ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

- 1. Похідна функції
- 2 Правила диференціювання
- 3. Диференціал функції
- 4.Похідні та диференціали вищих порядків
- 5. Застосування похідної
-

1. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку X і точка $x_0 \in X$. Надамо аргументу функції приросту Δx ($\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$) такого, щоб точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція дістане при цьому приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Означення Відношення приросту функції до приросту аргументу називається ***середньою швидкістю зміни функції*** (rate of change of function).

Це відношення показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

Означення Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її ***похідною*** (derivative) і позначається одним із символів:

$$f'(x_0),\quad y'(x_0),\quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 існує, то функція називається ***диференційовною*** (differentiable function) *в точці* x_0.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого проміжку X, то вона називається ***диференційовною*** *на проміжку* X.

Операція відшукання похідної називається ***диференціюванням***.

Геометричний зміст похідної (geometric sense of derivative)

Похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту *дотичної* (tangent line) до графіка даної функції у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0)=tg\,\alpha, \qquad (2)$$

де α -кут, якій утворює дотична τ з додатнім напрямком осі Ox (рис. 1).

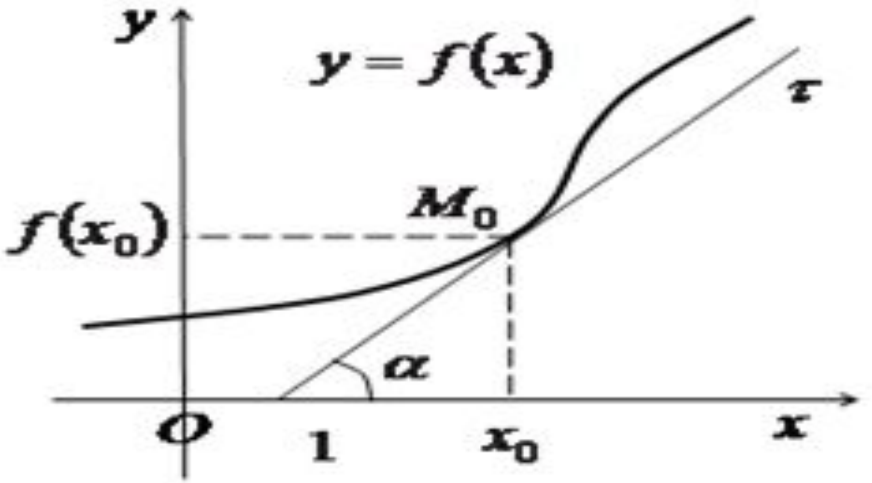

Рис. 1

Зв'язок між диференційовністю функції та її неперервністю

Теорема Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в точці $x=x_0$, то вона неперервна в цій точці.

На основі геометрічного змісту похідної ***рівняння дотичної до графіка функції*** $y = f(x)$ записується таким чином:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Якщо неперервна функція в точці x_0 має нескінченну похідну, тоді дотичною до графіка функції в точці $M_0(x_0; y_0)$ буде пряма $x = x_0$.

Для ***нормалі***, тобто прямої, що проходить через точку дотику $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно до дотичної (пряма M_0N), рівняння має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

У випадку $f'(x_0) = 0$ нормаллю буде пряма $x = x_0$; якщо функція в точці x_0 має нескінченну похідну, тоді нормаллю до кривої буде пряма $y = f(x_0)$.

Фізичний зміст похідної

Під фізичним змістом похідної розуміють швидкість зміни функції в даній точці. Наприклад:

1) при русі тіла швидкість v в даний момент часу t є похідною від шляху $s(t)$: $v = \frac{ds}{dt}$;

2) при обертовому русі твердого тіла навколо осі $0x$ кутова швидкість ω в даний момент часу t є похідною від кута повороту $\phi(t)$: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$;

3) при охолодженні тіла швидкість охолодження в момент часу t є похідною від температури $\frac{dT}{dt}$;

4) теплоємність C для даної температури t є похідною від кількості тепла Q: $C = \frac{dQ}{dt}$;

5) при нагріванні стержня коефіцієнт лінійного розширення α при даному значенні температури t є похідною від довжини l: $\alpha = \frac{dl}{dt}$.

2. **Правила диференціювання** (Table of Derivative Rule)

Теорема Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці x, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1) $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ - (Sum Rule);

2) $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$ - (Product Rule);

3) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{(v(x))^2}$, при $v(x)\neq 0$ - (Quotient Rule).

Зауваження. Сталий множник при диференціюванні виноситься за знак похідної (ConstantMultiple Rule), тобто:

$(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$, де $c = const$.

Похідна складної функції (Chain Rule)

Нехай функція $y = f(u)$ визначена в деякому околі точки u і функція $u = \varphi(x)$ визначена в деякому околі точки x, таким чином визначена складна функція $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці x, причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x), \qquad (3)$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (3^*)$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \cos^5 3x$.

Розв'язання. Приймаючи $y = u^5, \quad u = \cos 3x$, маємо:

$$y' = \left(u^5\right)' (\cos 3x)' = 5u^4 ((-\sin 3x) \cdot 3) = 5\cos^4 3x \cdot (-3\sin 3x) = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

Тут враховано, що $u = \cos 3x$ також складена функція і тому за формулою (3) вона має похідну $u' = -3\sin 3x$.

