МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ, ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Иллюстрации к курсу лекций

МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ Часть 1-2

Автор: проф. Бобков С. П.

Модели систем массового обслуживания

В реальной жизни часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач.

Возникающие при этом процессы получили название ***процессов обслуживания***, а системы - ***систем массового обслуживания (СМО)***.

Работа любой СМО состоит в обработке (обслуживании) поступающего в нее потока требований (заявок на обслуживание).

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств), которые принято называть ***каналами обслуживания***. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, работники учреждения и др.

По числу каналов СМО подразделяют на ***одноканальные*** и ***многоканальные***.

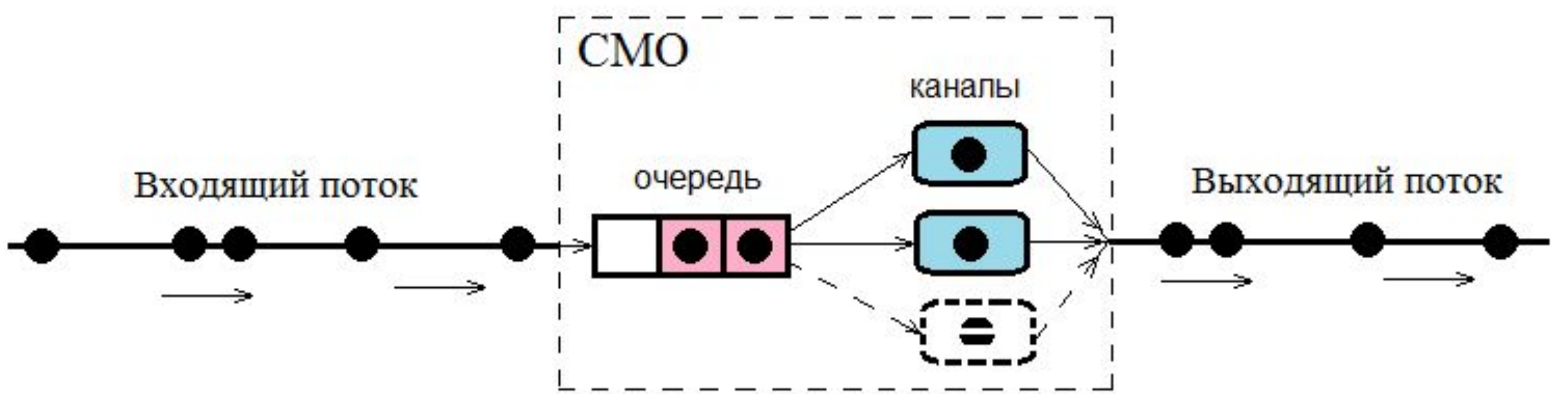


Схема системы массового обслуживания

Модели систем массового обслуживания

Заявки (задачи) поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый ***случайный поток заявок***. Обслуживание заявок также продолжается какое-то случайное время.

Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое количество заявок, в другие же периоды СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Предметом теории массового обслуживания является построение **математических моделей**, связывающих заданные условия работы СМО в первую очередь ее параметры и структуру с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

Под **структурой СМО** обычно понимают количество каналов, наличие и число мест в очереди.

Параметрами СМО обычно считаются интенсивность входного потока заявок и производительность каналов.

В качестве **показателей эффективности СМО** используются: вероятность обслуживания, пропускная способность системы, среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в системе и т.п.

При построении математических моделей СМО будем использовать следующие допущения:

1) принимается, что перемещение заявки по системе, кроме ожидания в очереди и непосредственного процесса обслуживания в канале выполняется мгновенно;
2) события в системе (приход новой заявки, окончание обслуживания заявки) происходят не одновременно.
3) дисциплина выборки заявок из очереди естественная – в порядке поступления;
4) считается, что вычислительная система функционирует абсолютно надежно.

Будем считать, что входной поток заявок характеризуется интенсивностью **λ**. Размерность этой величины – 1/сек. Интенсивность потока связана с вероятностью появления заявок следующим образом:
Вероятность появления одной заявки в интервале от $\mathbf{t}$ до $\mathbf{t+\Delta t}$ равна $\mathbf{\lambda\Delta t}$ и не зависит от $\mathbf{t}$, а вероятность появления в этом интервале двух и более требований пренебрежимо мала.

