

С.В. Звонарев

Основы математического моделирования

Лекция № 2. Математические модели и их классификации

- Определить понятие математической модели.
- Изучить обобщенную математическую модель.
- Рассмотреть классификацию математических моделей.

- Математическая модель.
- Обобщенная математическая модель.
- Нелинейность математических моделей.
- Степень соответствия математической модели объекту.
- Классификация математических моделей.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математической моделью называется совокупность уравнений или других математических соотношений, отражающих основные свойства изучаемого объекта или явления в рамках принятой умозрительной физической модели и особенности его взаимодействия с окружающей средой.

Основными свойствами математических моделей являются:

- адекватность;
- простота.

Процесс формулировки математической модели называется **постановкой задачи**.

Математическая модель является математическим аналогом проектируемого объекта. Степень адекватности ее объекту определяется постановкой и корректностью решений задачи проектирования.

Математическая модель технического объекта – совокупность математических уравнений и отношений между ними, которая адекватно отражает свойства исследуемого объекта, интересующие исследователя (инженера).

Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

Методы отыскания экстремума функции многих переменных с различными ограничениями часто называются **методами математического программирования.**

Элементы обобщенной математической модели:

- множество входных данных (переменные) X, Y ;
- математический оператор L ;
- множество выходных данных (переменных) $G(X, Y)$.

- X – множество **варьируемых переменных**, которое образует пространство варьируемых параметров R_x (пространство поиска), являющееся **метрическим с размерностью n** , равной числу варьируемых параметров.
- Y – множество **независимых переменных (константы)**, которое образует **метрическое пространство входных данных R_y** . В том случае, когда каждый компонент пространства R_y задается **диапазоном возможных значений**, множество независимых переменных отображается некоторым **ограниченным подпространством** пространства R_y .

Независимые переменные Y

Они определяют среду функционирования объекта, т.е. внешние условия, в которых будет работать проектируемый объект. К ним могут относиться:

- **технические параметры объекта**, не подлежащие изменению в процессе проектирования;
- **физические возмущения среды**, с которой взаимодействует объект проектирования;
- **тактические параметры**, которые должен достигать объект проектирования.

Математические оператор и ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Математический оператор L – полная система математических операций, описывающих численные или логические соотношения между множествами входных и выходных данных (переменные). Он определяющий операции над входными данными.

Множество выходных данных (переменных) $G(X, Y)$ представляет собой совокупность критериальных функций, включающую (при необходимости) целевую функцию. Выходные данные рассматриваемой обобщенной модели образуют метрическое пространство критериальных показателей R_G .

Нелинейность математических моделей

Нелинейность математических моделей – нарушение принципа суперпозиции, т.е. когда любая линейная комбинация решений не является решением задачи. Таким образом знание о поведении части объекта еще не гарантирует знания поведения всего объекта.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей не линейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности.

Пример – популяционные модели сразу становятся нелинейными, если принять во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов.

Степень соответствия математических моделей объекту

Сложности:

- Математическая модель никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту и не передает всех его свойств и особенностей.
- Математическая модель является приближенным описанием объекта и носит всегда приближенный характер.

Точность соответствия определяется степенью соответствия, адекватности модели и объекта. Способы:

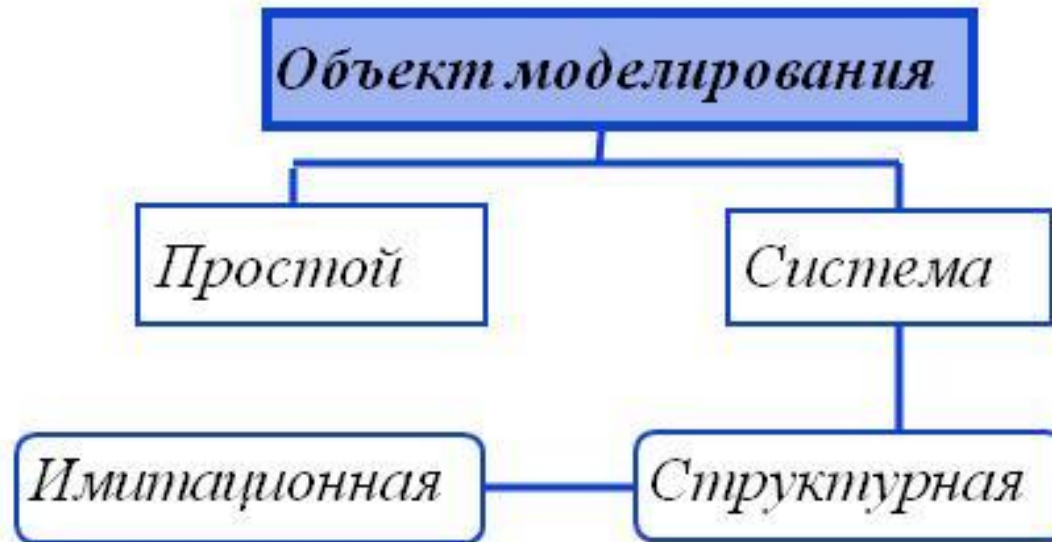
- **Использование эксперимента (практики)** для сравнения моделей и выбора из них наиболее подходящей.
- Унификация математических моделей за счет **накопления наборов готовых моделей.**
- **Перенос готовых моделей** из одних процессов на другие, идентичные, аналогичные .
- **Использование минимального количества приближений** и

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математические модели подразделяют на классы в зависимости от:

- сложности объекта моделирования;
- оператора модели;
- входных и выходных параметров;
- цели моделирования;
- способа исследования модели;
- объектов исследования;
- принадлежности модели к иерархическому уровню описания объекта;
- характера отображаемых свойств;
- порядка расчета;
- использования управления процессом.