Похідна оберненої функції (derivative of inverse function)

Теорема Якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену $x = f^{-1}(y)$ і для всіх $x \in X$ існує похідна $f'(x) \neq 0$, то для всіх $y \in Y$ існує похідна $(f^{-1}(y))'$, причому справедлива рівність:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x},\ (y'_x \neq 0). \qquad (4)$$

Приклад . Знайти похідну функції, оберненої до функції $y = \sin x$.

Розв'язання. Функція $y = \sin x$ неперервна і монотонна на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Отже, на цьому проміжку існує обернена функція, яку позначають $x = \arcsin y$, $y \in [-1, 1]$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Нагадаємо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 3).

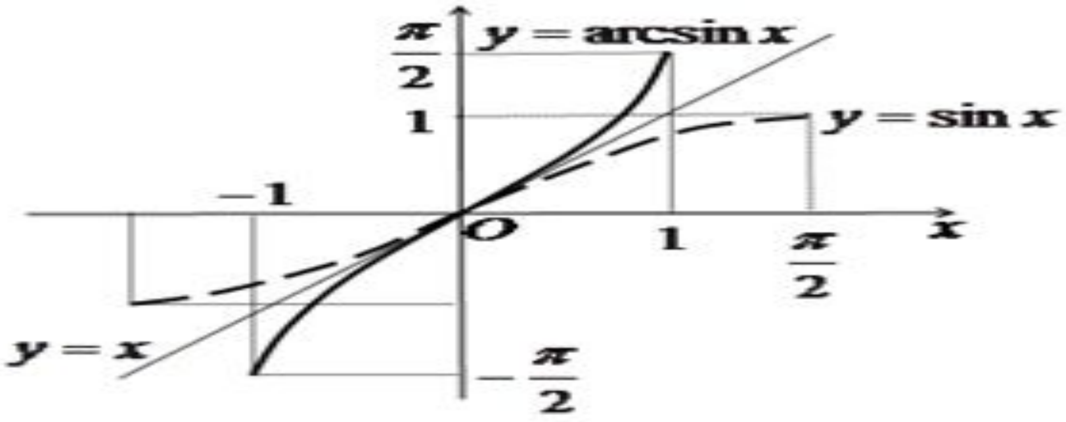

Рис. 3

Знаходимо похідну $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{\cos x}$. Оскільки аргументом оберненої функції є y, то виконаємо такі перетворення:

$$\cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2},$$

знак «+» взято, оскільки при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\cos x \geq 0$. Отже $x'_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ або

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Якщо аргументом є змінна x, то маємо формулу

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x|<1). \qquad (5)$$

Продовжуючи знаходити похідні базисних елементарних функцій з урахуванням означення похідної, її властивостей та правил диференціювання можна скласти наведену нижче таблицю.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

(Table of Derivative Formulas)

1) $(const)' = 0$;

2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, ($\forall n \in N$, або $\forall n \in R$ при $x > 0$);

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, ($\forall a > 0, a \neq 1$);

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, ($(\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0$);

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ($\forall x > 0$);

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$);

10) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad$ ($x \neq \pi k, \quad k \in Z$);

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad$ ($|x| < 1$);

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad$ ($|x| < 1$);

13) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$;

16) $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$;

17) $(\mathrm{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

18) $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $\quad$ ($x \neq 0$).

Логарифмічне диференціювання. Іноді відшукання похідної спрощується, якщо її попередньо прологарифмувати. В зв'язку з цим такий метод називається ***логарифмічним диференціюванням***.

Приклад Знайти похідну складної функції виду $y = u(x)^{v(x)}$.

Розв'язання. Логарифмуючи рівність дістанемо $\ln y = v(x)\cdot\ln u(x)$. Диференціюючи обидві частини останньої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot(\ln u(x))'$$,або $$\frac{1}{y}y' = v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

Виразивши з останньої рівності y' та підставивши $y = u(x)^{v(x)}$, отримаємо

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}u'(x)\right],$$

цю рівність можна переписати так

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\cdot\ln u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x), \qquad (6)$$

де $u(x)^{v(x)}\cdot\ln u(x)\cdot v'(x)$ - похідна від показникової функції,
$v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'$ - похідна від степеневої функції.

Приклад. Знайти похідну $y = x^{\sin x}$.

Розв'язання. Логарифмуючи рівність дістанемо:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності за змінною x, матимемо

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \quad \text{або} \quad \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x,$$

звідки

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right).$$

Крім диференціювання степенево-показникових функцій метод логарифмічного диференціювання доцільно застосовувати також у випадку, коли функція подана у вигляді добутку (частки) досить великої кількості функцій.

Приклад. Знайти похідну функції $y = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x$.