Производительность каналов можно охарактеризовать интенсивностью обслуживания – **μ**. Этот показатель во многом аналогичен предложенному выше. Он также имеет размерность 1/сек, а его смысл в том, что вероятность окончания обслуживания очередного требования в интервале от $\mathbf{t}$ до $\mathbf{t+\Delta t}$ равна $\mathbf{\mu\Delta t}$ и не зависит от $\mathbf{t}$.

Структура математической модели (вид и количество уравнений) зависит от конкретной структуры СМО и ее параметров.

Процедуру создания математической модели СМО разберем на примерах.

Рассмотрим простую **двухканальную систему массового обслуживания без очереди**. Каналы будем считать одинаковыми.

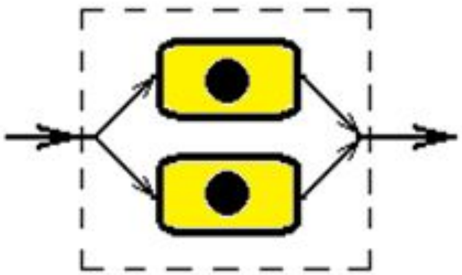


Схема двухканальной СМО без очереди

На вход системы поступает поток заявок с интенсивностью λ. Заявки обслуживаются с интенсивностью μ.

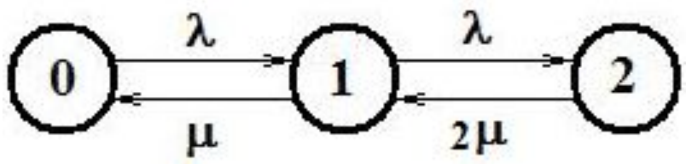
Рассматриваемая система имеет только три возможных состояния:

A_0 - в системе нет ни одной заявки, все каналы свободны, система простаивает;

A_1 - в системе одна заявка, занят один канал обслуживания;

A_2 - в системе две заявки, оба канала заняты.

Исследовать работу СМО очень удобно, если использовать граф состояний системы. Вершинами этого графа являются возможные состояния, направленными дугами – возможные переходы между состояниями. Для рассматриваемой СМО граф состояний имеет следующий вид:



Граф состояний двухканальной СМО без очереди

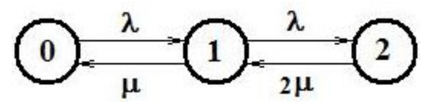
Над дугами графа проставлены интенсивности соответствующих переходов.

Изменение состояний системы происходит под действием событий, происходящих в случайные моменты времени. То есть поведение системы есть случайный процесс. Вероятность того, что в какой-то момент времени система находится в состоянии $\mathbf{A_i}$, обозначим, как $\mathbf{S_i(t)}$. Несомненно, для нашей системы будет выполняться условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{2} S_k(t) = 1 \qquad (1.22)$$

Математическая модель рассматриваемой системы будет включать в себя вероятности состояний $\mathbf{S_i(t)}$ и параметры интенсивности $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$.

Двухканальная СМО без очереди



Составим уравнения математической модели рассматриваемой СМО с использованием графа состояний.

Вероятность того, что система свободна $\mathbf{S_0(t)}$ уменьшается под действием потока входящих заявок, причем это уменьшение пропорционально не только интенсивности входящего потока заявок $\boldsymbol{\lambda}$, но и самой вероятности $\mathbf{S_0(t)}$. В то же время рассматриваемая вероятность увеличивается потоком обслуженных заявок и это увеличение пропорционально интенсивности $\boldsymbol{\mu}$ и значению вероятности $\mathbf{S_1(t)}$. Поэтому можем записать:

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = -\lambda S_0(t) + \mu S_1(t) \qquad (1.23а)$$

Рассуждая аналогично, можно записать соответствующее уравнение и для вероятностей других состояний.

