МОДЕЛИРОВАН ИЕ СИСТЕМ

Модели, описываемые нелинейными, недифференцируемыми уравнениями и их исследование

Лекция 6

Текущий контроль

- Решить задачу:

1. «классическим» спуском по градиенту;
2. спуском с изменяемой целевой функцией,

- Если: a= i+1; b=i+2; c=i+4; d=2i+3, где i – номер студента. Точка старта:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{xy} \to \max; \\ bx^2 + cy^2 \le d; \\ x \ge 0; y \ge 0. \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}}; y = 1.$$

Начальная величина шага равна 2, конечная – 0,5

Формальная постановка задачи

- Моделью некоего объекта или явления служит система, содержащая недифференцируемые компоненты:

(1)
$$\begin{cases} \varphi(\overline{x}) \to \min; \ (\max) \\ f_j(\overline{x}) \le b_j; \ j = 1,2,\ldots l \\ \overline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \\ \forall i, \ a_i \le x_i \le b_i. \end{cases}$$

- **Требуется вычислить** вектор удовлетворяющий системе (1) т.о., что точность вычислений i-й переменной,

Часть 1

Метод решеток

Содержательное описание алгоритма

- а) на каждом отрезке , выбирается M_i, равноотстоящих точек.
- б) вычисляются значения x_i в каждой из полученных точек;
- в) все различные сочетания значений x_i, (i=1,2,…,n) подставляются в (1), и, если находится такой вектор переменных, который удовлетворяет ограничениям (1), а значение целевой функции лучше ранее найденного x_j, то старое значение забывается, а новое, вместе с вектором запоминается.
- г) для каждого $\vec{x}_i \in \vec{X}_j$ справедливо: $x_i - \frac{b_i - a_i}{M_i} \le x_i \le x_i + \frac{b_i - a_i}{M_i};\ i = 1, 2, \ldots n$
- д) определяются новые диапазоны изменения каждой *i*-ой переменной.
- е) если , $\forall i,\ (b_i - a_i) \le E_i$ то алгоритм закончен, в противном случае перейти к шагу а).

Пример 1

- **Пользуясь методом решеток решить задачу:**

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min; \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 16; \\ \forall i,\ 0 \le x_i \le 4{,}5 \end{cases}$$

- **Определить x_1 и x_2 с точностью не менее 0,5.**

Первая итерация

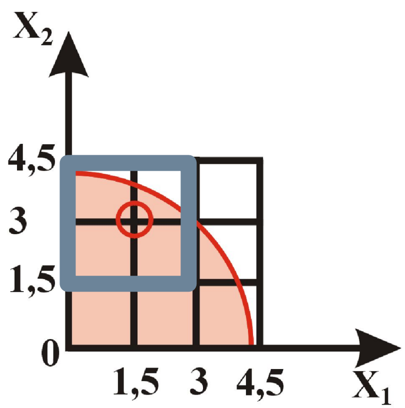


Рис. 1

- 1) (0; 4,5) = (1,5; 4,5) = (3; 4,5) = (4,5; 4,5) =
- (3; 3) = (4,5; 3) = (4,5; 1,5) =
- (4,5; 0) = (0; 3) = 4; (0; 1,5) = 6,25;
- (1,5; 0) = 9,25
- (1,5; 1,5) = 2,5; *(1,5; 3) = 0,25*
- (3; 0) = 10; (3; 1,5) = 3,25; (0; 0) = 13
- $M_1 = M_2 = 4$
- $B_1 – A_1 = 4,5; B_2 – A_2 = 4,5$

Вторая итерация

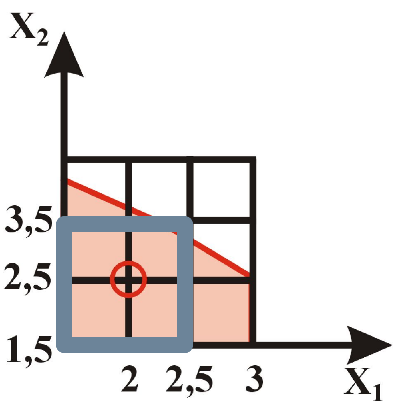


Рис. 2

2) (1,5; 4,5) = (2; 4,5) = (2,.5; 4,5) =

(3; 4,5) = (3,5; 2,5) = (3,5; 3) =

(1,5; 1,5) = 2,5; (1,5; 2,5) = 0,5;

(1,5; 3,5) = 0,5; (2;1,5) = 2,25;

(2; 2,5) = 0,25; (2; 3,5) = 0,25; (2,5; 1,5) = 2,5;

(3; 1,5) = 3,25.