Розв'язання. Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = x^3 \ln e + 5\ln(\mathrm{ctg}\, x) + \ln(\arcsin x).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = (x^3)' + 5(\ln(\mathrm{ctg}\, x))' + (\ln(\arcsin x))',$$

або

$$\frac{1}{y} y' = 3x^2 + 5\frac{1}{\mathrm{ctg}\, x} \cdot \left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Звідки

$$y' = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x \left(3x^2 + \frac{5}{\sin x \cdot \cos x} \cdot + \frac{1}{\cdot \sqrt{1-x^2} \arcsin x}\right).$$

Приклад. Знайти похідну функції

$$y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}.$$

Розв'язання. Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = \ln\sqrt{x^2+3} - \ln(2x-1)^6 - \ln(3x+5)^2;$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) - 6\ln(2x-1) - 2\ln(3x+5).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = \frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+3\right)\right)' - 6(\ln(2x-1))' - 2(\ln(3x+5))',$$

або

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+3}2x - 6\frac{1}{2x-1}2 - 2\frac{1}{3x+5}3 = \frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5},$$

звідки

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}\left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{12}{2x-1} - \frac{6}{3x+5}\right).$$

Похідна функції, заданої неявно (implicit function derivative)

Якщо на деякому проміжку X диференційовна функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну $y'(x)$ можна знайти з рівняння

$$[F(x, y)]'_x = 0,$$

де $F(x, y)$ розглядається як складена функція змінної x.

***Приклад*.** Знайти похідну функції, заданої неявно

$$3y^2 + 2xy + \cos y = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо похідну за змінною x, пам'ятаючи, що $y(x)$ є функцією від x, тому $(y(x))' = y'$

$$3 \cdot 2y \cdot y' + 2(1 \cdot y + x \cdot y') + (-\sin y) \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно y', отримаємо:

$$y'(6y + 2x - \sin y) = -2y,$$

звідки

$$y' = \frac{2y}{\sin y - 6y - 2x}.$$

Похідна функції

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

яка задана параметрично, обчислюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{або} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

за умови, що $f(t),\ g(t)$ диференційовні в точці t функції, прічому $\frac{df}{dt} \neq 0$.

Приклад . Знайти в точці $t = \frac{\pi}{6}$ похідну y'_x функції, яка задана параметрично:

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосовуючи формулу обчислення похідної функції, яка задана параметрично, маємо:

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}.$$

Таким чином,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}; \quad y'_x = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}; \quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

3. Диференціал функції

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається головна (лінійна відносно Δx) частина приросту Δy диференційовної в точці x функції.

Диференціал дорівнює добутку похідної функції в точці x на приріст незалежної змінної, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Зокрема, диференціалом незалежної змінної є її приріст:

$$dx = 1 \cdot \Delta x,\ \ dx = \Delta x,$$

Тоді формула диференціала має вигляд

$$dy = f'(x)dx,$$

відкіля

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Основні властивості диференціала

Для довільних диференційованих функцій $u(x)$ **та** $v(x)$ **мають місце такі рівності:**

1. $d\alpha = 0,\ (\alpha = const)$;

2. $d(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 du + \alpha_2 dv,\ (\alpha_1, \alpha_2$ — довільні сталі$)$;

3. $d(uv) = udv + vdu$;

4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0$ **;**

5. $df(u) = f'(u)du,\ u = u(x)$.

Приклад Знайти диференціал функції $y = \sin x$.

Розв'язання. За формулою

$$dy = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x\, dx, \quad dy = \cos x\, dx.$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = x^2 + 4x + 8$.

Розв'язання. За формулою

$$dy = (x^2 + 4x + 8)' dx = (2x + 4) dx = 2(x + 2) dx.$$

Застосування диференціала до наближених обчислень

При малих Δx справедлива формула $\Delta y \approx dy$, тобто

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад. Обчисліти наближено за допомогою диференціала значення функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$ в точці $x = 1{,}97$.

Розв'язання. Найближча до 1,97 точка, в якій легко обчислити значення $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, — це точка $x_0 = 2$.

$$\Delta x = x - x_0 = 1{,}97 - 2 = -0{,}03;$$

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2^2 + 5} = 3;$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}, \quad f'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{3}.$$

За наведеною формулою маємо

$$f(1{,}97) \approx 3 + \frac{2}{3}(-0{,}03) = 2{,}98.$$

4.Похідні та диференціали вищих порядків

Похідною другого порядку (другою похідною функції) $y = f(x)$ у точці x називається похідна від її першої похідної $y' = f'(x)$ при умові, що $f'(x)$ диференційовна в точці x. Вона позначається такими символами:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ f''_{xx},\ f''_{x^2}.$$

Аналогічно визначається **похідна n-го порядку** функції $y = f(x)$, яка має $(n\text{-}1)$ похідну в точці x:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))',\ n \in N.$$

Похідну, для якої існує n-а похідна в точці x, називають n разів диференційовною в цій точці.

Основні формули обчислення похідних вищих порядків

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0,\, a \neq 1);$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$((ax+b)^{\alpha})^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n};$$

зокрема,

$$\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)}\,\frac{n!}{(x \pm a)^{n+1}};$$

$$(\log_a |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a};$$

$$(\ln |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Основні правила обчислення похідних

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ п разів диференційовні, тоді мають місце такі рівності:

1) $(a_1 u + a_2 v)^{(n)} = a_1 u^{(n)} + a_2 v^{(n)} \quad (a_1, a_2 - \text{сталі});$

2) $$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$ **(формула Лейбніца)**

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}, \; 0! = 1.$

Обчислення похідних вищих порядків функцій, заданих параметрично

Якщо функція задана параметрично рівняннями $x=(t)$, $y=y(t)$, тоді похідні $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},\ldots$ обчислюються за формулами:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t};\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t}$$ і т.д.

