МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

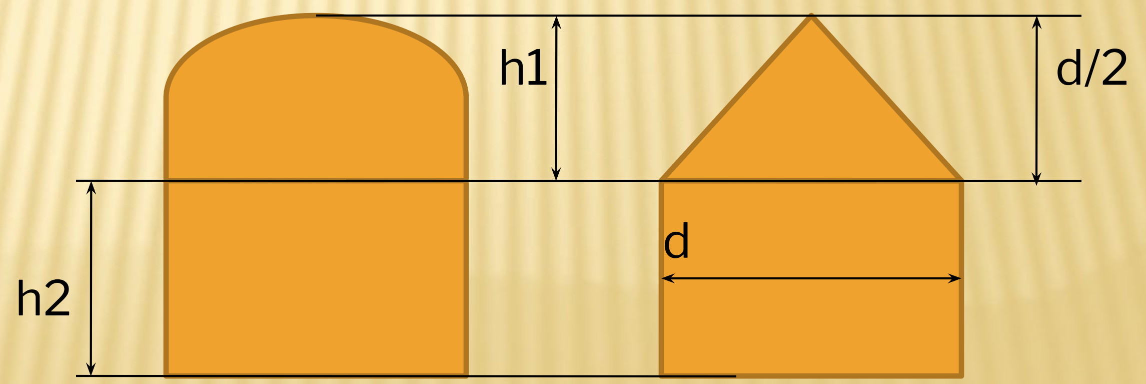
Лекция 5: Численный анализ нелинейных моделей и теория Куна-Таккера.

СОДЕРЖАНИЕ

- Текущий контроль
- Методы наискорейшего спуска (спуск по градиенту)
- Элементы теории Куна-Таккера

ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ 1

- Выбрать оптимальную архитектуру обсерватории, корпус которой является цилиндрическим, а раздвижная крыша может быть полусферической или конической. Объем обсерватории равен V, минимизируется расход материала на ее стены, основание и крышу. Для высоты и радиуса цилиндра и конуса определены нижние границы.



ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ 2

РЕШИТЬ МЕТОДОМ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

- i-порядковый номер студента.

$$\begin{cases} \dfrac{i}{x^2} + \dfrac{i}{y^2} \to \max; \\ x^2 + y^2 = 2i^2. \end{cases}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

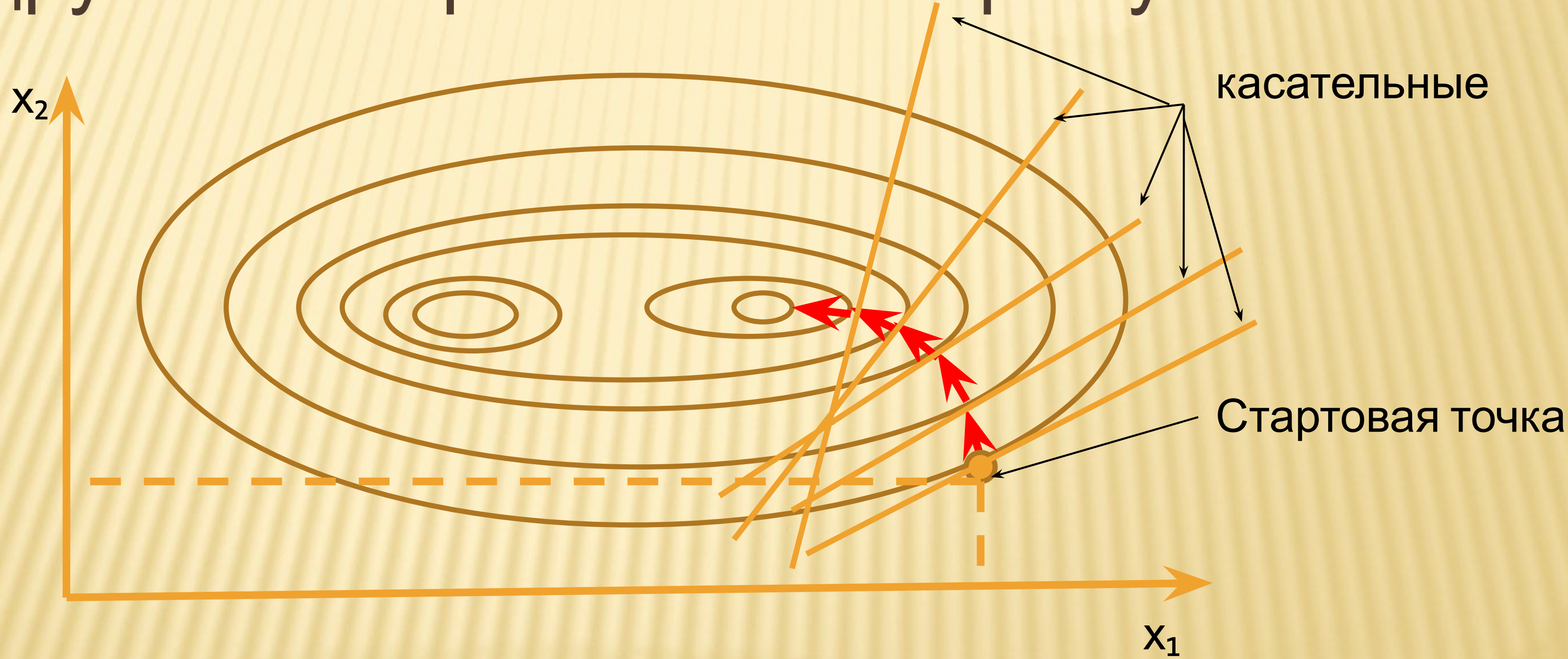
Задана нелинейная однокритериальная оптимизационная модель вида:

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \to \min\ (\max); \\ \forall \mathrm{j} : \varphi_j(\vec{\mathrm{x}}) = b_j; \\ \vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots., x_n\}; \\ \forall 1 \le i \le n : a_i \le x_i \le b_i. \end{cases} \qquad (1)$$

Все функции системы (1) являются гладкими и дифференцируемыми, известно одно допустимое значение
Вектора переменных. Требуется определить оптимальный вектор переменных.

СПУСК ПО ГРАДИЕНТУ – ИДЕЯ МЕТОДА

- Суть метода – в движении от одной точки к другой в направлении экстремума:



Алгоритм спуска по градиенту – первые два шага (всего 10 шагов)

Шаг 1. Вычисляется значение функции f в стартовой точке.

Шаг 2. Для каждой переменной вычисляется новое значение по формуле:

$$\forall i : x_i^{н} = x_i^{c} - \beta \frac{\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_j \left[\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \right]^2}}.$$

АЛГОРИТМ СПУСКА ПО ГРАДИЕНТУ – СЛЕДУЮЩИЕ ЧЕТЫРЕ ШАГА

Шаг 3. Вычисляется новое значение целевой функции f_1.

Шаг 4. Если f_1 *«лучше»* чем f, то перейти к следующему шагу, нет – к шагу 8.

Шаг 5. Если ограничения системы (1) выполняются, то перейти к следующему шагу, в противном случае – к шагу 8.

Шаг 6. Переменной f присваивается значение, равное f_1.

ПОСЛЕДНИЕ ЧЕТЫРЕ ШАГА АЛГОРИТМА

Шаг 7. Старые значения переменных заменяются на новые, полученные на шаге 2 последней итерации. Перейти к шагу 2.

Шаг 8. Величине шага β присваивается новое значение, которое вдвое меньше хранящегося в памяти: $\beta = \beta/2$.

Шаг 9. Если новое значение β больше заданной точности поиска Ɛ, то перейти к шагу 2, в противном случае – к шагу 10.

Шаг 10. Конец алгоритма

ПРИМЕР 1

- Пользуясь спуском по градиенту решить задачу:

$$\begin{cases} f = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \to \max; \\ x^2 + y^2 \geq 9; \qquad\qquad (1) \\ x \geq 0; y \geq 0. \end{cases}$$

- Точка старта: x=y=3; f=0,66, начальная величина шага β=1, конечная величина шага γ=0,25.

РЕШЕНИЕ

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^{н} = x^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}5; \\ y^{н} = y^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}5. \end{cases}$$

z=0,8.

Новые значения переменных удовлетворяют ограничениям, f=0,8, поэтому величина шага β не меняется.

РЕШЕНИЕ – ВТОРАЯ ИТЕРАЦИЯ

2)

$$\begin{cases} x^{н} = x^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}5 - 0{,}5 = 2{,}0; \\ y^{н} = y^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}5 - 0{,}5 = 2{,}0. \end{cases}$$

Ограничения не выполняются, поэтому величина шага β уменьшается в два раза: β=β/2=0,5. Возврат в точку старта, найденную на первой итерации.

РЕШЕНИЕ – ТРЕТЬЯ ИТЕРАЦИЯ

3)

$$\begin{cases} x^{н} = x^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2,5 - 0,25 = 2,25; \\ y^{н} = y^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2,5 - 0,25 = 2,25. \end{cases}$$

Ограничения выполняются, новое значение целевой функции f = 0,888.

РЕШЕНИЕ – ЧЕТВЕРТАЯ ИТЕРАЦИЯ

4)

$$\begin{cases} x^{н} = x^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}25 - 0{,}5\dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 2{,}0; \\ y^{н} = y^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}25 - 0{,}5\dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 2{,}0. \end{cases}$$

Так как ограничения не выполняются, то шаг уменьшается в 2 раза: β=0,25.

