

Поверхность

***Поверхность*, одно из основных геометрических понятий**

- Поверхности составляют широкое многообразие нелинейных фигур трехмерного пространства. Инженерная деятельность человека связана непосредственно с конструированием, расчетом и изготовлением различных поверхностей. Большинство задач прикладной геометрии сводится к автоматизации конструирования, расчета и воспроизведения сложных технических поверхностей. Способы формообразования и отображения поверхностей, начертательной геометрии составляют основу инструментальной базы трехмерного моделирования современных графических редакторов.

- **Рассматривая поверхности как непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая уравнением вида $F(x,y,z)=0$, можно выделить алгебраические поверхности ($F(x,y,z)$ - многочлен n -ой степени) и трансцендентные ($F(x,y,z)$ - трансцендентная функция).**
- **В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому целесообразно поверхность рассматривать как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.**

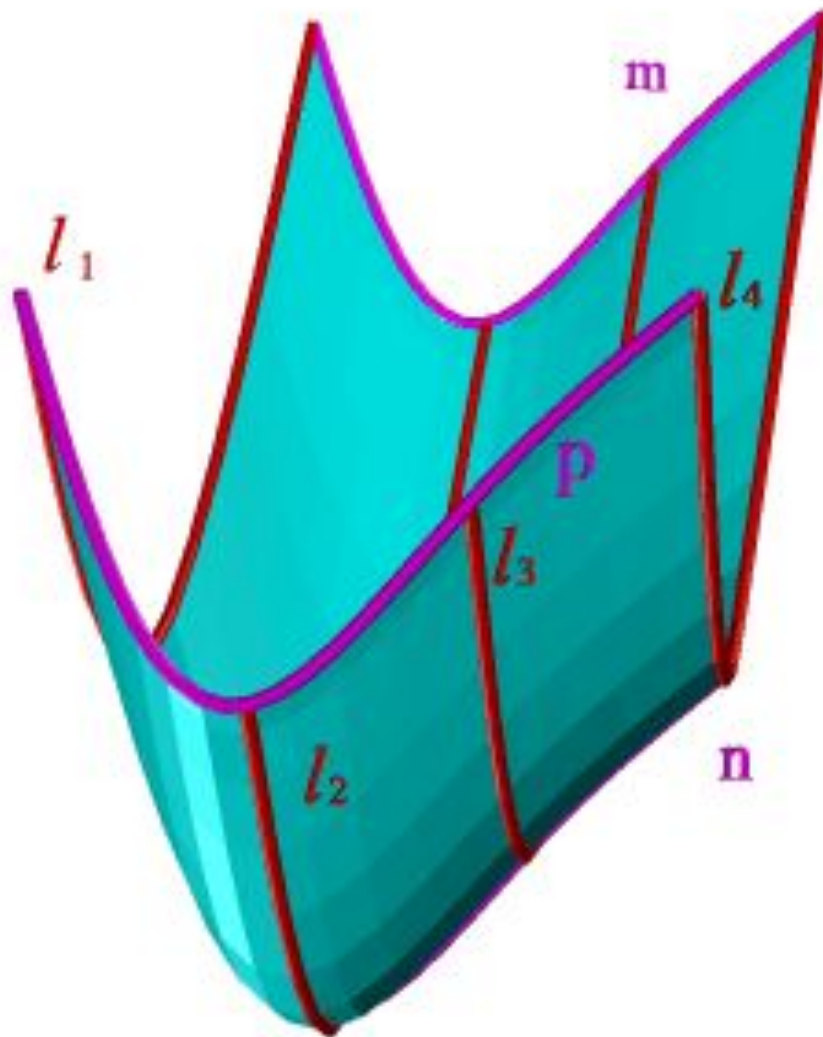
ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Поверхность можно рассматривать, как совокупность последовательных положений линии l , перемещающейся в пространстве по определенному закону.
- В процессе образования поверхности линия l может оставаться неизменной или менять свою форму - изгибаться или деформироваться. Для наглядности изображения поверхности на эпюре Монжа закон перемещения линии l целесообразно задавать графически в одной линии или целого семейства линий ($m, n, p...$).

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Подвижную линию принято называть *образующей*, неподвижные – *направляющими*.
- Такой способ образования поверхности принято называть *кинематическим*.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ



ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- По виду образующей различают поверхности *линейчатые* и *нелинейчатые*.
- образующая *линейчатых* — прямая линия,
- *нелинейчатых* — кривая.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Линейчатые поверхности в свою очередь разделяют на так называемые *развертывающие*, которые можно без складок и разрывов развернуть на плоскость и *неразвертывающиеся*.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

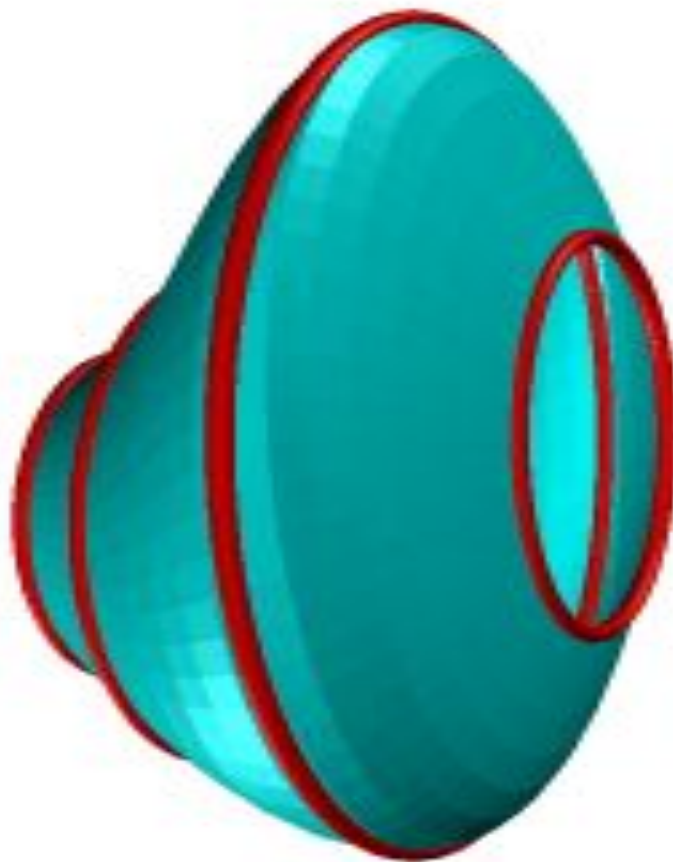
- Значительный класс поверхностей формируется движением окружности постоянного или переменного радиуса. Это так называемые *циклические* поверхности.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

Циклические поверхности подразделяются на:

- · Поверхности вращения;
- · Винтовые поверхности;
- · Поверхности с плоскостью параллелизма;
- · Поверхности переноса.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ



ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Множество линий, заполняющих поверхность так, что через каждую точку поверхности проходит одна линия этого множества, называемая **каркасом** поверхности.
- Поверхность может быть задана и конечным множеством точек, которое принято называть **точечным каркасом**.

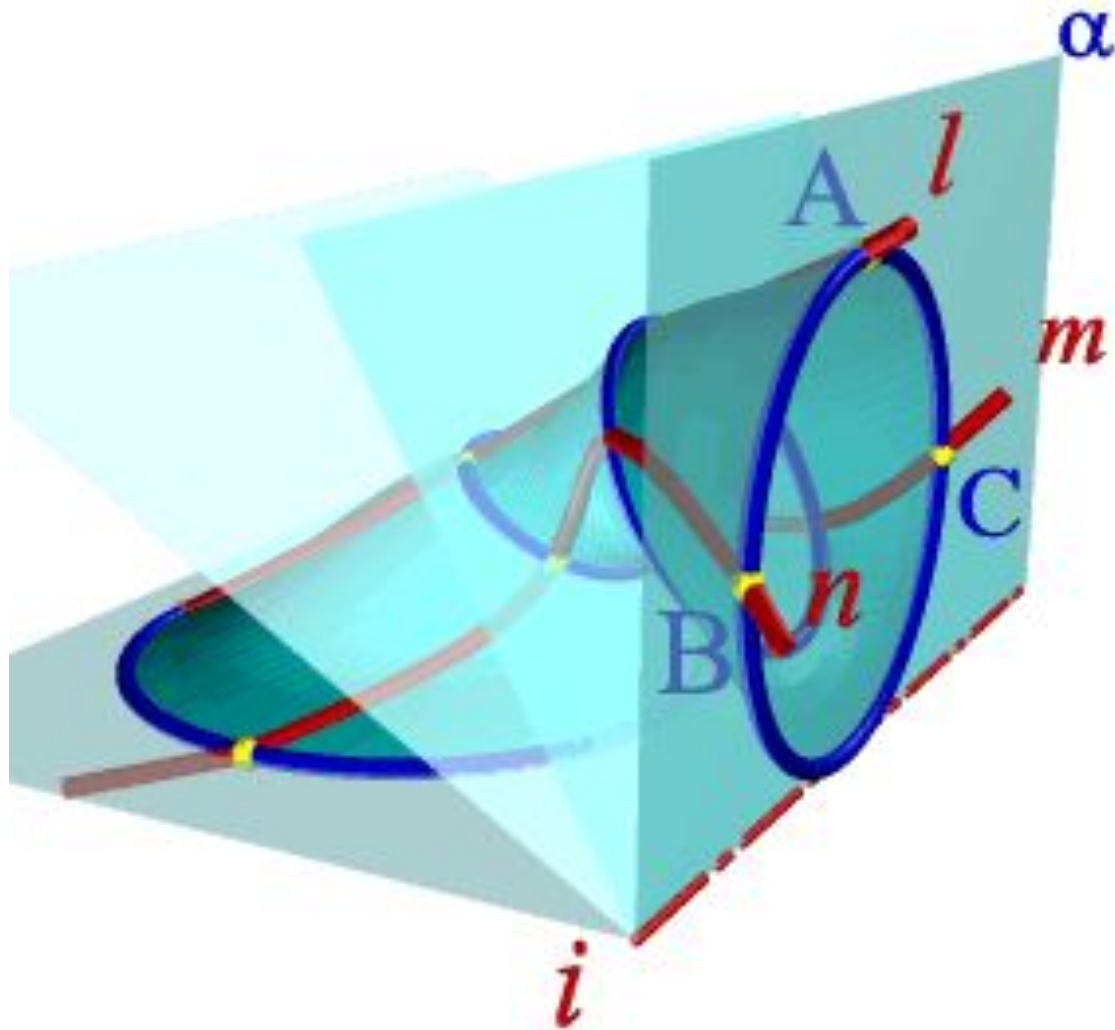
ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Проекции каркаса могут быть построены, если задан **определитель** поверхности – совокупность условий, задающих поверхность в пространстве и на чертеже.
- Различают две части определителя: геометрическую и алгоритмическую.