$B_1 - A_1 = 2$; $B_2 - A_2 = 3$

Третья итерация

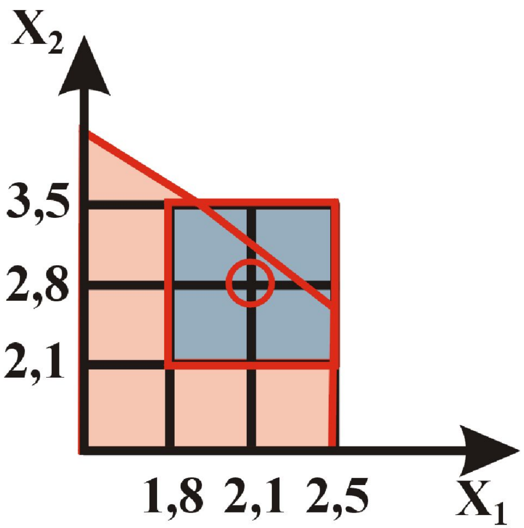


Рис. 3

3) (2,16; 3,5) = (2,5; 3,5) = (2.5; 2,8) = (1,5; 1,5) = 2,5; (1,5; 2,1) = 1,25; (1,5; 2,8) = 0,5; (1,5; 3,5) = 0,5; (1,8; 1,5) = 2,3; (1,83; 2,1) = 0,72; (1,83; 2,83) = 0,05; (1,83; 3,5) = 0,27; (1,83; 2,83) = 0,05; (1,83; 3,5) = 0,27; (2,16; 1,5) = 2,27; (2,1; 2,1) = 0,72; (2,1; 2,8) = 0,05; (2,1; 3,5) = 0,27; (2,5; 1,5) = 2,5; (2,5; 2,1) = 0,94

Четвертая итерация

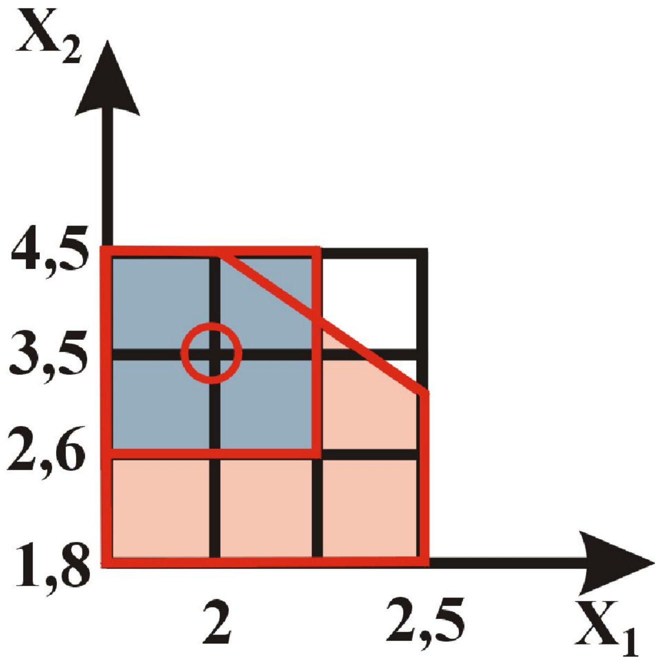


Рис. 4

4) (2,5; 3,05) = (2,08; 3,5) = (2,29; 3,5) = (2,5; 3,5) = (1,88; 2,16) = 0,72;

(1,88; 2,6) = 0,169;

(1,88; 3,05) = 0,01; (1,88; 3,5) = 0,264;

(2,08; 2,16) = 0,71; (2,08; 2,9) = 0,16;

(2,08; 3,05) = 0,010; (2,08; 3,5) = 0,057;

(2,29; 2,16) = 0,79; (2,29; 2,6) = 0,84;

(2,29; 3,05) = 0,02; (2,2; 3,5) = 0,336;

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Построить блок-схему алгоритма, реализующего метод решеток для n переменных.
- Определить достоинства и недостатки алгоритма.
- Решить следующую задачу методом решеток:

$$\begin{cases} |x_1 - 1| + |x_2 - 2| \to \min; \\ x_1^2 + x_2^2 \le 4; \\ \forall i,\ 0 \le x_i \le 3 \end{cases}$$