РЕШЕНИЕ – ПЯТАЯ ИТЕРАЦИЯ

5)

$$\begin{cases} x^{н} = x^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}25 - 0{,}25\dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 2{,}125; \\ y^{н} = y^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}25 - 0{,}25\dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 2{,}125. \end{cases}$$

Ограничения выполняются, $f = 0{,}9411$.

РЕШЕНИЕ – ШЕСТАЯ ИТЕРАЦИЯ

6)

$$\begin{cases} x^{н} = x^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}125 - 0{,}25\dfrac{1}{2} = 2{,}0; \\ y^{н} = y^{c} - \beta \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]^2}} = 2{,}125 - 0{,}25\dfrac{1}{2} = 2{,}0. \end{cases}$$

Значения переменных не удовлетворяют ограничению, шаг β уменьшается в два раза, но при этом он становится меньше, чем γ, поэтому поиск прекращается. x=y=2,125; f=0,9411.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

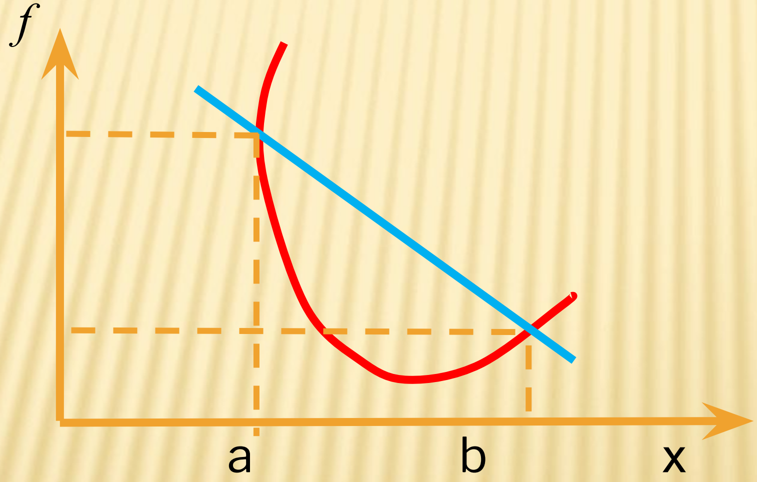
- Пользуясь приведенным выше алгоритмом решить задачу (2):

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 \to \min; \\ x^2 + y^2 \le 4. \end{cases} \qquad (2)$$

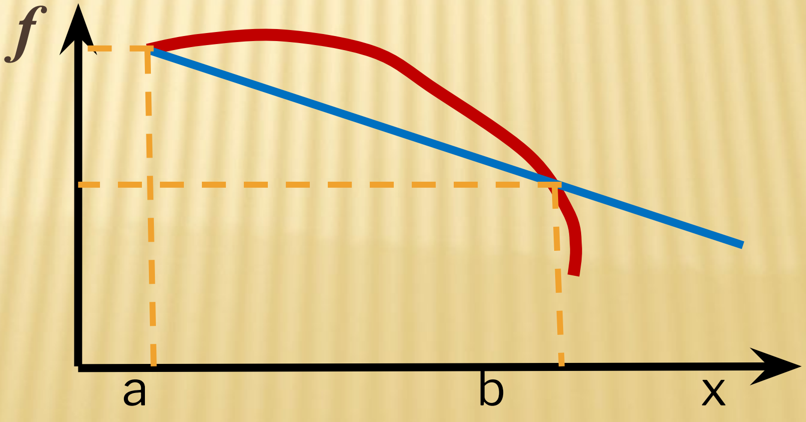
- Решить задачи (1) и (2), пользуясь методом множителей Лагранжа и сравнить результаты.
- Сформулировать достоинства и недостатки спуска по градиенту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Функция f называют <u>выпуклой</u> на интервале [a,b] если для любой точки отрезка, соединяющего точки f(a) и f(b), справедливо: все точки этого отрезка расположены над кривой, отображающей f(x) на этом интервале:



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

- **Функция f называют <u>вогнутой</u> на интервале [a,b] если для любой точки отрезка, соединяющего точки f(a) и f(b), справедливо: все точки этого отрезка расположены под кривой, отображающей f(x) на этом интервале:**
- 

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО И ЛОКАЛЬНОГО ОПТИМУМА

- Функция называется **локально оптимальной** в точке «x» , если все значения в Ɛ-окрестности этой точки «хуже», чем в точке x.
- Функция достигает в точке **x глобального оптимума,** если для любого допустимого вектора **y≠x** значение функции «хуже», чем в «x».

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КУНА-ТАККЕРА

Теорема 1. Если целевая функция является выпуклой и максимизируемой, а область допустимых значений является непрерывной и выпуклой, то локально оптимальное решение совпадает с глобально оптимальным.