Для похідної другого порядку має місце формула:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2}=\frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t))^2}.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціалом другого порядку двічі диференційовної функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціала першого порядку функції $f(x)$, тобто $d^2y = d(dy)$. У випадку, коли x – незалежна змінна, диференціали обчислюються за формулами:

$$d^2y = y''(dx)^2,$$

$$d^3y = y'''(dx)^3,$$

$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Якщо ж x — деяка функція від t, $x = x(t)$, тоді

$$d^2y = y''(dx)^2 + y'_x d^2x,$$

$$d^3y = y'''(dx)^3 + 3y''_{xx} dx d^2x + y' d^3x$$ і т.д.

Якщо для функцій $u(x)$ та $v(x)$, x — незалежна змінна, існують диференціали d^nu та d^nv, тоді

$$d^n(a_1u + a_2v) = a_1d^nu + a_2d^nv$$ (a_1, a_2 — сталі),

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u d^kv.$$

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції $y = x\sqrt{x-3}$ в точці $x_0 = 12$.

Розв'язання. Згідно з формулою для обчислення диференціалу другого порядку $d^2y = y''(dx)^2$ обчислюється y'' :

$$y' = x'\sqrt{x-3} + x(\sqrt{x-3})' = \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-3}};$$

$$y'' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{x-2}{2\sqrt{(x-3)^3}}\right) = \frac{3(2(x-3)-x+2)}{4\sqrt{(x-3)^3}} = \frac{3(x-4)}{4\sqrt{(x-3)^3}}.$$

Тоді $y''(x_0) = y''(12) = \frac{3\cdot 8}{4\cdot 27} = \frac{2}{9}.$

Отже, $d^2y(x_0) = \frac{2}{9}(dx)^2.$

Приклад. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції, яка задана параметрічно рівняннями: $x = \ln t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

Розв'язання. За правилами диференціювання функції, заданої параметрично, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t}{1+t^2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

5. Застосування похідної

Правила Лопіталя розкриття невизначеностей (L'Hospital rule)

Теорема (I правило Лопіталя). Якщо:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $\varphi'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\ln(x-1)}$.

Розв'язання. Ми маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Функції $f(x)=x^3-8$ і $\varphi(x)=\ln(x-1)$ задовольняють умови теореми в деякому околі точки $a=2$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)'}{\left(\ln(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1/(x-1)}=12$$

.

Наслідок 1. Теорема Лопіталя справедлива також при $a=-\infty$, при $a=+\infty$ і при $a=\infty$.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{1/x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{1/x}}=2\cdot1\cdot1=2$$

.

Наслідок 2. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі вимоги, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то правило Лопіталя можна застосувати повторно. При цьому отримаємо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

І взагалі, правило Лопіталя при виконанні умов теореми можна застосовувати багаторазово.

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Дана границя дозволяє використовувати правило Лопіталя багаторазово, дійсно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(3.21)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(3.21)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Наслідок 3. Якщо в теоремі замінити умову 2) на наведену нижче

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, то правило Лопіталя також має місце.

В цьому випадку правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (ІІ правило Лопіталя).

Приклад. Якщо $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$,

тобто довільний додатний степінь x зростає швидше, ніж $\ln x$ при $x \to +\infty$.

Розв'язування. Дійсно, застосувавши ІІ правило Лопіталя, отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^{\alpha}} = 0.$$

Приклад. Якщо $n \in N$, $a > 1$ то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0,$$

тобто, при $x \to +\infty$ степенева функція x^n зростає повільніше, ніж показникова функція a^x, $a > 1$.

Розв'язування. Дійсно, застосувавши правило Лопіталя розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ n раз, отримаємо:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{a^x \ln a} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^x \cdot \ln^n a} = 0.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

- Дослідити функцію, задану аналітичним виразом $y=f(x)$, означає визначити такі її характеристики: область визначення; парність чи непарність; періодичність; монотонність; екстремуми; найбільше і найменше значення в заданому відрізку. Якщо є точки розриву функції, то необхідно дослідити її поведінку поблизу цих точок.
- Для графічного зображення функції необхідно додатково визначити: точки перетину графіка з осями координат; опуклість його; точки перегину; асимптоти.

Означення 1. Якщо кожному значенню x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є ***функція*** від x і записують $y = f(x)$.

Означення 2. Сукупність значень x, при яких функція y існує, називається ***областю визначення функції***.

Означення 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області, симетричній відносно початку координат. Тоді, якщо

$$f(x) = -f(x),$$

то функція називається ***непарною***, а при

$$f(x) = f(-x)$$

– ***парною***.