Классификация по сложности объекта



- В **простых** моделях при моделировании не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы.
- Объект система соответственно более **сложная система**, представляющая собой совокупность взаимосвязанных элементов, обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое.

Классификация по оператору модели

- Математическую модель называют **линейной**, если оператор обеспечивает линейную зависимость выходных параметров от значений входных параметров.
- Математическую модель называют **нелинейной**, если оператор обеспечивает нелинейную зависимость выходных параметров от значений входных параметров.
- Математическая модель **простая**, если оператор модели является алгебраическим выражением, отражающим функциональную зависимость выходных параметров от входных.
- Модель, включающая системы дифференциальных и интегральных соотношений, называется **сложной**.
- Модель называется **алгоритмической** когда удастся построить некоторый имитатор поведения и свойств объекта с помощью алгоритма.

Классификация по входным и выходным параметрам

Классификация по характеру моделируемого процесса

- **Детерминированные**, которые соответствуют детерминированным процессам, имеющим строго однозначную связь между физическими величинами, характеризующими состояние системы в какой-либо момент времени. Детерминированная модель позволяет однозначно вычислить и предсказать значения выходных величин по значениям входных параметров и управляющих воздействий.
- **Неопределенные**, которые исходят из того, что изменение определяющих величин происходит случайным образом, и значения выходных величин находятся в вероятностном соответствии с входными величинами и не определяются однозначно.

Неопределенные модели

- **Стохастические** – значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности.
- **Случайные** – значения всех или отдельных параметров модели устанавливаются случайными величинами, заданными оценками плотностей вероятности, полученными в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров.
- **Интервальные** – значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданными интервалом, образованным минимальным и максимально возможными значениями параметра.
- **Нечеткие** – значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству.

Классификация по отношению к размерности пространства

- **Одномерные.**
- **Двумерные.**
- **Трёхмерные.**

Такое деление применимо для моделей, в число параметров которых входят координаты пространства.

Классификация по отношению ко времени

- **Статические.** Если состояние системы не меняется со временем, то модели называют статическими. Статическое моделирование служит для описания состояния объекта в фиксированный момент времени.
- **Динамические.** Если состояние системы меняется со временем, то модели называют динамическими. Динамическое моделирование служит для исследования объекта во времени.

Классификация по виду используемых множеств параметров

- **Качественные.**
- **Количественные.**
- **Дискретные.**
- **Непрерывные.**
- **Смешанные.**

Классификация по целям моделирования

- **Дескриптивные.** Целью таких моделей является установление законов изменения параметров модели. Пример – модель движения ракеты после старта с поверхности Земли.
- **Оптимизационные.** Подобные модели предназначены для определения оптимальных с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального режима управления некоторым процессом. Примером подобной модели может служить моделирование процесса запуска ракеты с поверхности Земли с целью подъема ее на заданную высоту за минимальное время.
- **Управленческие.** Такие модели применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека.

Классификация по методу реализации

- **Аналитические.** Аналитические методы более удобны для последующего анализа результатов, но применимы лишь для относительно простых моделей. В случае, если математическая задача допускает аналитическое решение, то оно считается предпочтительнее численного.
- **Алгоритмические.** Алгоритмические методы сводятся к некоторому алгоритму, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ.

Классификация по объектам исследования

- **Объекты с высокой степенью информации.** если в процессе моделирования известны полные системы уравнений, описывающие все стороны моделируемого процесса и все числовые значения параметров этих уравнений.
- **Объекты с нулевым уровнем информации.** Математическая модель такого объекта строится на основе статистических экспериментальных данных.
- **Объекты с известными основными закономерностями.** Значения констант в математических уравнениях описания модели устанавливаются из опыта.
- **Объекты, о поведении которых имеются сведения эмпирического характера.** Для них используют методы физического моделирования с применением математического планирования эксперимента.

Классификация по принадлежности модели к иерархическому уровню описания объекта

- **Микроуровень** (типовыми процессами являются массообменные, теплофизические, гидродинамические). Моделирование осуществляется в целях синтеза технологического процесса для отдельного или нескольких агрегатов.
- **Макроуровень.** Моделирование процессов, имеющих более высокий уровень агрегации; модели применяют для синтеза текущего управления технологическим процессом для одного агрегата или технологического комплекса в целом.
- **Метауровень.** Моделирование процессов в совокупности агрегатов и связывающих их материально-энергетических потоков. Такие модели служат для синтеза технологического комплекса как единого целого, то есть для синтеза управления развитием.