Определитель:

- Геометрическая часть определителя представляет собой набор постоянных геометрических элементов (точек, прямых, плоскостей и т.п.), которые могут и не входить в состав поверхности.
- Вторая часть – алгоритмическая (описательная) – содержит перечень операций, позволяющий реализовать переход от фигуры постоянных элементов к непрерывному каркасу.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ



Определитель:

- Геометрическая часть определителя: три направляющих l , m , n , ось i пучка плоскостей
- Алгоритмическая часть: выделяем из пучка плоскостей с осью i плоскость α ; находим точки A , B , C , в которых α пересекает соответственно направляющие l , m , n .
Строим окружность, определяемую тремя найденными точками. Переходим к следующей плоскости пучка и повторяем построение.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- ***Поверхности вращения*** – это поверхности созданные при вращении образующей ***m*** вокруг оси ***i*** .

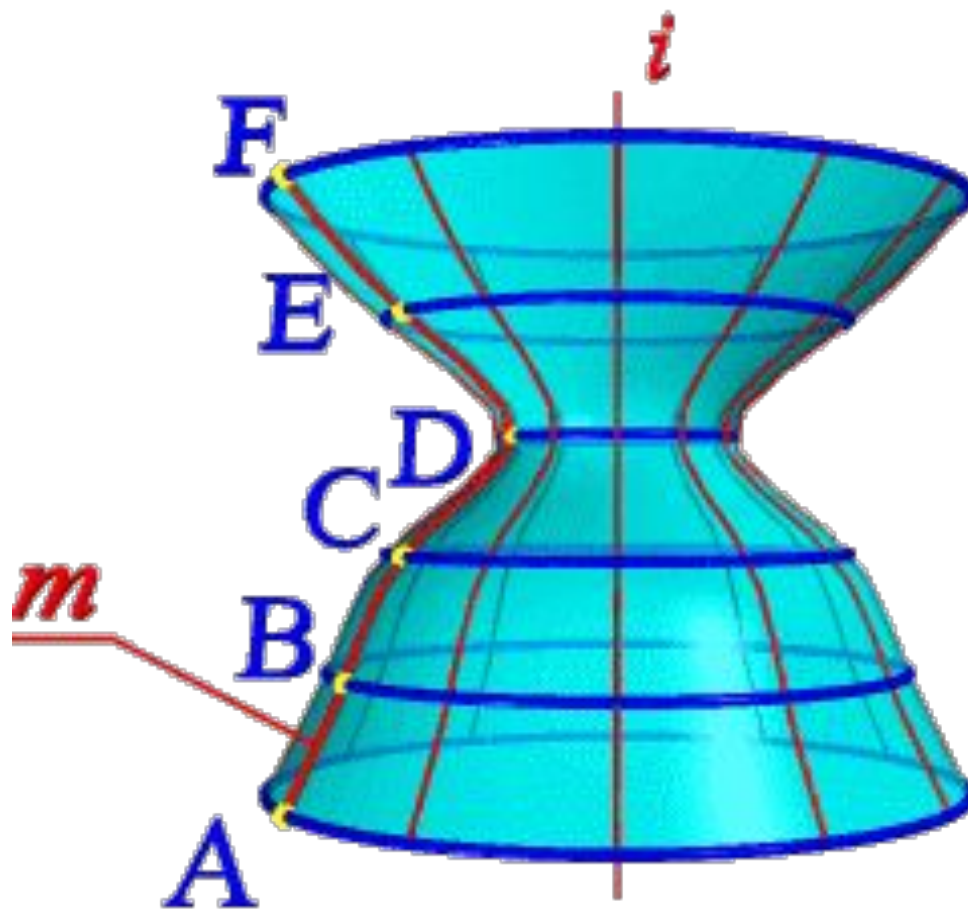
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Геометрическая часть определителя состоит из двух линий: образующей m и оси i .
- Алгоритмическая часть включает две операции:
 1. На образующей m выделяют ряд точек $A, B, C, \dots F$;
 2. Каждую точку вращают вокруг оси i .

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ



ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ



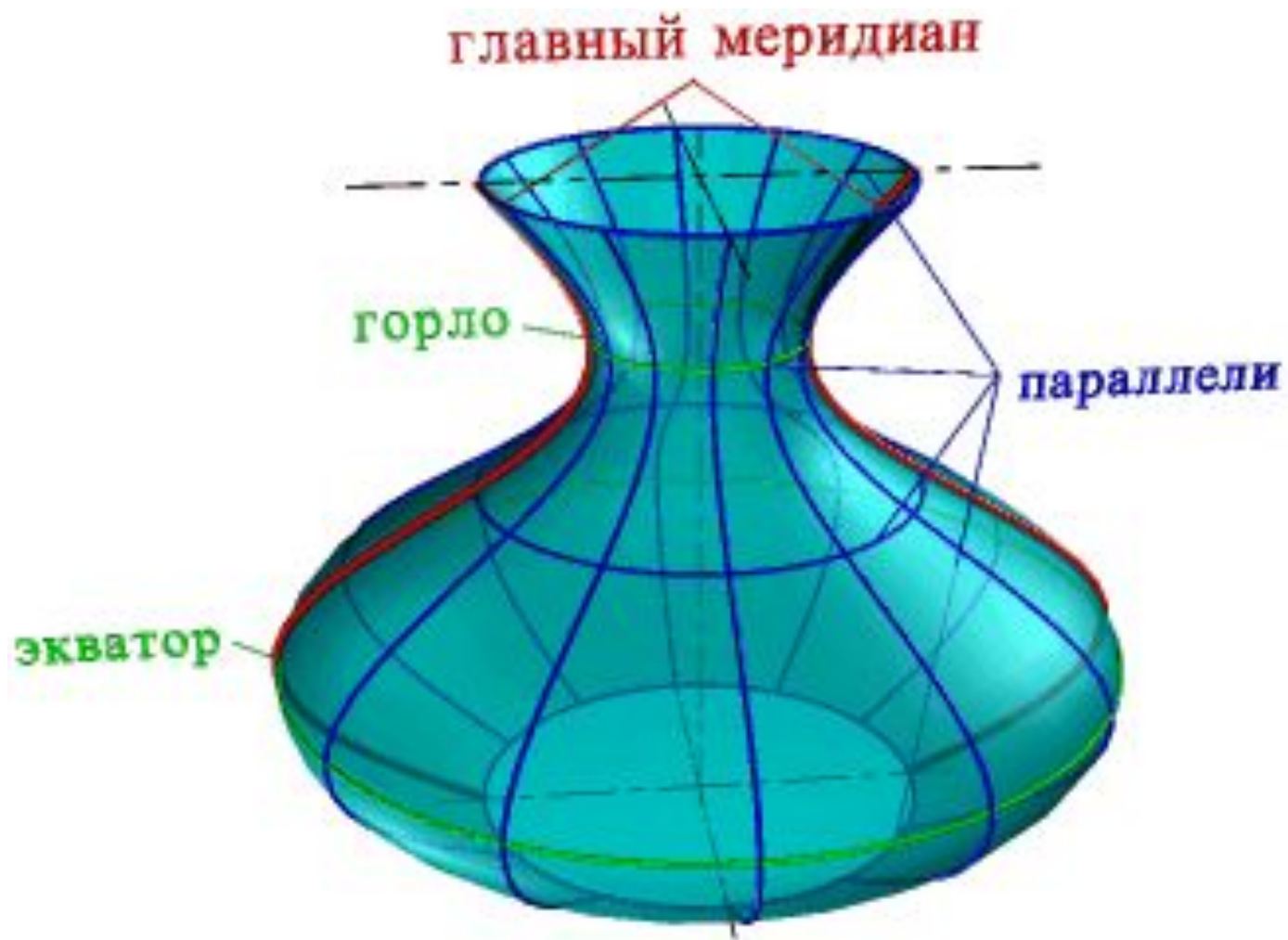
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Так создается каркас поверхности, состоящей из множества окружностей, плоскости которых расположены перпендикулярно оси i . Эти окружности называются ***параллелями***;
- наименьшая параллель называется ***горлом***, наибольшая – ***экватором***.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Из закона образования поверхности вращения вытекают два основных свойства:
- 1. Плоскость перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – **параллели**.
- 2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям – **меридианам**.
- Плоскость проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций называется **плоскостью главного меридиана**,
- а линия, полученная в сечении, – **главным меридианом**.

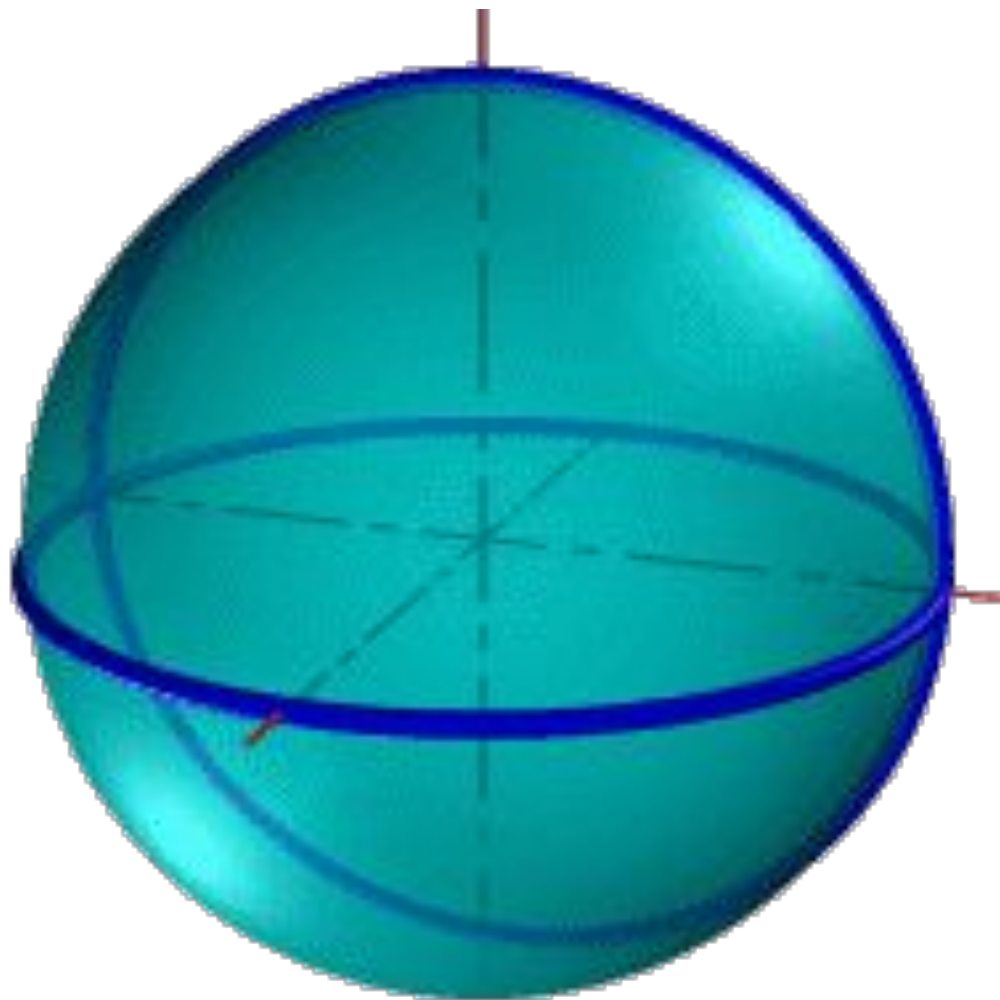
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ



ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими:
- **Сфера** – образуется вращением окружности вокруг её диаметра

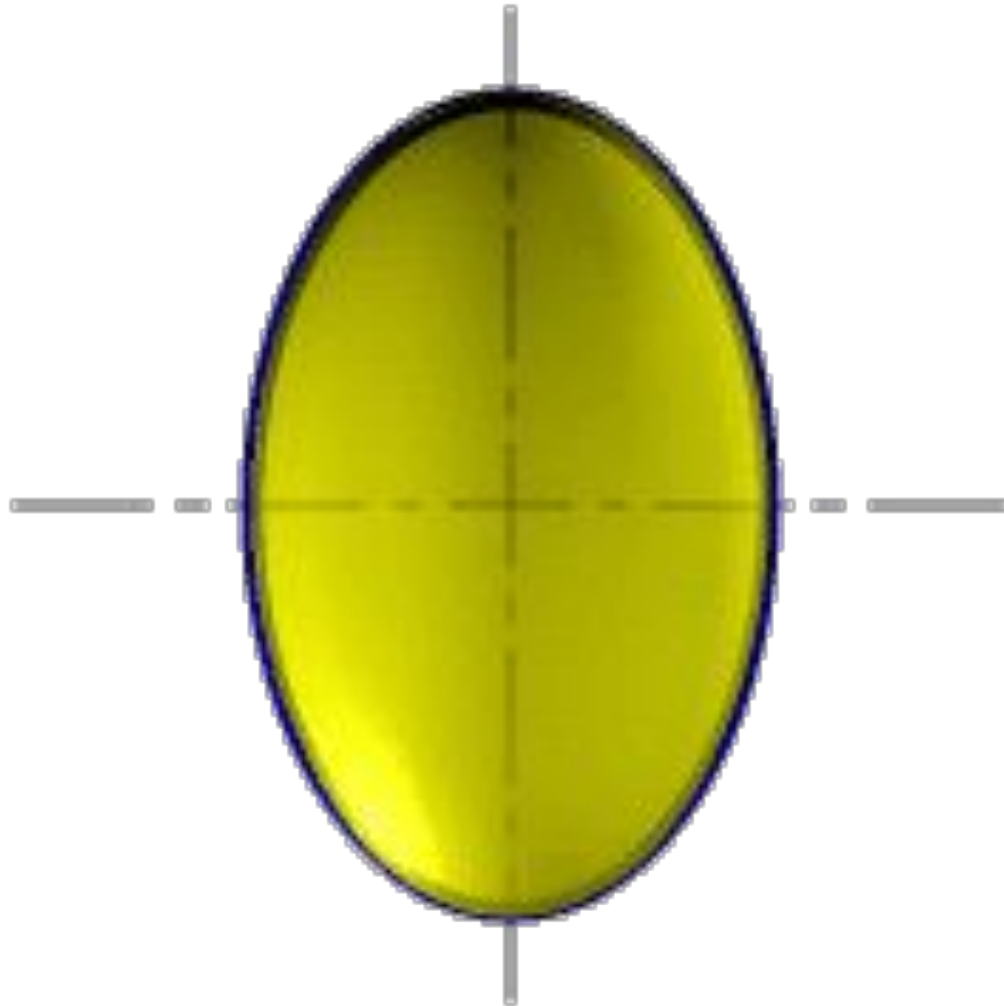
Сфера



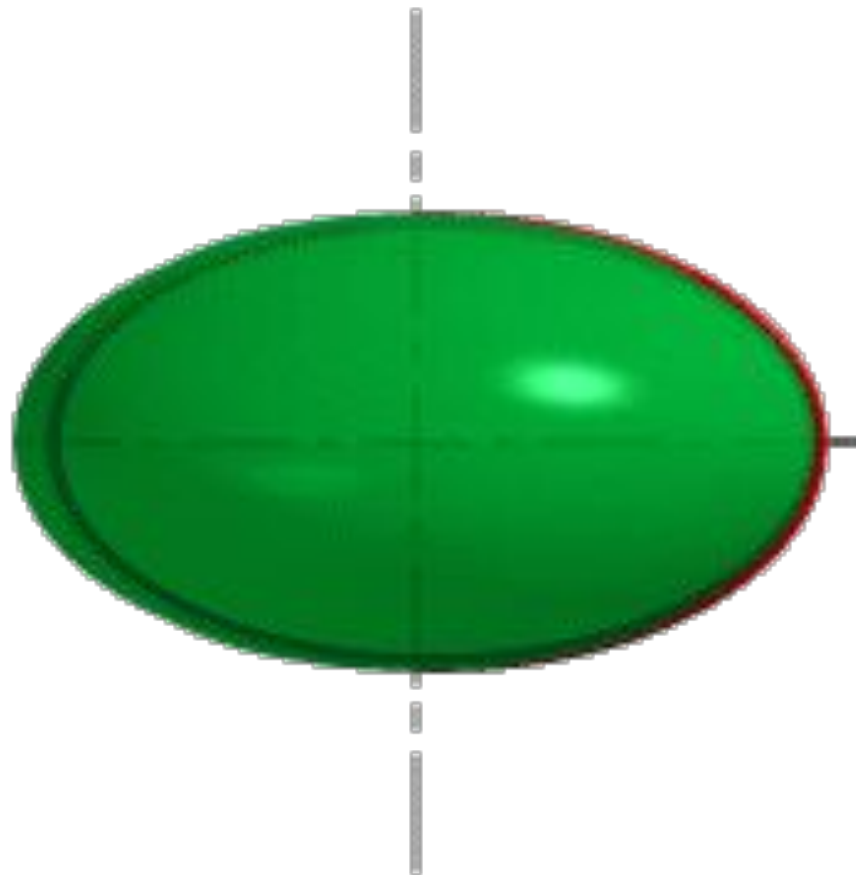
Эллипсоиды

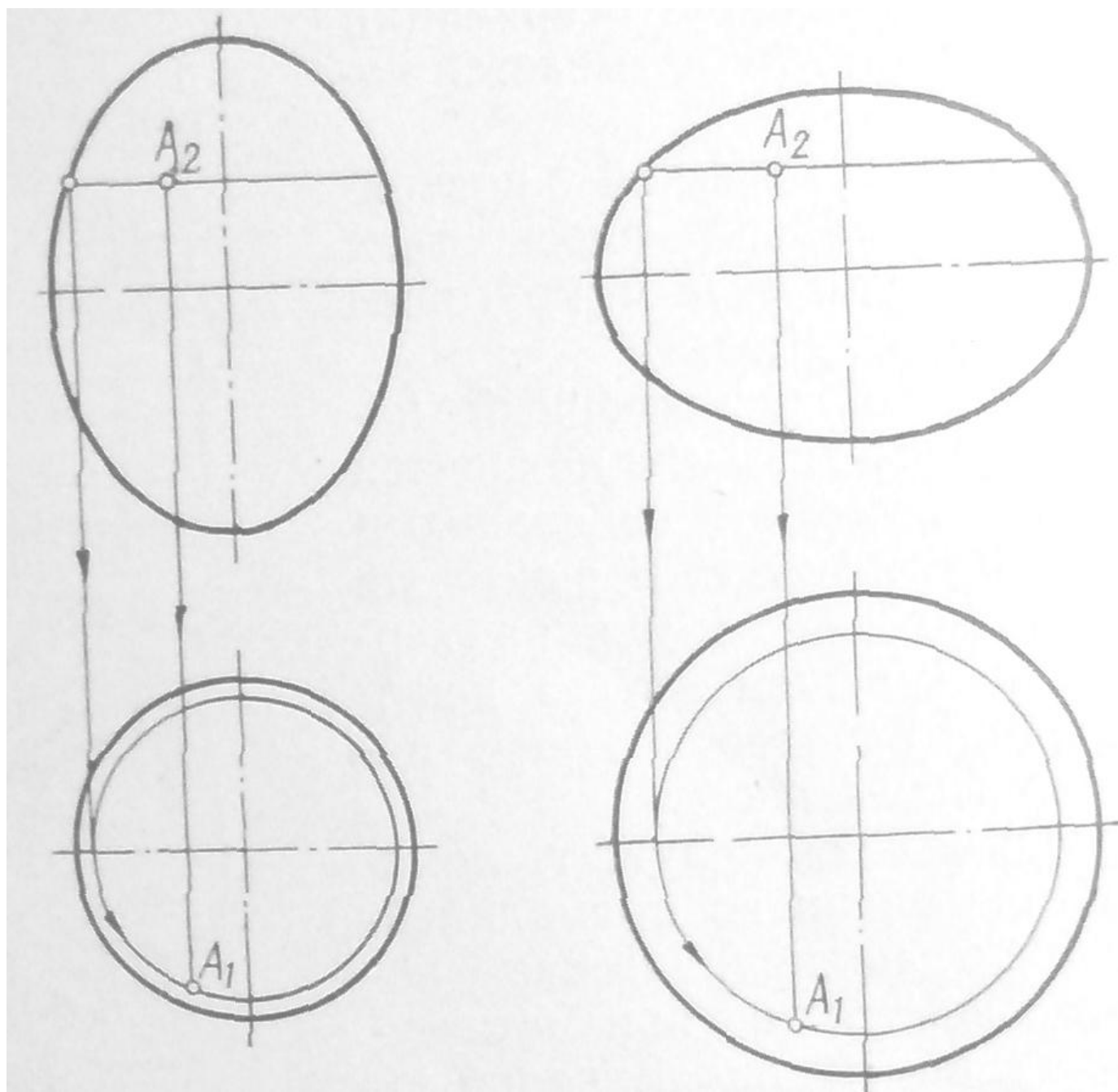
- При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в ***эллипсоиды***, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг большой оси то эллипсоид называется ***вытянутым***, если вокруг малой – ***сжатым*** или ***сфероидом***.