Означення 4. Функція називається ***періодичною***, якщо існує таке дійсне число $l \neq 0$, що, при будь-яких значеннях аргументу x із області визначення

$$f(x) = f(x + kl),$$

де k – ціле число, l – період.

Означення 5. Якщо для двох будь-яких різних значень аргументу x_1 і x_2 з області визначення із нерівності $x_1 < x_2$ виконуються нерівності:

$f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається ***зростаючою***,

$f(x_1) \le f(x_2)$, то – ***не спадною***,

$f(x_1) > f(x_2)$, то – ***спадною***,

$f(x_1) \ge f(x_2)$, то – ***не зростаючою***.

Зростаючі, спадні, не зростаючі, не спадні функції називаються ***монотонними***.

Означення 6. Функція $y = f(x)$ має ***локальний внутрішній максимум*** (мінімум) в точці $x = x_0$, якщо

1) $f(x)$ визначена в точці x_0 і її достатньо малому «δ-околі», тобто $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$;

2) всі значення функції з «δ-околу» менші (більші) ніж її значення в точці x_0, тобто $f(x) < f(x_0)$ $\left[f(x) > f(x_0)\right]$.

Геометричний зміст цього зрозумілий із рис.

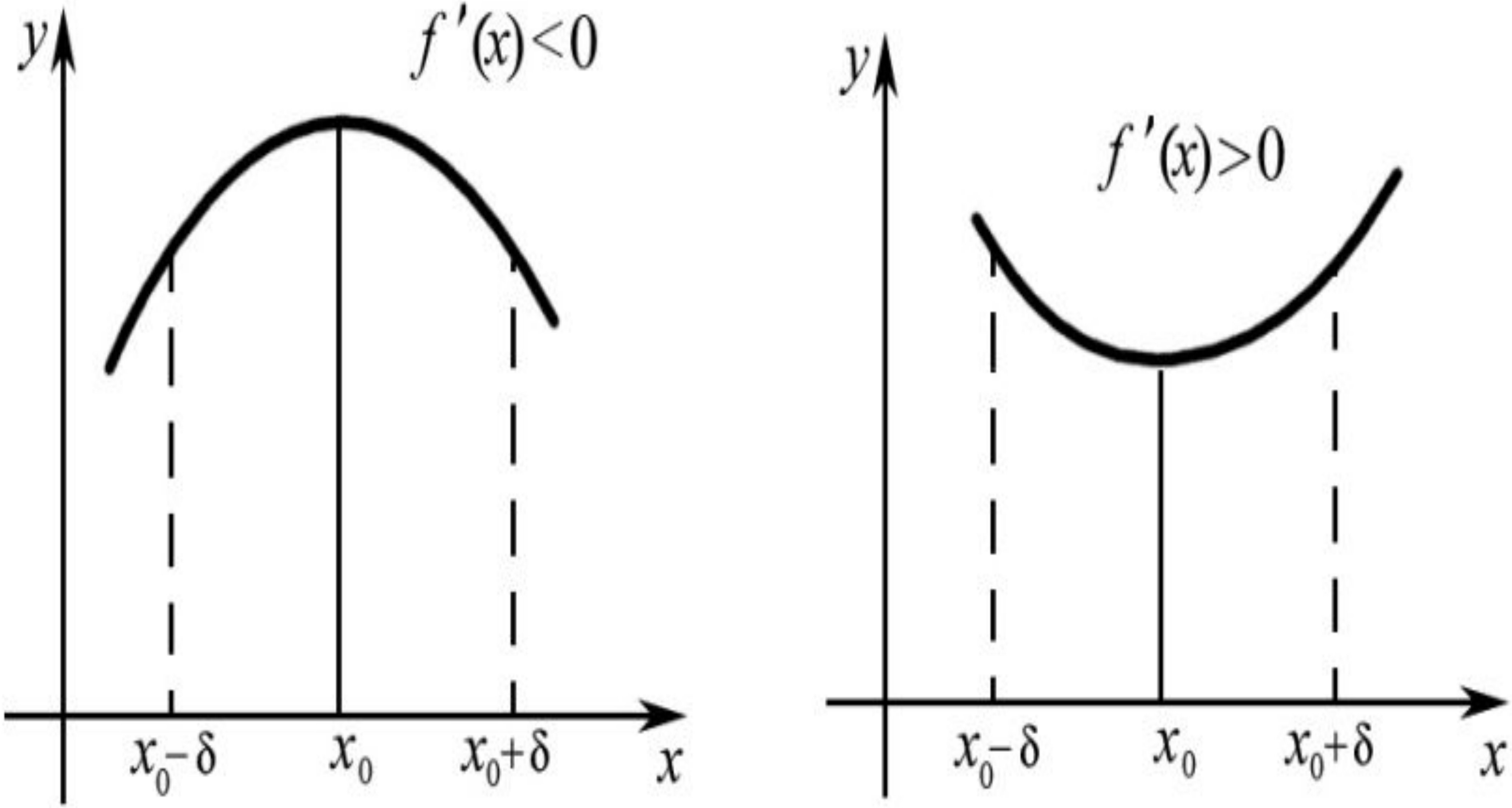

Рис.

Означення 7. Найбільший з максимумів і найменший з мінімумів називають ***найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку***.