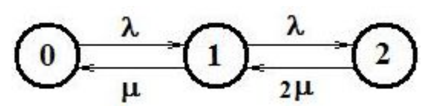
Для состояния, когда занят один канал $\mathbf{S_1(t)}$:

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = \lambda S_0(t) + 2\mu S_2(t) - \lambda S_1(t) - \mu S_1(t) \qquad (1.23б)$$

Для состояния, когда заняты оба канала $\mathbf{S_2(t)}$:

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = \lambda S_1(t) - 2\mu S_2(t) \qquad (1.23в)$$

Двухканальная СМО без очереди



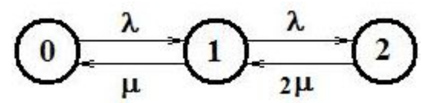
Полученная система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, носит имя ее автора – российского математика А.Н. Колмогорова.

Существенно, что в системе уравнений Колмогорова можно ограничиться $\mathbf{n-1}$ уравнением. Дополнительно используется условие нормировки.
Теперь система уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_0(t)}{dt} = -\lambda S_0(t) + \mu S_1(t) \\ \dfrac{dS_1(t)}{dt} = \lambda S_0(t) - (\lambda + \mu) S_1(t) + 2\mu S_2(t) \\ S_0(t) + S_1(t) + S_2(t) = 1 \end{cases} \qquad (1.24)$$

Интегрирование системы уравнений (1.24) по времени позволяет получить вероятности состояний как ***функции времени*** $\mathbf{S_i(t)}$.

Двухканальная СМО без очереди



Рассмотрим решение системы уравнений (1.24) методом Эйлера. При этом расчетные зависимости будут иметь вид:

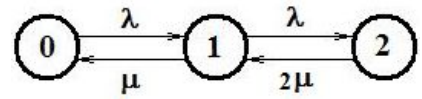
$$\begin{cases} S_0(i) = S_0(i-1) + h[-\lambda S_0(i-1) + \mu S_1(i-1)] \\ S_1(i) = S_1(i-1) + h[\lambda S_0(i) - (\lambda + \mu) S_1(i-1) + 2\mu S_2(i-1)] \\ S_2(i) = 1 - S_0(i) - S_1(i) \end{cases} \qquad (1.25)$$

где $\mathbf{h}$ – шаг по времени.

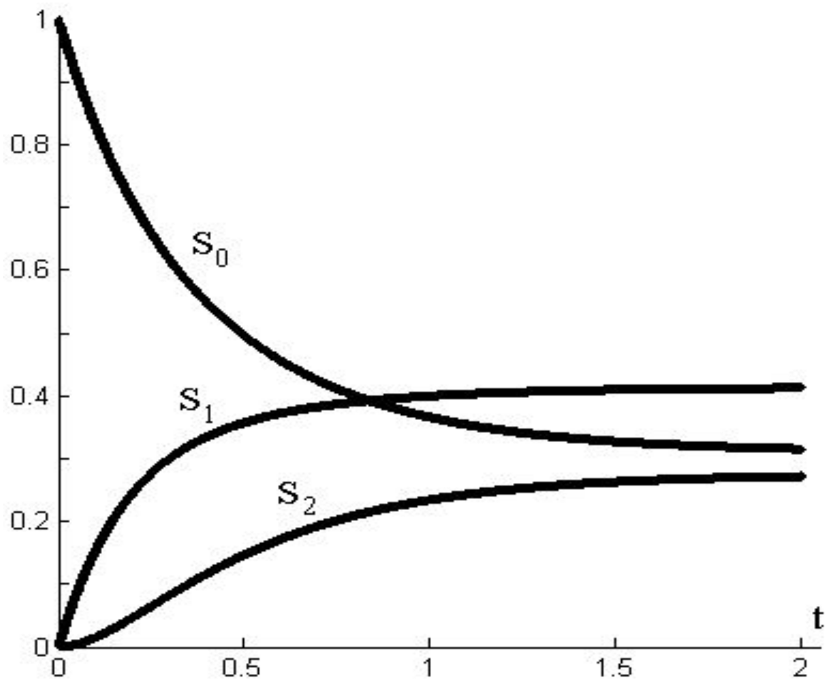
Зададим начальные условия. Допустим, в начальный момент времени рассматриваемая СМО простаивала, т.е. находилась в состоянии $\mathbf{A_0}$. Следовательно, вектор вероятности состояний СМО для начального момента времени будет иметь вид:

$$[S_k(0)] = [S_0(0); S_1(0); S_2(0)] = [1; 0; 0] \qquad (1.26)$$

Двухканальная СМО без очереди



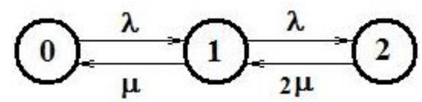
Решение математической модели при **λ** = 2с$^{-1}$и **μ** = 1,5 с$^{-1}$:



Изменение вероятностей состояний СМО во времени

Видно, что вероятности состояний СМО изменяются во времени, стремясь к каким-то предельным значениям. Это означает, что с течением времени СМО переходит в установившийся (стационарный режим), когда элементы вектора вероятностей состояний перестают изменяться. В нашем случае этими стационарными значениями являются для S_0 – 0,31 ; для S_1 – 0,41 ; для S_2 – 0,28.

Двухканальная СМО без очереди



Отметим два важных момента.

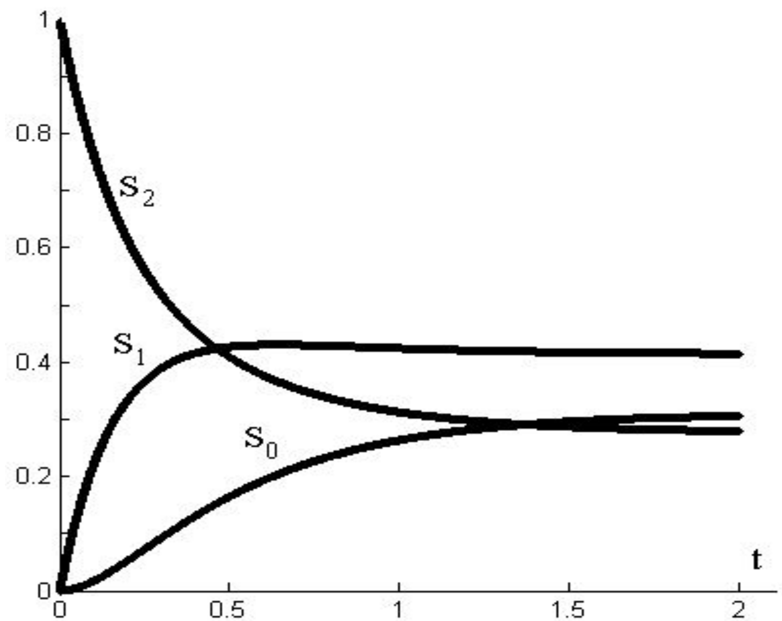
Важный момент 1

Стационарные значения не зависят от начальных условий. То есть, в каком бы состоянии СМО не находилась в начальный момент времени, она все равно придет к одним и тем же постоянным значениям в установившемся режиме.

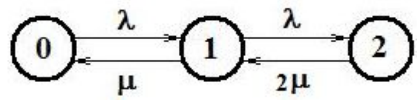
Покажем это. Изменим начальные условия.
Пусть в начальный момент времени система находилась в состоянии $\mathbf{A_2}$.
Поэтому вектор вероятности состояний СМО для начального момента времени примет вид:

$$[S_k(0)] = [S_0(0); S_1(0); S_2(0)] = [0; 0; 1] \quad (1.27)$$

Значения вероятностей состояний СМО стремятся к тем же предельным значениям, что и при начальных условиях ранее рассмотренного примера