при условии, что x_1 и x_2 определены с

Часть 2

Поиск решения методом Монте-Карло

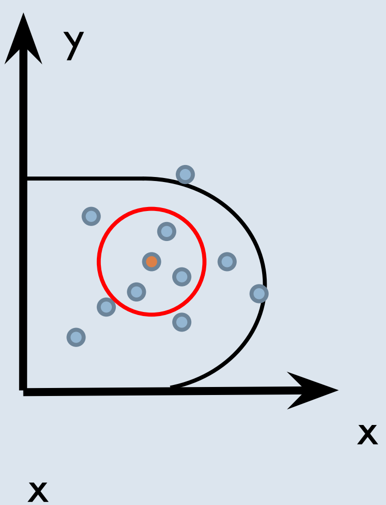
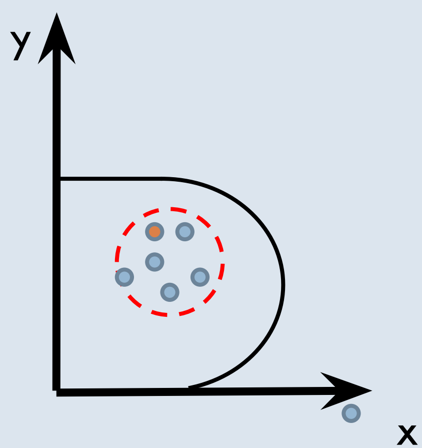
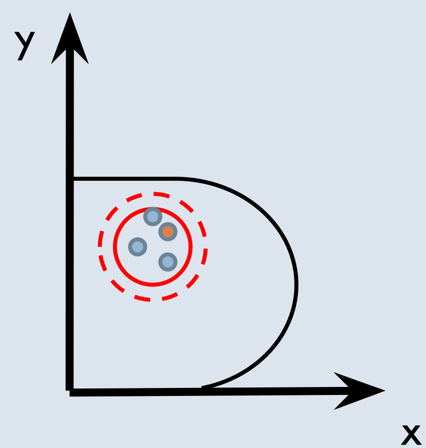
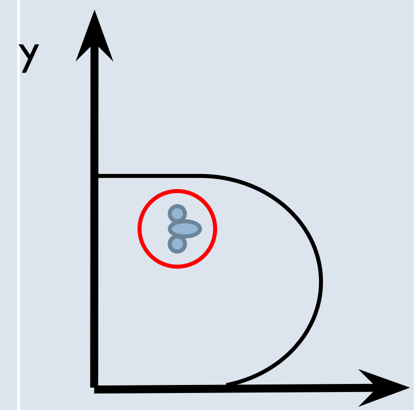
Суть метода Монте-Карло 1

- Применительно к решаемой задаче (1) возможно несколько реализаций метода Монте-Карло.
- Один из них заключается в последовательной генерации сочетаний «случайных» значений переменных в заданном диапазоне, причем для каждого такого сочетания проверяются ограничения и, если они выполняются, то вычисляется новое значение целевой функции, которое сравнивается с хранимым в памяти. Лучшее запоминается, худшее забывается. Поиск прекращается, если выполнено заданное число испытаний либо достигнута заданная точность вычислений.

Суть метода Монте-Карло 2

1. **Реализуется метод Монте-Карло 1 для заданного числа испытаний n. Если достигнута требуемая точность, то перейти к последнему шагу, в противном случае – к шагу 2.**
2. **Выбирается сочетание значений переменных с наилучшим значением целевой функции и определяется Ɛ-окрестность этой точки. Перейти к шагу 1.**
3. **Конец алгоритма.**

Графическая иллюстрация

Первая итерация	Вторая итерация	Третья итерация	Завершение поиска
			

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Построить блок-схемы первой и второй версий метода Монте-Карло.
- Оценить *a priori* достоинства и недостатки каждого метода.
- Решить задачу:

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min; \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 16; \\ \forall i,\ 0 \le x_i \le 4{,}5 \end{cases}$$

- при условии, что:

1) используется генератор случайных чисел с равномерным распределением: 0.35; 0.78; 0.42; 0.39; 0.91; 0.63; 0.57; 0.82; 0.77; 0.11.

2) число испытаний n = 5.