Застосуємо диференціювання до визначення монотонності функцій.

Теорема (необхідні умови). Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ ***зростає*** (спадає), то $f'(x)\geq 0$ $[f'(x)\leq 0]$ для $\forall x\in(a;b)$.

Теорема (достатні умови). Якщо функція диференційована на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$ для $\forall x\in(a;b)$, то ця функція ***зростає*** (спадає) на інтервалі $(a;b)$.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, необхідно:

– знайти похідну даної функції;

– знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ і з умови $f'(x)=\infty$;

– розбити критичними точками область існування функції на інтервали;

– визначити знак похідної на кожному інтервалі; якщо похідна додатна – функція зростає, якщо від'ємна – функція спадає в цьому інтервалі.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо диференційована функція $y=f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0)=0$.

Теорема (достатня умова екстремуму). Якщо неперервна функція $y=f(x)$ диференційована в деякому «δ-околі» критичної точки x_0 і при переході через неї (зліва направо) похідна $f'(x)$ міняє знак з «+» на «-», то x_0 є точкою максимуму; якщо знак похідної змінюється з «–» на «+», то x_0 – точка мінімуму (див. рис. [illegible]).

Отже, щоб дослідити функцію на екстремум, необхідно:

– знайти критичні точки функції із рівняння $f'(x)=0$;

– вибрати серед них внутрішні точки області визначення;

– дослідити знак похідної $f'(x)$ зліва і справа від кожної критичної точки;

– виписати ті точки, де є екстремум;

– знайти значення функції в точках екстремуму.

Для дослідження на екстремум можна скористатись поняттям другої похідної $f''(x)$.

Теорема. Якщо в точці x_0 $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то при $f''(x_0)<0$ функція має в цій точці максимум, а при $f''(x_0)>0$ – мінімум.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку, треба:

– знайти критичні точки функції на відрізку $[a;b]$;

– обчислити значення функції в цих точках;

– обчислити значення функції $f(a)$ і $f(b)$;

– серед обчислених значень вказати найбільше $f_{\max}(x)$ і найменше $f_{\min}(x)$.

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонність.

Розв'язок.

Функція визначена при $(-\infty < x < +\infty)$.

Похідна функції $f'(x) = (x^3 - 3x - 4)' = 3x^2 - 3$.

Критичні точки: $f'(x) = 0$, $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

Розіб'ємо область існування на інтервали монотонності: $(-\infty < x < -1) \cup (-1 < x < 1) \cup (1 < x < +\infty)$.

Визначаємо знак похідної і поведінку функції:

1) $-\infty < x < -1$: $f'(x) > 0$ – функція зростає;

2) $-1 < x < 1$: $f'(x) < 0$ – функція спадає;

3) $1 < x < +\infty$: $f'(x) > 0$ – функція спадає.

Графічно:

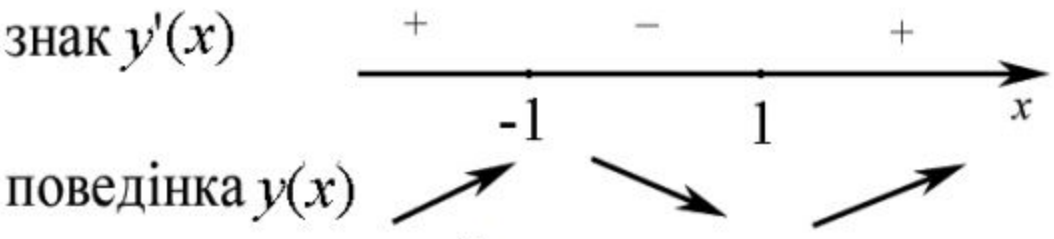

Рис.

Приклад. Знайти екстремуми функції $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x-3$.

Розв'язок.

Область визначення $-\infty<x<+\infty$.

Критичні точки: $f'(x)=0$, $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x-3\right)'=x^2-3x+2$,

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=1;2$.

Точок, де похідна не існує, немає.

За першою похідною:

знак $y'(x)$

поведінка $y(x)$

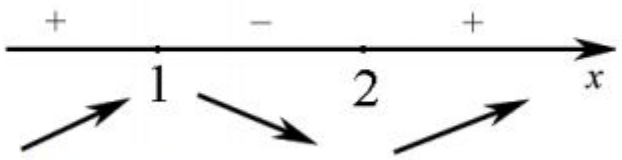

Рис.

Отже, точка $x=1$ є точкою максимуму, а точка $x=2$ є точкою мінімуму. Значення функції в цих точках: $f_{\max}=f(1)=-\dfrac{13}{6}$, $f_{\min}(x)=f(2)=-\dfrac{7}{3}$. За другою похідною: $f''(x)=2x-3$; $f''(1)=-1<0$; $f''(2)=1>0$. Отже, в точці $x=1$ функція дістає максимуму, а в точці $x=2$ – мінімуму.

Задача. Визначити розміри циліндричного бака об'єму V, при яких на його виготовлення піде найменше матеріалу.