Двухканальная СМО без очереди

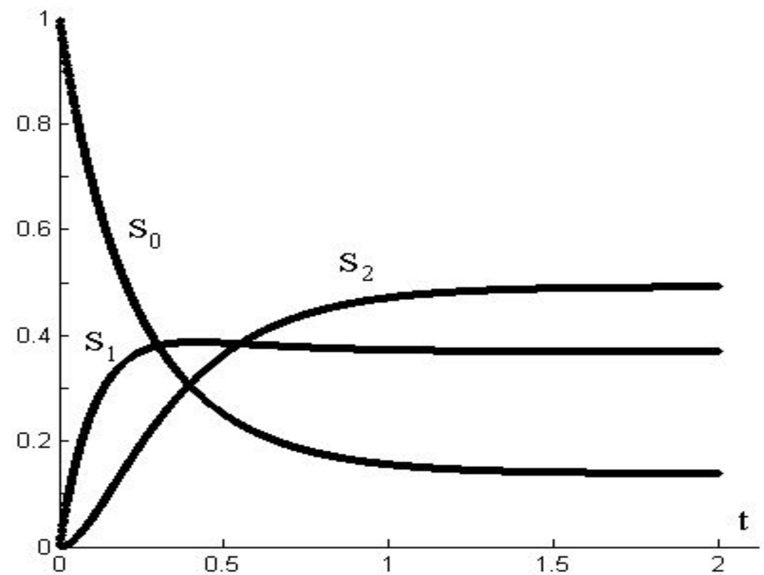


Важный момент 2

Стационарные значения зависят от исходных параметров **λ** и **μ**.

Для проверки этот положения увеличим в два раза интенсивность входящего потока заявок и решим уравнения математической модели с начальными условиями первого примера и при **λ** = 4с$^{-1}$ и **μ** = 1,5 с$^{-1}$.

Решение при увеличенной интенсивности **λ**

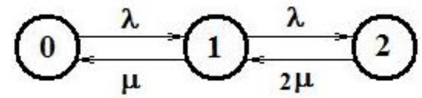


Значения элементов вектора вероятностей в стационарном режиме в условиях увеличенной интенсивности входного потока изменились

S_0 – 0,14 ; S_1 – 0,37 ; S_2 – 0,49

Анализ этих данных показывает, что вероятность простоя СМО (вероятность состояния A_0) уменьшилась более, чем вдвое, а вероятность занятости обоих каналов СМО (вероятность состояния A_2) –почти вдвое увеличилась

Двухканальная СМО без очереди



В практике использования моделей СМО нередко возникают ситуации, когда исследователя интересует не сам процесс изменения вероятностей состояний во времени, а только стационарные значения вероятностей.
В таких случаях не имеет смысла решать дифференциальные уравнения вида (1.24). Проще получить и далее использовать уравнения для стационарного режима работы СМО.
Такие уравнения выводятся, исходя из того обстоятельства, что в стационарном (установившемся) режиме производные по времени равны нулю.
Тогда из (1.24) получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda S_0 + \mu S_1 = 0 \\ \lambda S_0 - (\lambda + \mu) S_1 + 2\mu S_2 = 0 \\ S_0 + S_1 + S_2 = 1 \end{cases} \qquad (1.28)$$

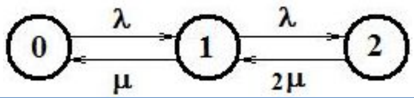
Решение этой системы при $\boldsymbol{\lambda}$ = 2с$^{-1}$и $\boldsymbol{\mu}$ = 1,5 с$^{-1}$ сразу дает искомые значения стационарных вероятностей: S_0 = 0,31 ; S_1 = 0,41 ; S_2 = 0,28.

Найденные значения вероятности состояний S_i либо позволяют определить показатели эффективности СМО, либо сами уже являются такими показателям.

МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Модели систем массового обслуживания

Двухканальная СМО без очереди



Показатели эффективности работы СМО конкретной структуры при заданных значениях интенсивности потоков случайных событий.

1. Вероятность S_0 нахождения системы в состоянии A_0, когда в ней нет ни одной заявки, это ***вероятность простоя*** системы, т.е. в нашем случае $P_{ПР} = S_0 = 0{,}31$

2. Вероятность S_2 нахождения системы в состоянии A_2, когда система полностью занята и вновь поступившая заявка получает отказ, это ***вероятность отказа*** в обслуживании т.е. в нашем случае $P_{ОТК} = S_2 = 0{,}28$

3. Вероятность того, что вновь поступившая заявка будет обслужена, т.е. ***вероятность обслуживания***, можно найти так $P_{ОБ} = 1 - S_2$ или с данном случае $P_{ОБ} = S_0 + S_1 = 0{,}72$

4. Поскольку в системе нет очереди, то ***среднее количество заявок, находящихся в системе*** будет равно ***среднему числу занятых каналов***. Для данного случая этот показатель равен $K = S_1 + 2S_2 = 0{,}41 + 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}97$

5. ***Среднюю продолжительность пребывания заявки в системе*** можно вычислить следующим образом: $t_C = K/(2\mu) = 0{,}97/(2 \cdot 1{,}5) = 0{,}32$ с

6. Часто при анализе эффективности работы СМО используют показатель ***пропускная способность системы***. Он определяется так: $C = P_{ОБ}\,\lambda = 1{,}44$ заявок в секунду.

