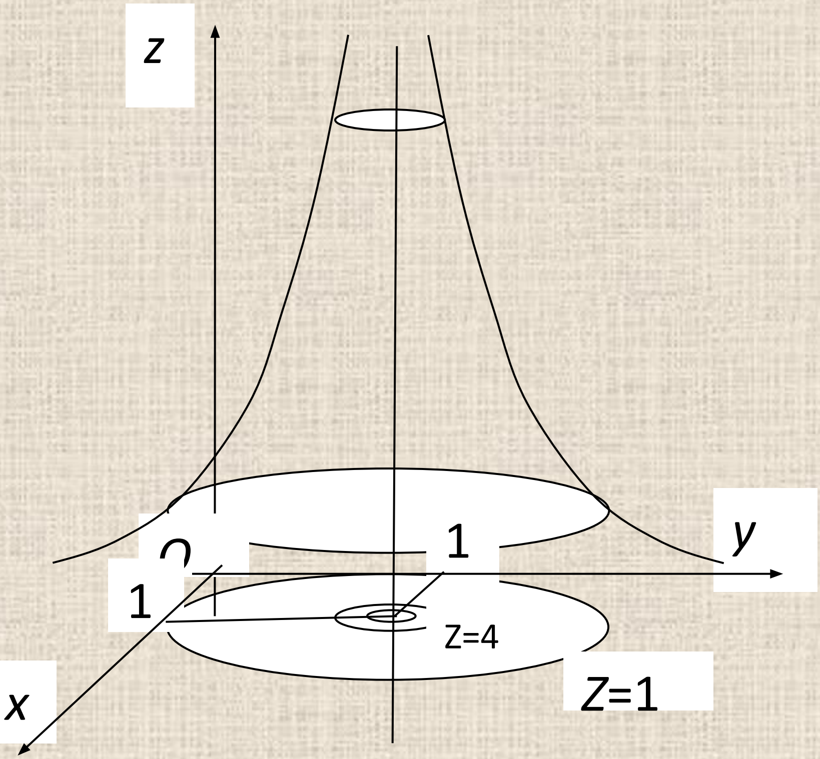
При c=4: $\frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$

.

При c=9: $\frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 9$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{9}$



y
Z=1
Z=4
1
O
1
x



z
O
1
y
1
Z=4
x
Z=1

Предел функции многих переменных

- . Число A называется **пределом** функции двух переменных $z=f(x,y)$ при $x \to x_0, \quad y \to y_0$
и обозначается $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A,$$
если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое, что если точка (x,y) удалена от точки (x_0,y_0) на расстояние меньше δ, то величины $f(x,y)$ и A отличаются меньше чем на ε.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(\frac{x^2 + 4y}{2xy - 1} \right) = 3$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \frac{(x-y)(x+y)}{(x+2)(x-y)} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \frac{x+y}{x+2} = 1$$

Непрерывность функции многих переменных

- Если функция $z=f(x,y)$ определена в точке (x_0,y_0) и имеет в этой точке предел, равный значению функции $$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$
то она называется непрерывной в данной точке.

Частные производные функции многих переменных

- Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$.

  Положим $y=y_0$, получим функцию одной переменной x.

  Пусть она имеет производную в точке (x_0, y_0):

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- **частная производная** по переменной x.

$$z'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ - частное приращение по переменной x.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$$