Теорема 2. Если целевая функция является вогнутой и минимизируемой, а область допустимых значений аргументов – выпуклой, то локальный оптимум совпадает с глобальным.

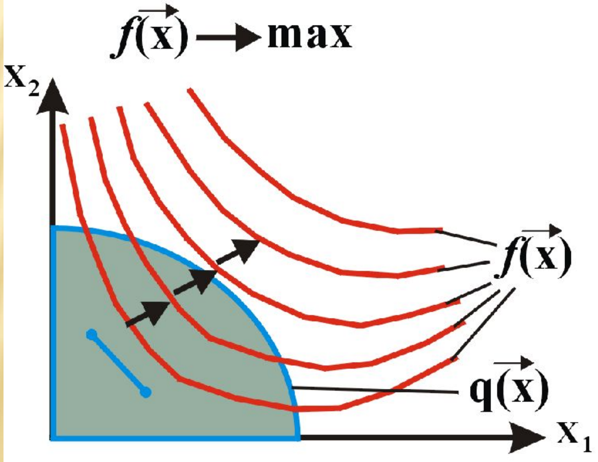


Иллюстрация к Теореме 1.

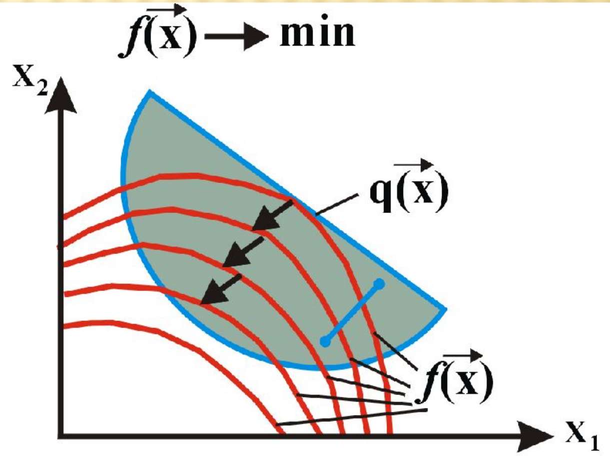


Иллюстрация к Теореме 2.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Определить являлись ли решения задач (1) и (2), полученные выше спуском по градиенту, глобально оптимальными.
- Проверить, являлись ли решения тех же задач, полученные методом множителей Лагранжа, глобально оптимальными.

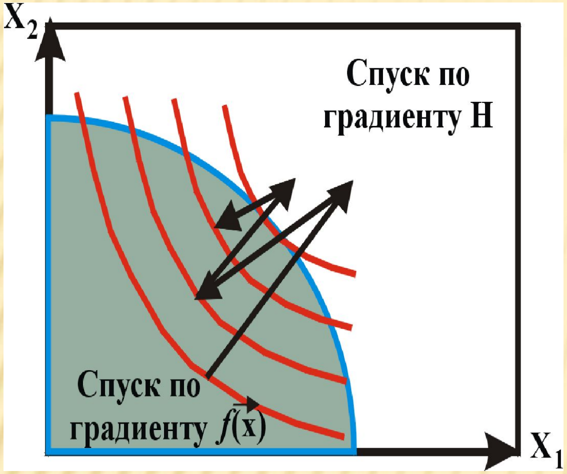
ПОИСК ПО ГРАДИЕНТУ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ.

1. Определена задача:

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \to \min(\max); \\ q_j(\vec{x}) \le 0; \quad j = 1, m; \ \ m - \text{число ораничений} \end{cases}$$

2. Осуществляется спуск в лучшем направлении по градиенту функции *f* до тех пор, пока справедливы ограничения. Если оптимальное значение при этом найдено внутри допустимой области, то алгоритм закончен, переход к шагу **6**, в противном случае – к следующему шагу.

ШАГИ 3 – 6 АЛГОРИТМА



3. Пусть J – множество индексов таких, что $\forall j \in \mathrm{J}: \; q_j(\vec{x}) > 0$
Строим новую целевую функцию H:
$$\mathrm{H} = \sum_{j \in \mathrm{J}} \left[\mathrm{q}_{\mathrm{j}}(\vec{x}) \right]^2$$

4. Осуществляется спуск по градиенту в сторону убывания H до тех пор, пока H не станет меньше 0.

5. Перейти к шагу **2.**

САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Дать формальное описание градиентного поиска с изменяемой целевой функцией и построить блок-схему.
2. Пользуясь этим методом, решить задачу:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 \to \min; \\ x^2 + y^2 \le 3; \\ x_0 = y_0 = 1; \text{начальный шаг} = 1; \text{конечный - } 0.25. \end{cases} \qquad (3)$$

3. Реализовать метод программно.
4. Оценить достоинства и недостатки метода.