В качестве второго примера рассмотрим СМО, которая имеет два канала и возможность хранить одну заявку в очереди. При этом производительность одного канала выше, чем второго. Дисциплина обслуживания заявок предполагает, что заявка поступает в первую очередь на обслуживание в более мощный

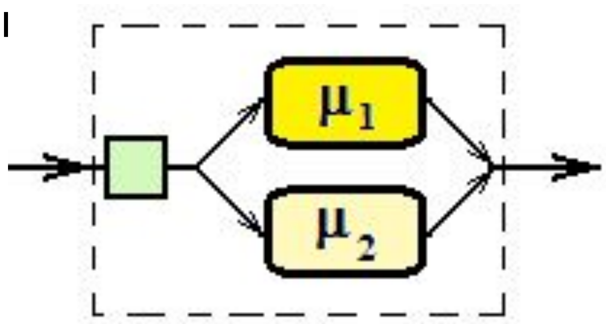


Схема СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди

На вход системы поступает поток заявок с интенсивностью **λ**. Интенсивность обслуживания заявок первым каналом μ_1, вторым – μ_2.

Рассматриваемая система может иметь пять возможных состояний:

A_{00} - в системе нет ни одной заявки, все каналы свободны;

A_{10} - в системе одна заявка, занят более производительный канал;

A_{11} - в системе две заявки, заняты оба канала, очередь пуста;

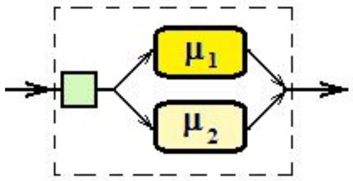
A_{01} - в системе одна заявка, занят менее производительный канал;

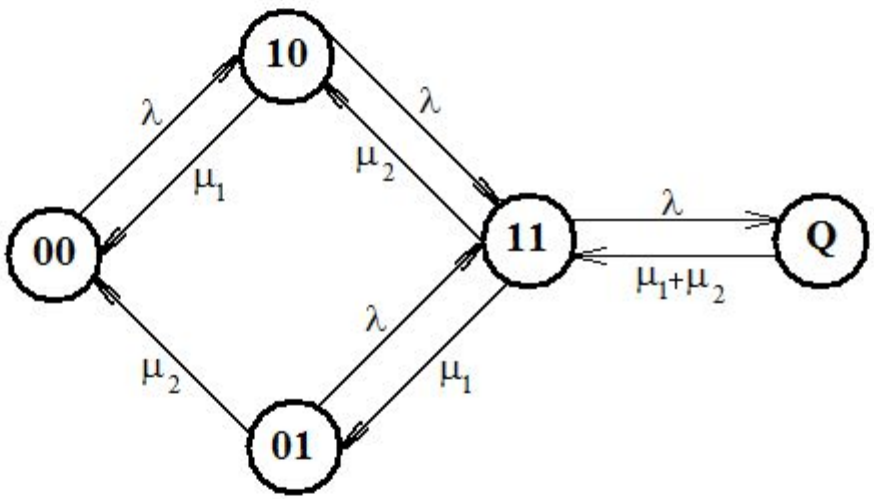
A_Q - в системе три заявки, оба канала и место в очереди заняты

МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Модели систем массового обслуживания

СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди





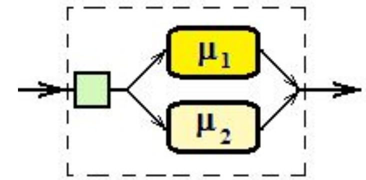
Граф состояний СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди

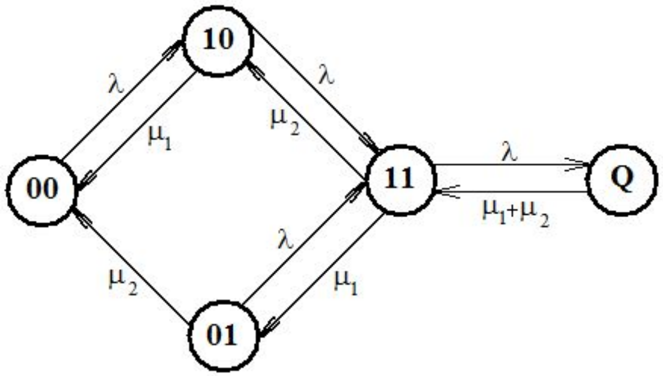
Как и в ранее рассмотренном примере, обозначим, как $S_i(t)$ вероятность того, что в какой-то момент времени СМО будет находиться в состоянии A_i,

Условие нормировки вероятностей :

$$\sum S_k(t) = 1 \qquad (1.29)$$

СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди



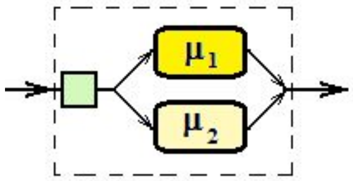


Составим систему уравнений А.Н. Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dS_{00}(t)}{dt} = -\lambda S_{00}(t) + \mu_1 S_{10}(t) + \mu_2 S_{01}(t) \\ \dfrac{dS_{10}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1)S_{10}(t) + \lambda S_{00}(t) + \mu_2 S_{11}(t) \\ \dfrac{dS_{01}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)S_{01}(t) + \mu_1 S_{11}(t) \\ \dfrac{dS_Q(t)}{dt} = \lambda S_{11}(t) - (\mu_1 + \mu_2)S_Q(t) \\ S_{00}(t) + S_{10}(t) + S_{01}(t) + S_{11}(t) + S_Q(t) = 1 \end{cases} \qquad (1.30)$$

В системе уравнений (1.30) дифференциальное уравнение для вероятности состояния $S_{11}(t)$ заменено условием нормировки.

СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди



Расчетные зависимости при решении системы уравнений (1.30) методом Эйлера будут иметь вид:

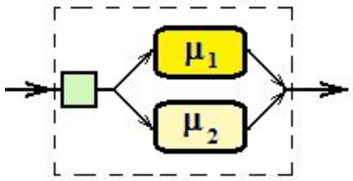
$$\begin{cases} S_{00}(i) = S_{00}(i-1) + h[-\lambda S_{00}(i-1) + \mu_1 S_{10}(i-1) + \mu_2 S_{01}(i-1)] \\ S_{10}(i) = S_{10}(i-1) + h[-(\lambda+\mu_1)S_{10}(i-1) + \lambda S_{00}(i) + \mu_2 S_{11}(i-1)] \\ S_{01}(i) = S_{01}(i-1) + h[-(\lambda+\mu_2)S_{01}(i-1) + \mu_1 S_{11}(i-1)] \\ S_Q(i) = S_Q(i-1) + h[\lambda S_{11}(i-1) - (\mu_1+\mu_2)S_Q(i-1)] \\ S_{11}(i) = 1 - S_{00}(i) - S_{10}(i) - S_{01}(i) - S_Q(i) \end{cases} \qquad (1.31)$$

где **h** – шаг по времени.