Образование вытянутого эллипсоида



сжатый эллипсоида или *сфероидом*

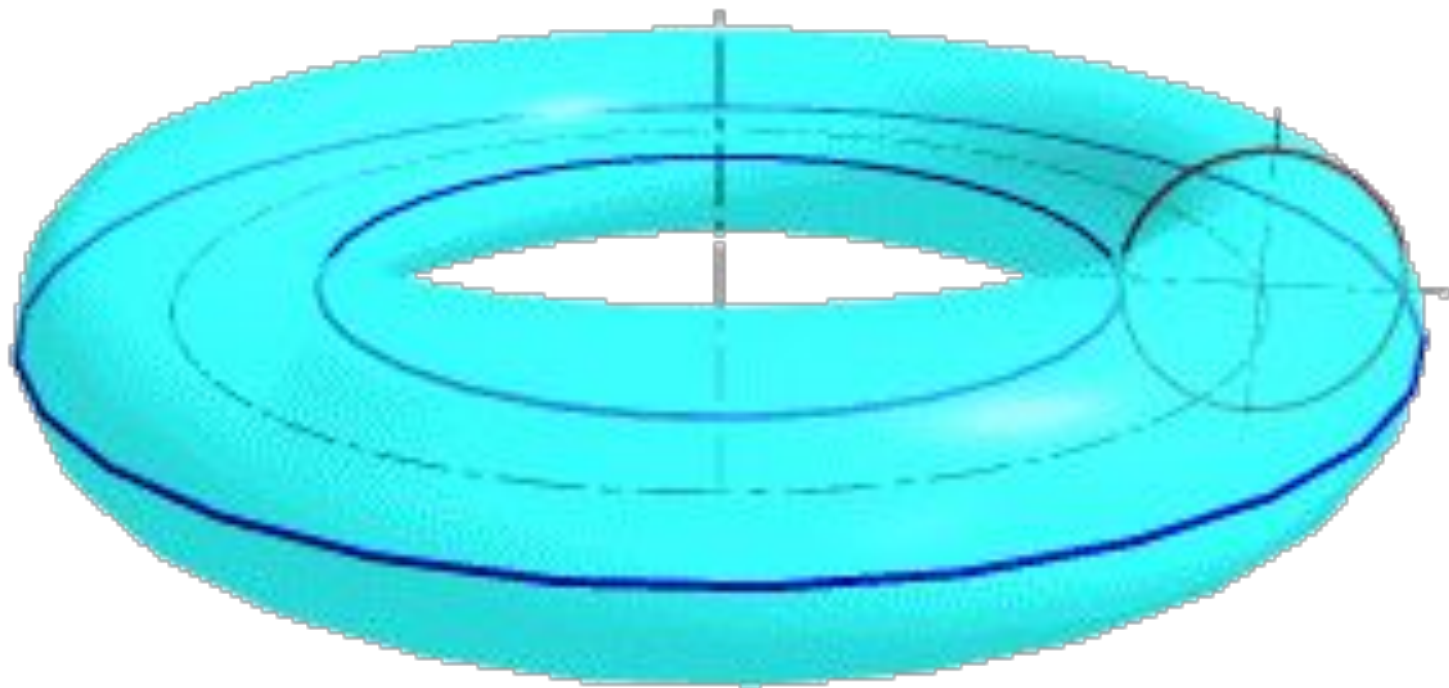




ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- ***Тор*** – поверхность тора формируется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности

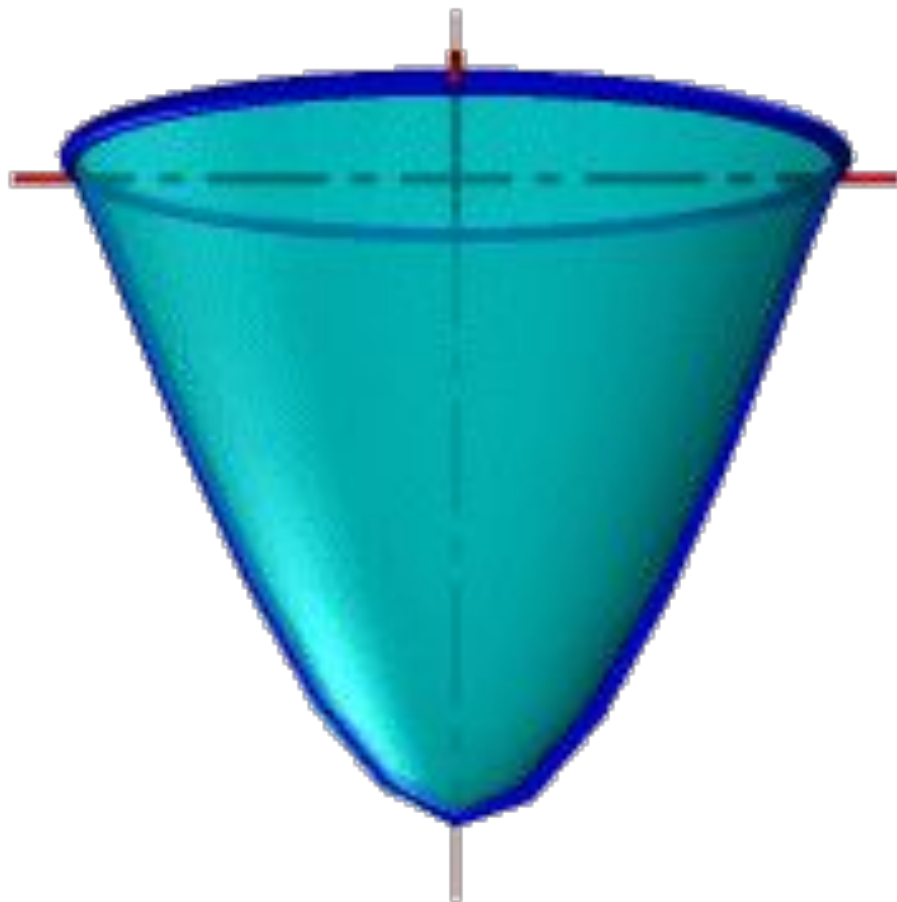
Top

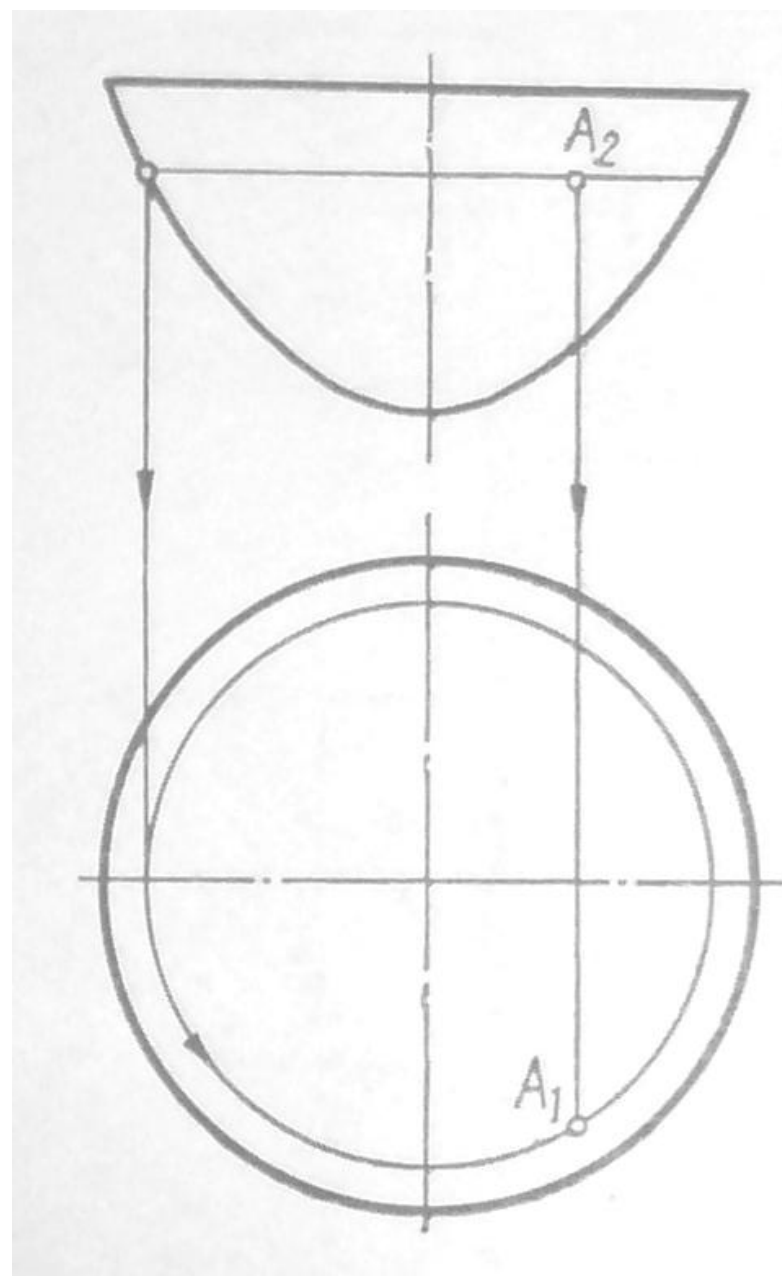


ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- ***Параболоид вращения*** – образуется при вращении параболы вокруг своей оси