Классификация по характеру отображаемых свойств модели

- **Функциональные модели.** Используются, для описания физических и информационных процессов, протекающих при функционировании объекта.
- **Структурные модели.** Описывают состав и взаимосвязи элементов системы (процесса, объекта).

Классификация по порядку расчета

- **Прямые.** Применяются для определения кинетических, статических и динамических закономерностей процессов.
- **Обратные (инверсионные).** Используются для определения значения входных параметров или других заданных свойств обрабатываемых веществ или продуктов, а также для определения допустимых отклонений режимов обработки (задачи оптимизации процессов и параметров аппаратов).
- **Индуктивные.** Применяются для уточнения математических уравнений кинетики, статики или динамики процессов с использованием новых гипотез или теорий.

Классификация по использованию управления процессом

- **Модели прогноза, или расчетные модели без управления.** Основное назначение этих моделей – дать прогноз о поведении системы во времени и в пространстве, зная начальное состояние и информацию о поведении ее на границе. Примеры -модели распределения тепла, электрического поля, химической кинетики, гидродинамики.
- **Оптимизационные модели.**
 - **Стационарные модели.** Используются на уровне проектирования различных технологических систем. Примеры – детерминированные задачи, вся входная информация в которых является полностью определяемой.
 - **Нестационарные модели.** Используются на уровне проектирования, так и, главным образом, для оптимального управления различными процессами – технологическими, экономическими и др. В этих задачах некоторые параметры носят случайный характер или содержат элемент неопределенности.

Содержательная классификация моделей

- Гипотеза.
- Феноменологическая модель.
- Приближение.
- Упрощение.
- Эвристическая модель.
- Аналогия.
- Мысленный эксперимент.
- Демонстрация возможности.

Эти модели представляют собой **пробное описание явления**. Если такая модель построена, то это означает, что она временно признается за истину и можно сконцентрироваться на других проблемах. Однако это не может быть точкой в исследованиях, а только временной паузой: статус модели может быть только временным.

Примеры:

- Модель Солнечной системы по Птолемею.
- Модель Коперника (усовершенствованная Кеплером).
- Модель атома Резерфорда.
- Модель Большого Взрыва.
- и д.р.

Данная модель содержит механизм для описания явления. Однако этот механизм недостаточно убедителен и не может быть подтвержден имеющимися данными или плохо согласуется с имеющимися теориями и накопленным знанием об объекте. Поэтому феноменологические модели имеют статус **временных решений**. Роль модели в исследовании может меняться со временем, может случиться так, что новые данные и теории подтвердят феноменологические модели и те будут повышены до статуса гипотезы. Аналогично, новое знание может постепенно придти в противоречие с моделями-гипотезами первого типа и те могут быть переведены во второй.

Примеры:

- Модель теплорода.
- Кварковая модель элементарных частиц.
- и д.р.

Общепринятый прием в случае когда нельзя решить даже с помощью компьютера уравнения, описывающие исследуемую систему – использование приближений. Уравнения заменяются линейными.

Стандартный пример – закон Ома.

В данной модели отбрасываются детали, которые могут заметно и не всегда контролируемо повлиять на результат.

Примеры:

- Применение модели идеального газа к неидеальному.
- Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса.
- Большинство моделей физики твердого тела, жидкостей и ядерной физики. Путь от микроописания к свойствам тел (или сред), состоящих из большого числа частиц, очень длинен. Приходится отбрасывать многие детали.

Эвристическая модель сохраняет лишь **качественное подобие реальности и дает предсказания только «по порядку величины»**.

Оно дает простые формулы для коэффициентов вязкости, диффузии, теплопроводности, согласующиеся с реальностью по порядку величины. Но при построении новой физики далеко не сразу получается модель, дающая хотя бы качественное описание объекта.

Типичный пример – приближение средней длины свободного пробега в кинетической теории.

Данная модель впервые возникла, когда взаимодействие в системе нейтрон-протон пытались объяснить посредством взаимодействия атома водорода с протоном. Эта аналогия и привела к заключению, что должны существовать обменные силы взаимодействия между нейтроном и протоном, обусловленным переходом электрона между двумя протонами.

Мысленный эксперимент и демонстрация возможности

Мысленный эксперимент – это рассуждения, которые в конечном итоге приводят к противоречию.

Демонстрация возможности – это тоже мысленные эксперименты с воображаемыми сущностями, демонстрирующие, что предполагаемое явление согласуется с базовыми принципам и внутренне непротиворечиво. Один из самых знаменитых таких экспериментов – геометрия Лобачевского.

- Рассмотрено понятие математической модели.
- Изучена обобщенная математическая модель.
- Определены понятия: нелинейность математических моделей и степень соответствия математической модели объекту.
- Представлена классификация математических моделей.

Рекомендуемая литература

- Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Наука. Физматлит, 1997.
- Тарасевич, Н.Н. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс / Н.Н. Тарасевич. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- Введение в математическое моделирование: уч. Пособие / под редакцией П.В. Трусова. – М.: Университетская книга, Логос, 2007. – 440 с.