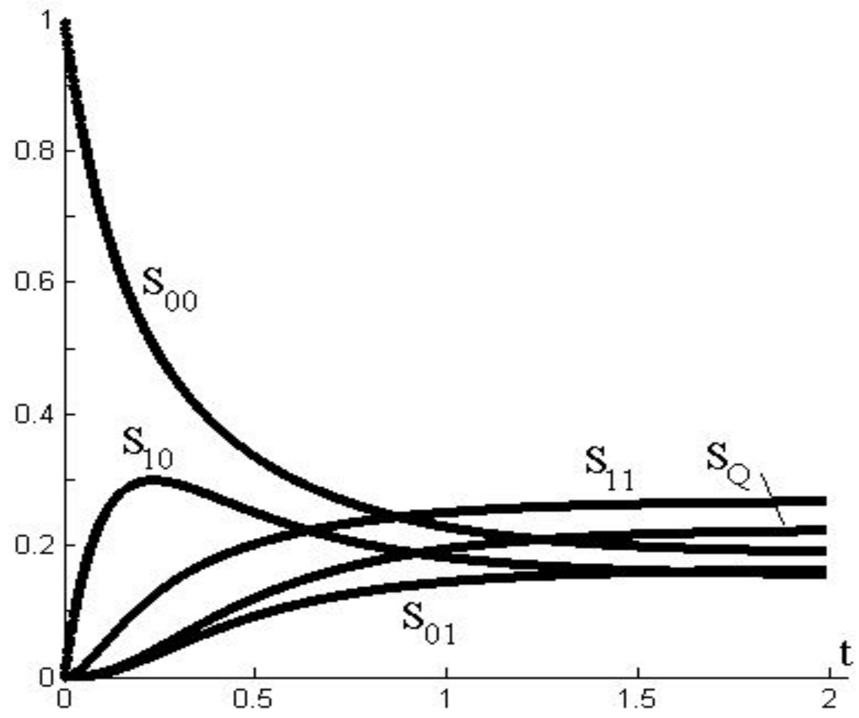
Для задания начальных условий положим, что в начальный момент времени рассматриваемая СМО простаивала, т.е. находилась в состоянии $\mathbf{A_{00}}$. Следовательно, вектор вероятности состояний СМО для начального момента времени будет иметь вид:

$$[S_k(0)] = [1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0] \qquad (1.32)$$

СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди

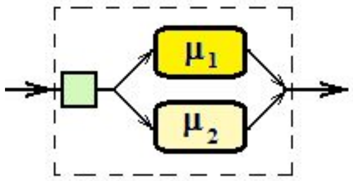


Решение системы уравнений при **λ** = 4 $с^{-1}$, $\boldsymbol{\mu_1}$ = 3,5 $с^{-1}$, $\boldsymbol{\mu_2}$ = 1,5 $с^{-1}$ и начальных условиях (1.32):



Изменение вероятностей состояний СМО во времени

СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди



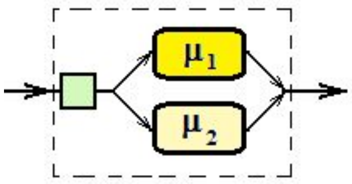
Система линейных алгебраических уравнений для стационарного режима рассматриваемой СМО будет иметь вид:

$$\begin{cases} -\lambda S_{00} + \mu_1 S_{10} + \mu_2 S_{01} = 0 \\ -(\lambda + \mu_1) S_{10} + \lambda S_{00} + \mu_2 S_{11} = 0 \\ -(\lambda + \mu_2) S_{01} + \mu_1 S_{11} = 0 \\ \lambda S_{11} - (\mu_1 + \mu_2) S_Q = 0 \\ S_{00} + S_{10} + S_{01} + S_{11} + S_Q = 1 \end{cases} \qquad (1.33)$$

Решение этой системы при указанных выше значениях интенсивностей потоков даст следующие значения стационарных вероятностей:

S_{00} = 0,19 ; S_{10} = 0,15 ; S_{01} = 0,16 ; S_{11} = 0,27 ; S_Q = 0,23.

СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди



Найдем некоторые показатели эффективности данной СМО.

1. ***Вероятность простоя*** системы: $\mathbf{P_{ПР} = S_{00}}$ = 0,19

2. ***Вероятность отказа*** в обслуживании: $\mathbf{P_{ОТК} = S_Q}$ = 0,23

3. ***Вероятность обслуживания***: $\mathbf{P_{ОБ} = 1\text{-}S_Q}$ = 0,78

4. ***Среднее число занятых каналов***. Для нашего случая этот показатель равен $\mathbf{K = S_{10} + S_{01} + 2S_{11}}$ = 0,85

5. ***Среднее число заявок в очереди*** : $\mathbf{L = S_Q}$ = 0,23

6. ***Среднее число заявок в СМО*** : $\mathbf{K_S = K + L}$ = 1,08

7. ***Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:***
$\mathbf{t_C = K_S/(\mu_1 + \mu_2)}$ = 0,216 с

8. ***Пропускная способность*** системы: $\mathbf{C = P_{ОБ}\,\lambda}$ = 3,12 заявок в секунду.