Розв'язок. Нехай радіус основи бака r, а висота його h. Тоді повна поверхня бака $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Це функція двох змінних r і h. Виразимо $h = \frac{V}{\pi r^2}$, оскільки об'єм V заданий. Отже, $S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$ або $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

Знайдемо критичні точки:

$S'(r) = 0$, $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$, $2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0$, $2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Знайдемо знак другої похідної $S''(r) = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right) > 0$ на проміжку $(0;+\infty)$.

Отже в точці $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ функція $S(r)$ має мінімум.

Тоді висота $h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$.

Відповідь: Висота бака повинна бути вдвічі більшою радіуса основи, щоб на виготовлення бака об'єму V пішло найменше матеріалу.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на відрізку $[-2;1]$.

Розв'язок. Знайдемо критичні точки із рівняння $f'(x)=0$, $f'(x)=(3x^4+4x^3+1)'=12x^3+12x^2$, $12x^3+12x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$, $x_3=-1$.

Точки $x=-1$ і $x=0$ належать проміжку $[-2;1]$, тому знаходимо значення функції в цих точках $f(-1)=3-4+1=0$, а $f(0)=1$. Знайдемо значення функції на кінцях відрізку $f(-2)=48-32+1=17$, $f(1)=8$. Отже, серед цих значень найбільше $f_{\text{найб}}=f(-2)=17$, а найменше $f_{\text{найм}}=f(-1)=0$.

Опуклість кривих. Точки перегину

Означення 1. Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою на інтервалі***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 2. Крива $y = f(x)$ називається ***увігнутою на інтервалі***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище її дотичної на цьому інтервалі.

Означення 3. ***Точкою перегину*** називається точка кривої, яка відділяє опуклість від увігнутості.

Інтервали опуклості і увігнутості знаходять за допомогою теореми.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на $(a;b)$. Тоді:

– якщо $f''(x) < 0$, то крива опукла;

– якщо $f''(x) > 0$, то крива увігнута.

В точці перегину $f''(x) = 0$ або не існує $f''(x) = \infty$.

Теорема. Нехай x_0 – критична точка другого роду. Якщо при переході через неї $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ є точкою перегину кривої.

Отже, щоб знайти точки перегину, необхідно знайти критичні точки другого роду із рівняння $f''(x) = 0$ (або ∞) і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, увігнутості та точки перегину кривої

$$f(x) = x^5 - x + 2.$$

Розв'язок. Область визначення $-\infty < x < +\infty$. Так як $f''(x) = 20x^3$, то критична точка другого роду одна - $x = 0$. Розбиваємо область визначення на два інтервали $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ і досліджуємо знак другої похідної при переході через цю точку.

Інтервал $(-\infty;0)$ – $f''(x) < 0$, крива опукла; $(0;+\infty)$ – $f''(x) > 0$, крива увігнута, отже $M(0;2)$ є точкою перегину функції.

Асимптоти кривої

Означення. Пряма l називається ***асимптотою*** кривої, якщо відстань δ від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по прямій, віддаляється в нескінченність.

Розрізняють асимптоти вертикальні і невертикальні (горизонтальні і похилі).

Рівняння вертикальної асимптоти $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, тобто в точках розриву функції завжди є вертикальна асимптота.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y = kx + b,$$

де
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \; b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Рівняння горизонтальної асимптоти $y = b$.

План дослідження функції та побудова її графіка

1. Визначаємо область допустимих значень (ОДЗ).
2. Виявляємо, чи є функція парною або непарною, періодичною тощо.
3. Знаходимо точки екстремуму та інтервали монотонності.
4. Знаходимо точки перегину та інтервали опуклості.
5. Знаходимо рівняння асимптот графіка функції (якщо вони є).

Приклад. Дослідити функцію $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язок. 1. Функція не визначена в точках $x=-1$, $x=1$. Область її визначення складається з трьох інтервалів $(-\infty;-1)\cup(-1;+1)\cup(+1;+\infty)$, а графік – з трьох гілок.

2. Функція непарна, тому що $y(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x}{1-x^2}=-y(x)$. Отже, графік її симетричний відносно початку координат і для побудови достатньо побудувати його в частині $x\geq 0$.

3. Функція неперіодична.

4. Точки перетину графіка з осями координат: при $x=0$ $y=0$ графік перетинає осі координат в точці $O(0;0)$.

5. Прямі $x=1$ і $x=-1$ є вертикальними асимптотами. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0,\ k=0 \text{ і при } x\to+\infty \text{ і при } x\to-\infty;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1-x^2}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0.$$

Отже, $y=0$ (вісь Ox) є горизонтальною асимптотою і при $x\to+\infty$, і при $x\to-\infty$.

6. Дослідимо поведінку функції в точках розриву $x=-1$ і $x=1$ та при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1-\varepsilon}{1-(-1-\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1-\varepsilon}{1-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1-\varepsilon}{-2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon(2+\varepsilon)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1+\varepsilon}{1-(-1+\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1+\varepsilon}{1-(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1+\varepsilon}{\varepsilon(2-\varepsilon)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=+\infty;\quad \lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x^2}=0;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

7. Знайдемо інтервали монотонності функції:

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Критичні точки $x_1 = -1$, $x_2 = +1$ ($y' = \infty$).

Тоді в інтервалі:

$(-\infty;-1)$	$y' > 0$	і функція зростає;
$(-1;0)$	$y' > 0$	– функція зростає;
$(0;+1)$	$y' > 0$	– функція зростає;
$(+1;+\infty)$	$y' > 0$	– функція зростає.

8. Дослідимо функцію на екстремум. Для цього $y' \neq 0$, тоді $y' = \infty$ і $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – критичні точки, але вони не належать області визначення функції. Отже, функція не має екстремумів.

9. Дослідимо функцію на опуклість. Знайдемо спочатку другу похідну

$$y'' = \left[\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right]' = \frac{2x(1-x^2)^2 - (x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Точки перегину графіка знайдемо серед тих, де y'' дорівнює нулю або не існує. Це точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області існування функції, то при $x = 0$ $y = 0$, тобто точка $O(0;0)$ є точкою перегину графіка.

За даними дослідження складаємо таблицю і побудуємо графік:

інтервали	$-\infty$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$	$+\infty$
y'		+		+	0	+		+	
y''		+	не існує	-	0	+	не існує	-	
поведінка функції	$\lim y = 0$	$\nearrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cap$	точка перетину $y=0$	$\nearrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cap$	$\lim y = 0$

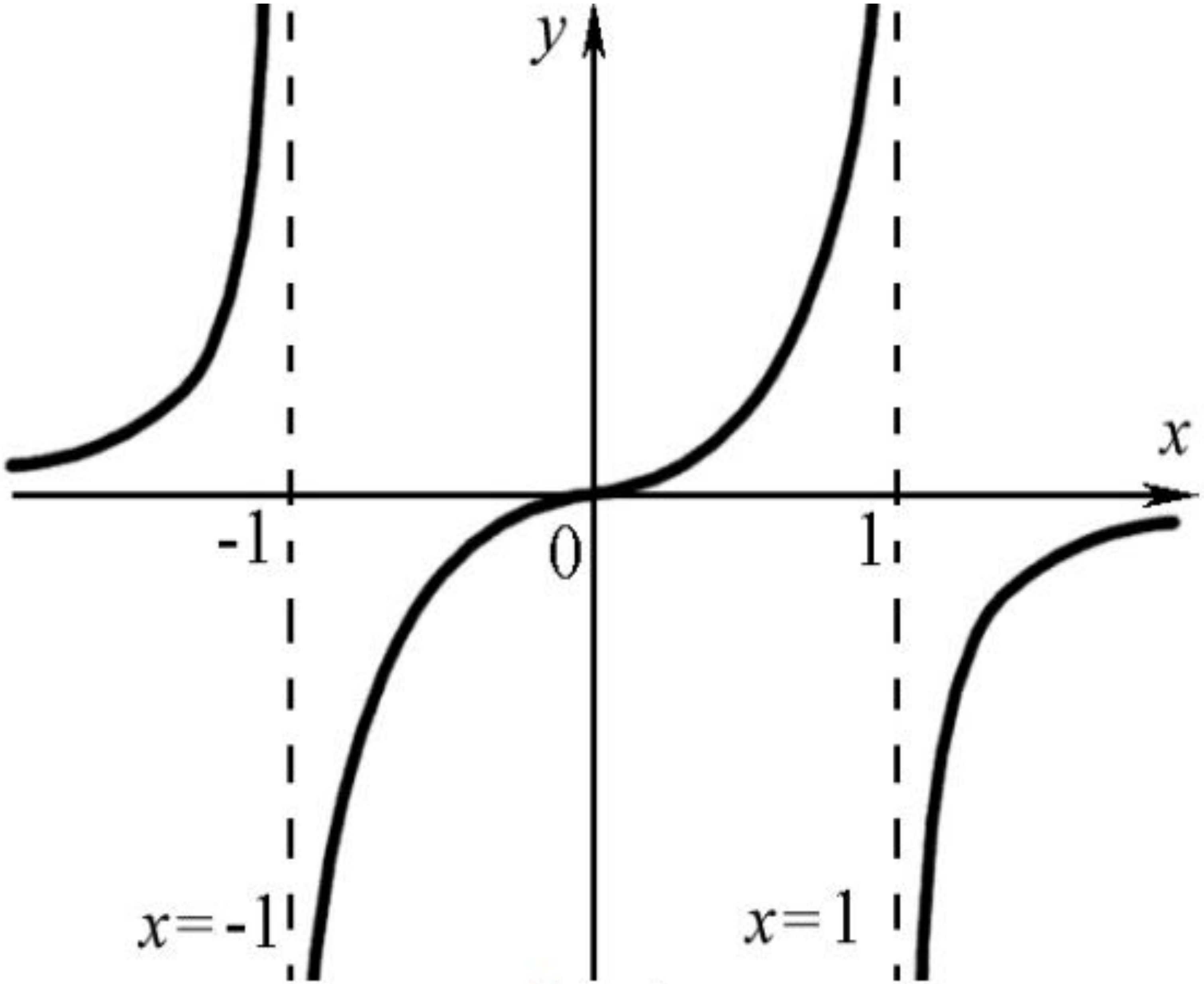

Рис.