Параболоид вращения

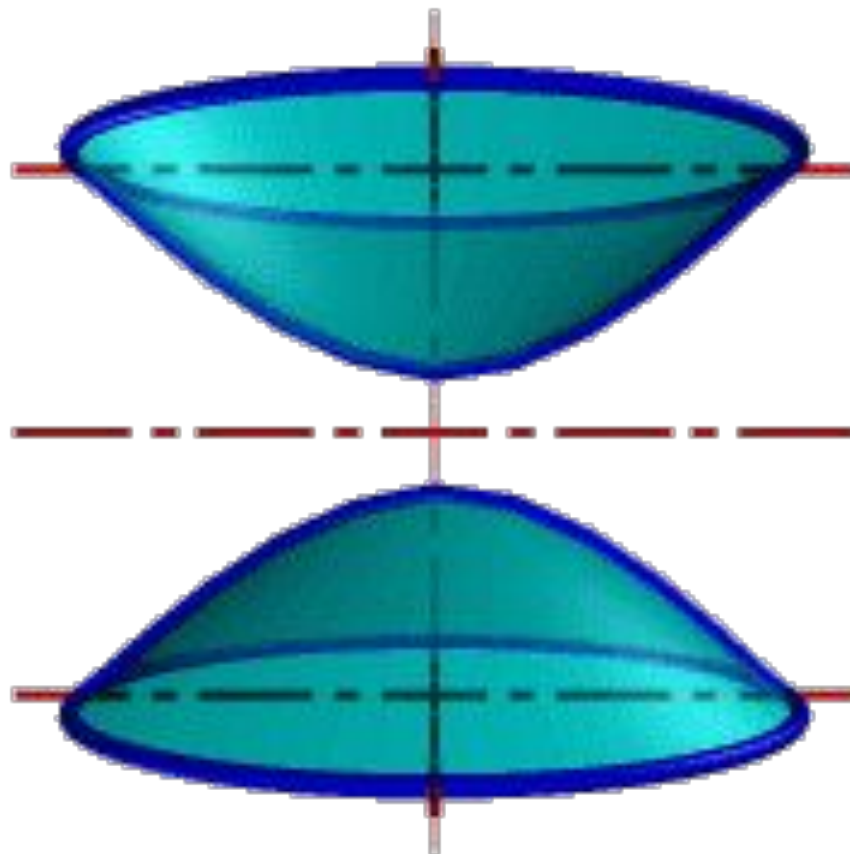
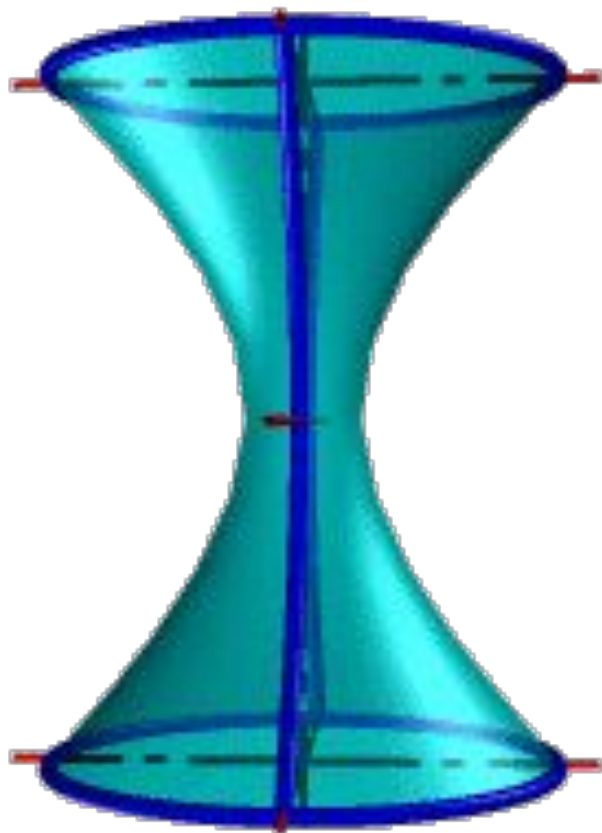


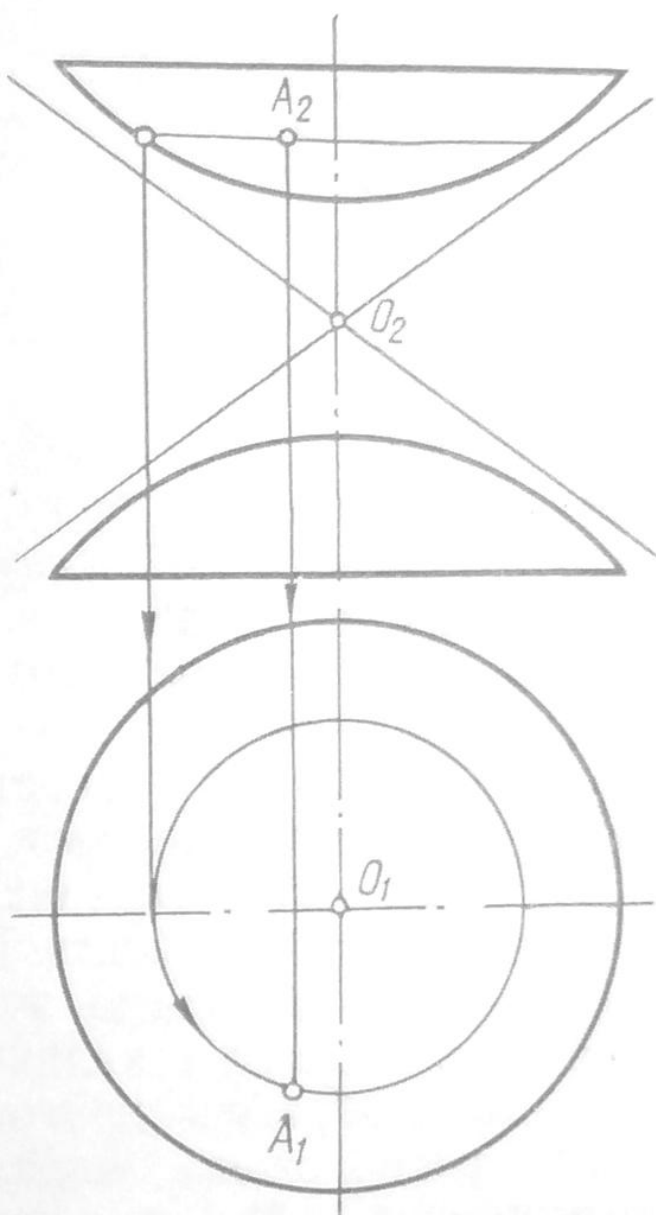
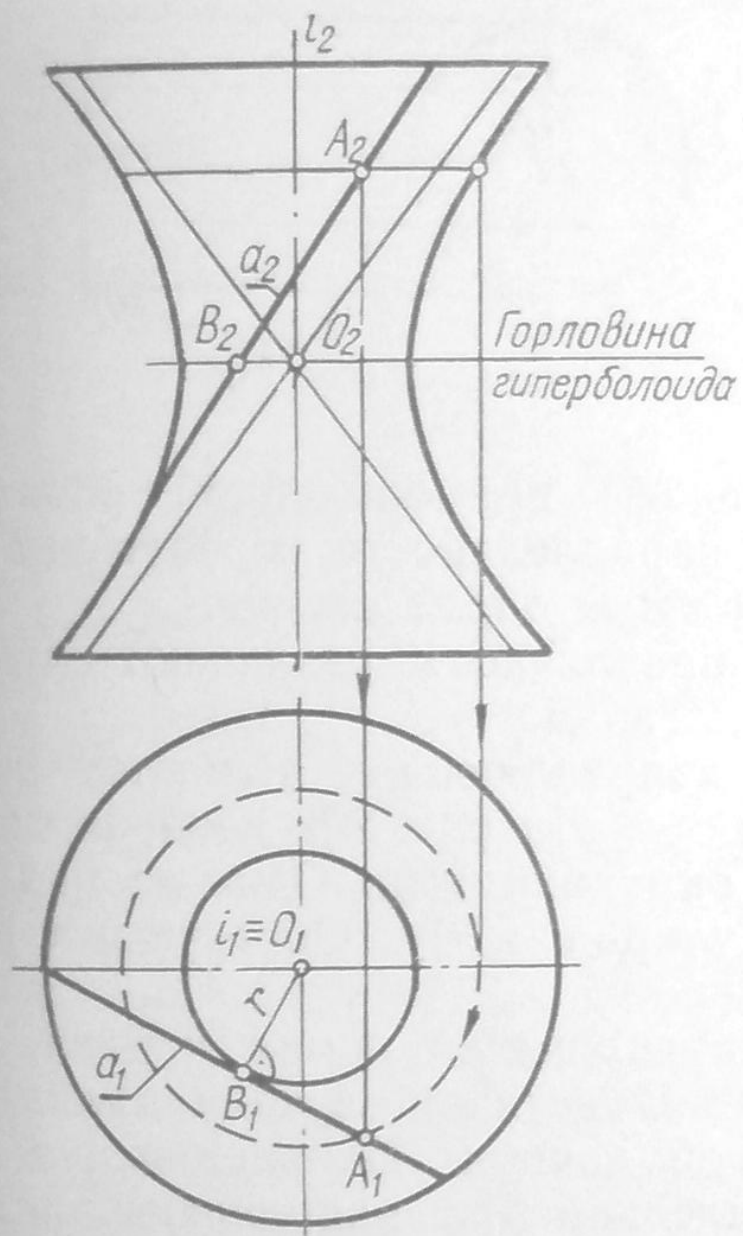


Гиперболоид вращения

- различают ОДНО и ДВУХ полостной гиперboloиды вращения.
- Первый получается при вращении вокруг мнимой оси, а второй – вращением гиперболы вокруг действительной оси.

Гиперболоид вращения

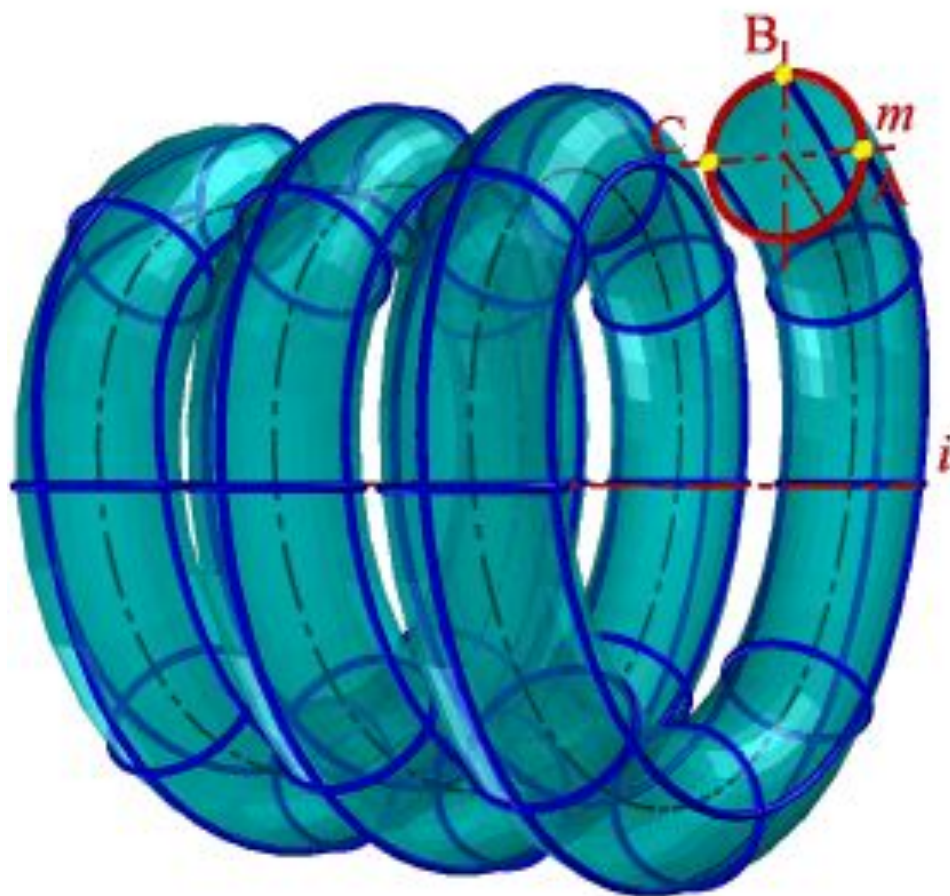




ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Винтовые поверхности образуются винтовым движением некоторой линии – образующей.
- Под винтовым движением понимается совокупность двух движений: поступательного параллельно некоторой оси, и вращательного, вокруг той же оси.

ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ



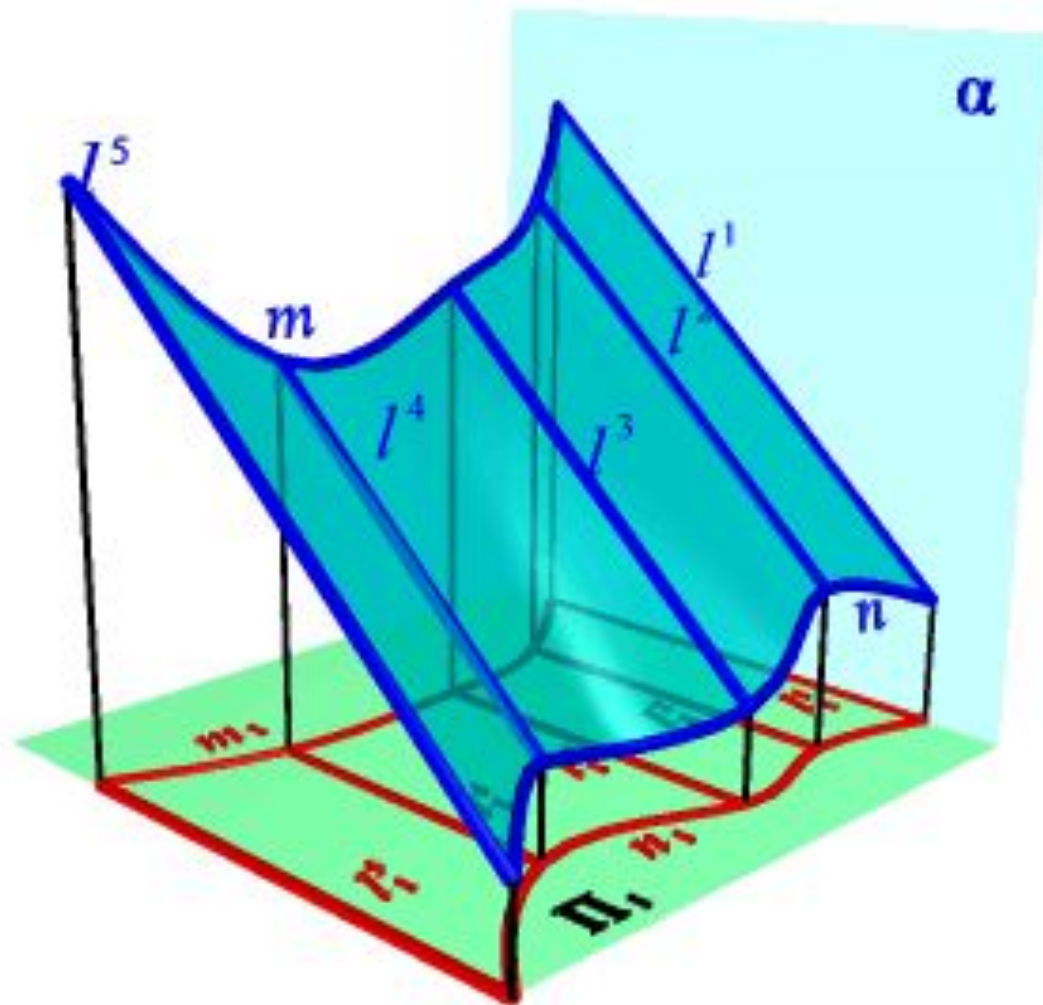
ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Геометрическая часть определителя винтовой поверхности ни чем не отличается от поверхности вращения и состоит из двух линий: образующей m , и оси i .
- Алгоритмическая часть:
 - 1. На образующей m выделяют ряд точек **$A, B, C, \dots$**
 - 2. Строят винтовые линии заданного шага и направления, по которым перемещаются заданные точки.

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

- Поверхность с плоскостью параллелизма представляет собой множество прямых линий l (образующих), параллельных некоторой плоскости α (плоскости параллелизма) и пересекающих две данные направляющие m, n .

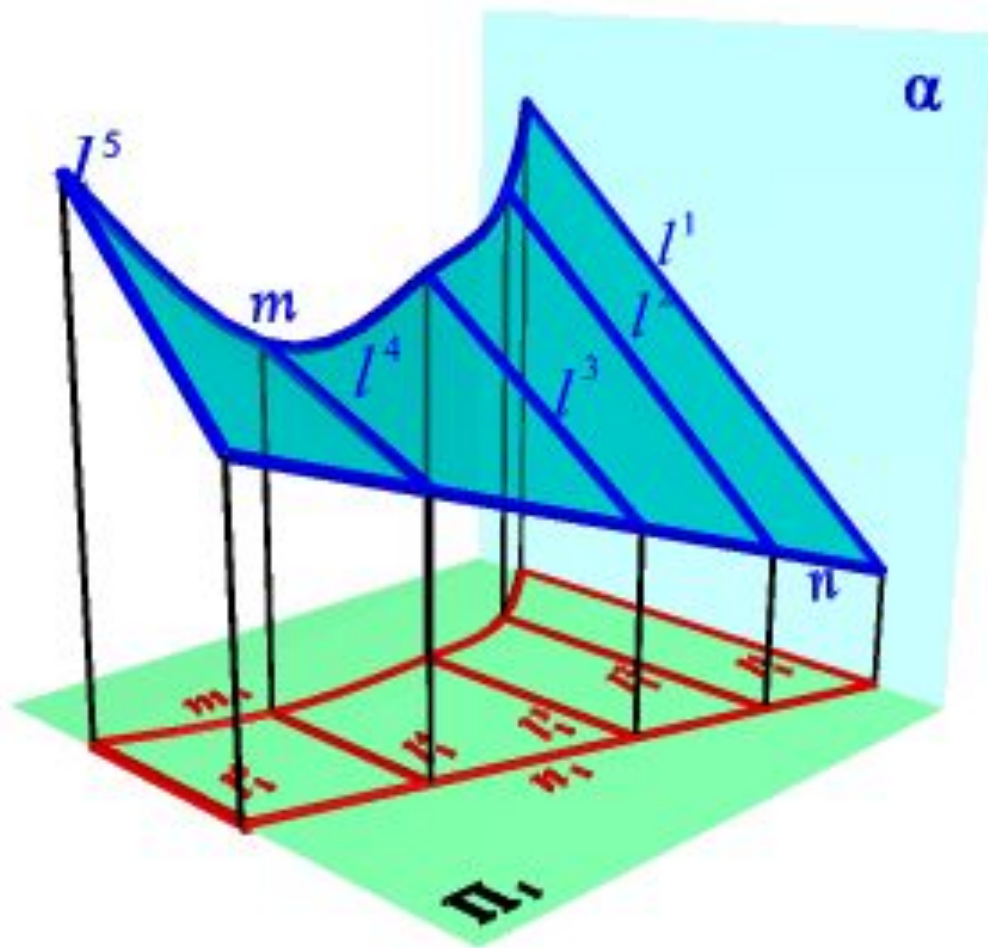
ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА



ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

- В зависимости от формы направляющих образуются три частных вида поверхностей.
- ***Цилиндроид***. Цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим кривым линиям, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма

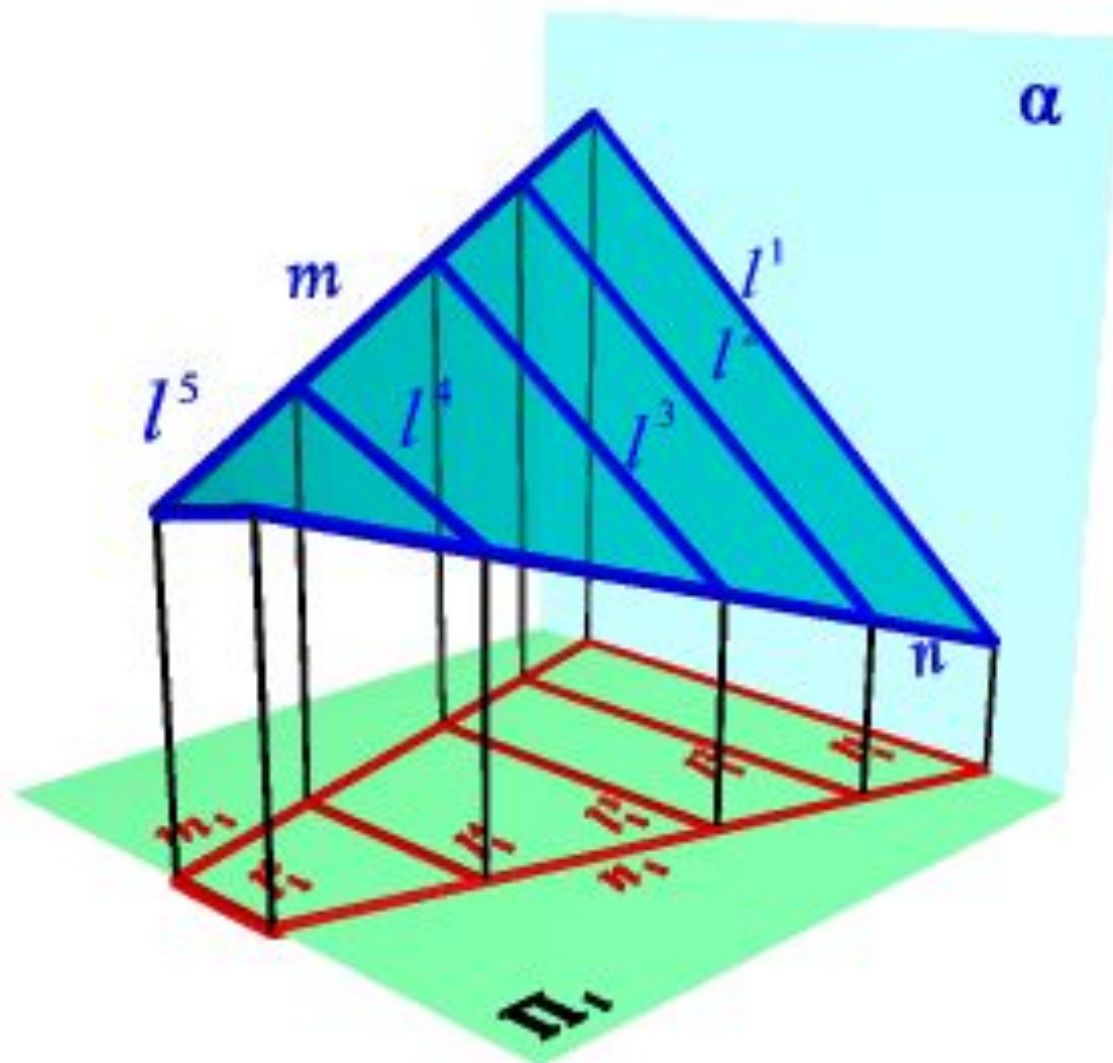
Цилиндроид



ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

- **Коноид.** Коноидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых кривая линия, а другая прямая, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма.

Конус.



ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

- Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей - плоской кривой линии ***m*** по криволинейной направляющей ***n***.

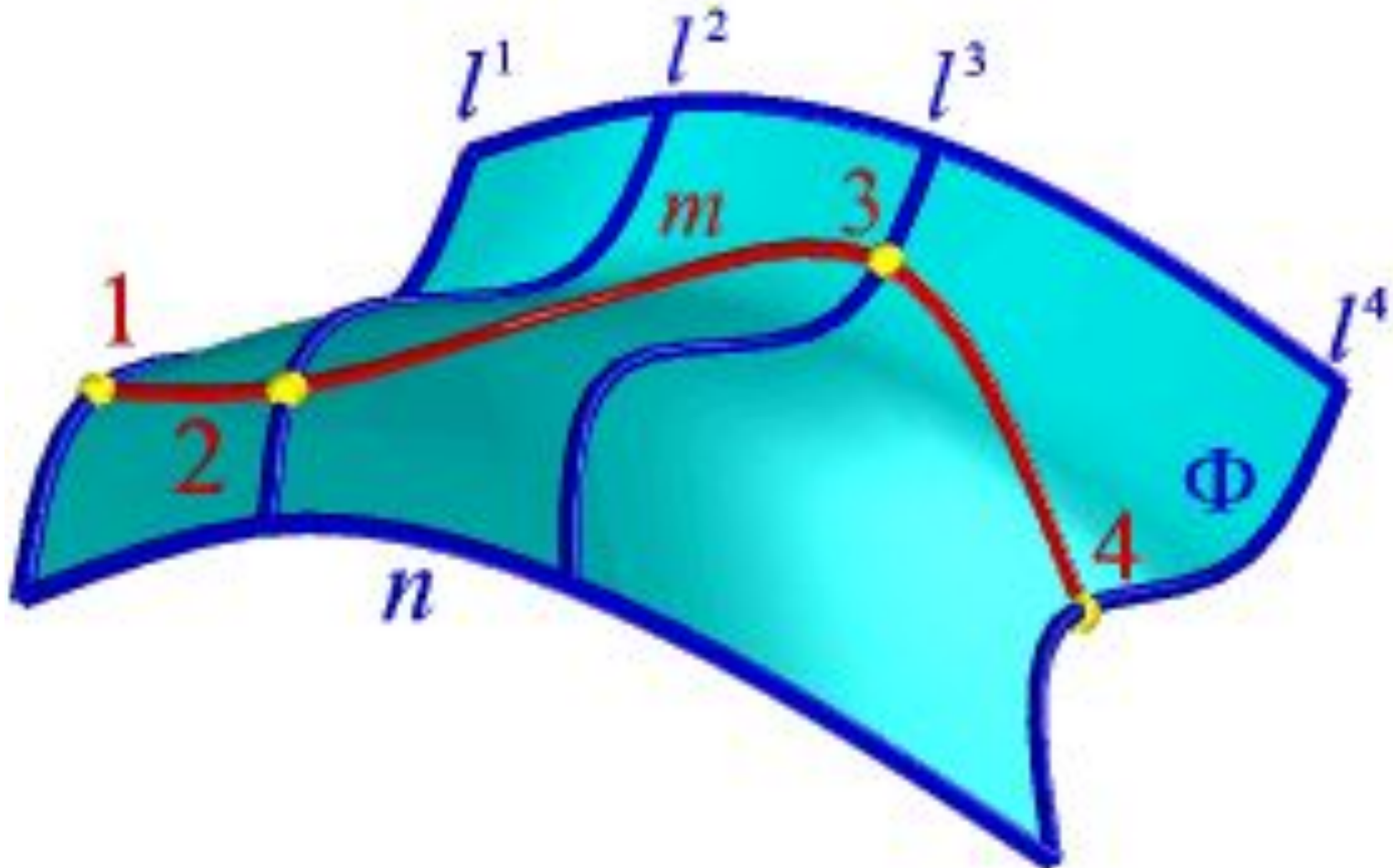
ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

- Геометрическая часть определителя состоит из двух кривых линий образующей - m и направляющей – n .
- Алгоритмическая часть определителя содержит перечень операций:
- На направляющей n выбираем ряд точек $A, B, C, \dots$
- Строим векторы $AB, BC, \dots$
- Осуществляем параллельный перенос линии m по векторам $AB, BC, \dots$
- Наглядным примером плоскости параллельного переноса может служить скользящая опалубка, применяемая в строительстве.

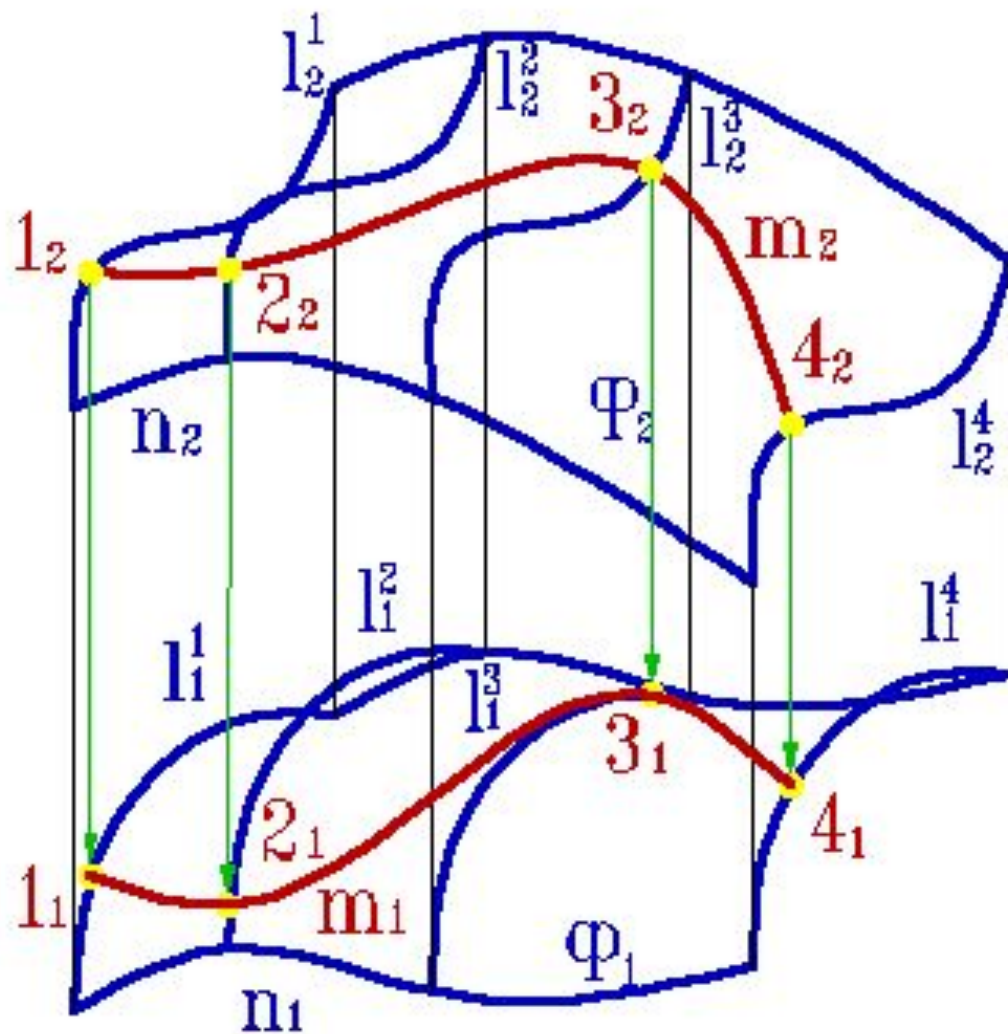
ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Для определения принадлежности точки и линии поверхности рассмотрим следующие позиционные задачи:
- **Задача 1.** Построение линии принадлежащей поверхности, если одна из проекций линии задана.
- Дано: 1. Поверхность Φ , заданная проекциями каркаса состоящих из образующих линий l и направляющей n .
- 2. Проекция линии $m2$, принадлежащей поверхности Φ .

ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ



ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ



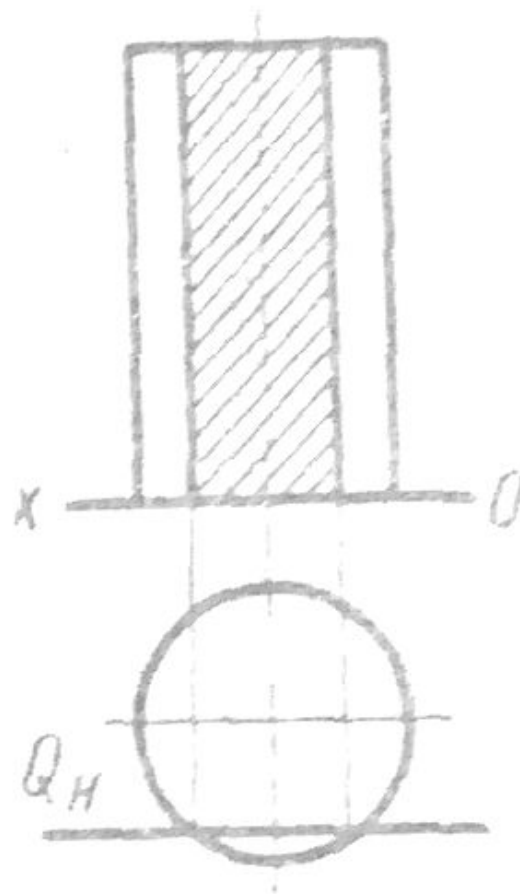
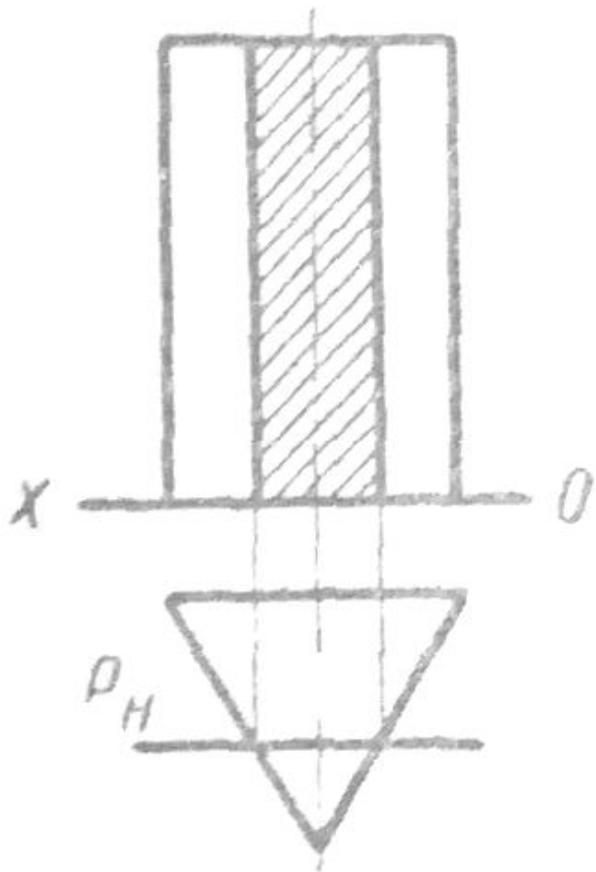
ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Алгоритм решения задачи:
- 1. Находим точки **12, 22, 32, 42** пересечения проекции линии ***m2*** с проекцией каркаса поверхности, т.е. соответственно с проекциями линий ***l12, l22, l32, l42*** .
- 2. По линиям связи находим проекции точек ***11, 21, 31, 41***, как точки лежащие на проекциях образующих каркаса соответственно ***l11, l21, l31, l41*** и определяющих положение проекции линии ***m1*** на поверхности **Φ** .

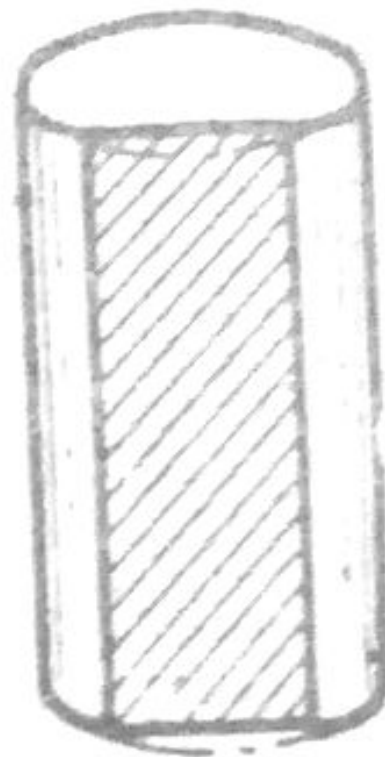
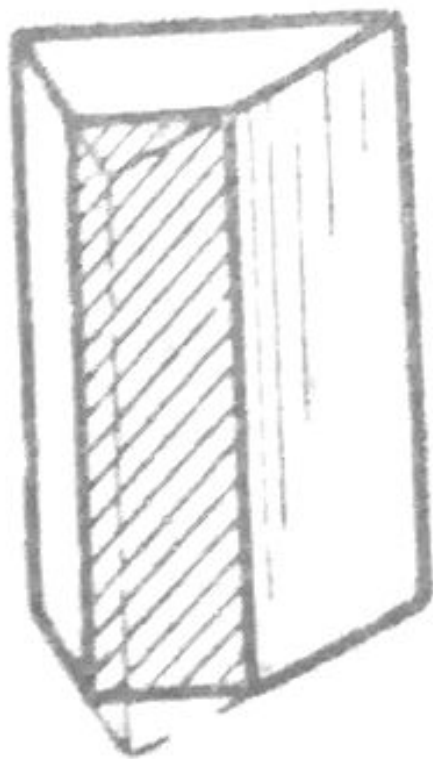
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- **Пересечение плоскостью тел с параллельными образующими (призмы и цилиндры).**
- Простейшие сечения получают плоскостями, параллельными плоскостям проекций:
 - 1) фронтальной
 - 2) горизонтальной плоскостям

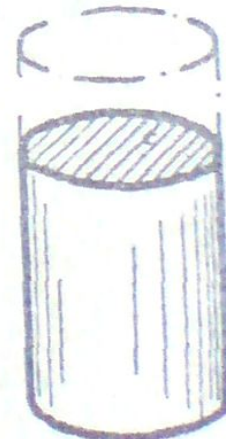
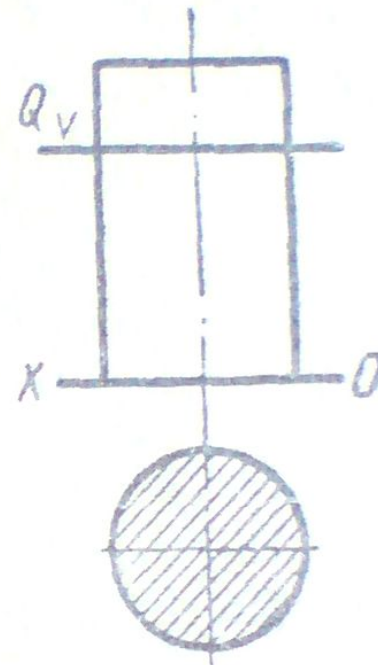
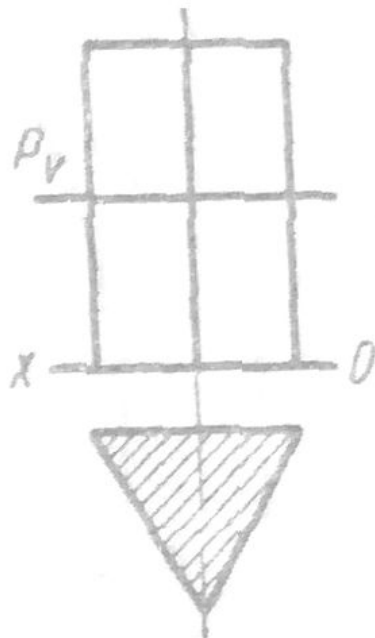
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



Построение линий пересечения поверхностей

*В общем случае линия пересечения
двух кривых поверхностей
представляет из себя
пространственную кривую линию
порядок которой равен
произведению порядков
поверхностей.*

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- Наиболее простым является случай, когда плоскость проецирующая.
- Рассмотрим решение задачи по определению линии пересечения сферы фронтально - проецирующей плоскостью α

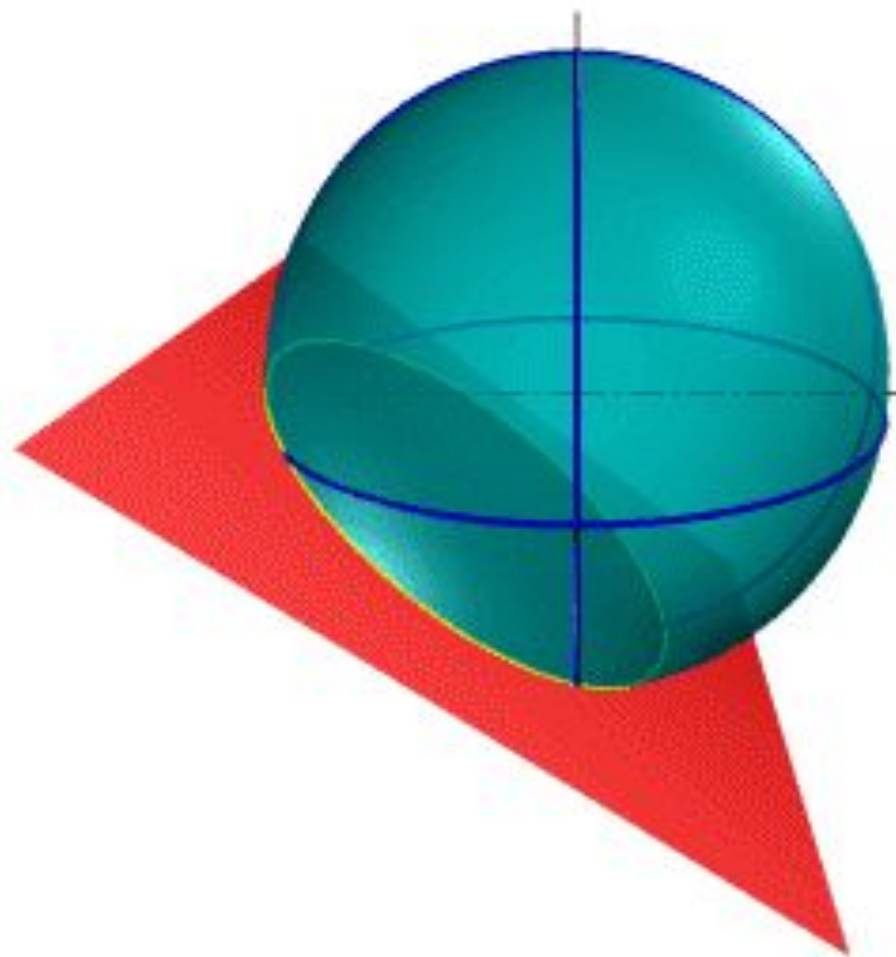
МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

- Вспомогательные секущие плоскости чаще всего выбирают проецирующими и параллельными одной из плоскостей проекций - плоскостями уровня.
- Этот способ рекомендуется применять, если сечения заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямыми линиями или окружностями.

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

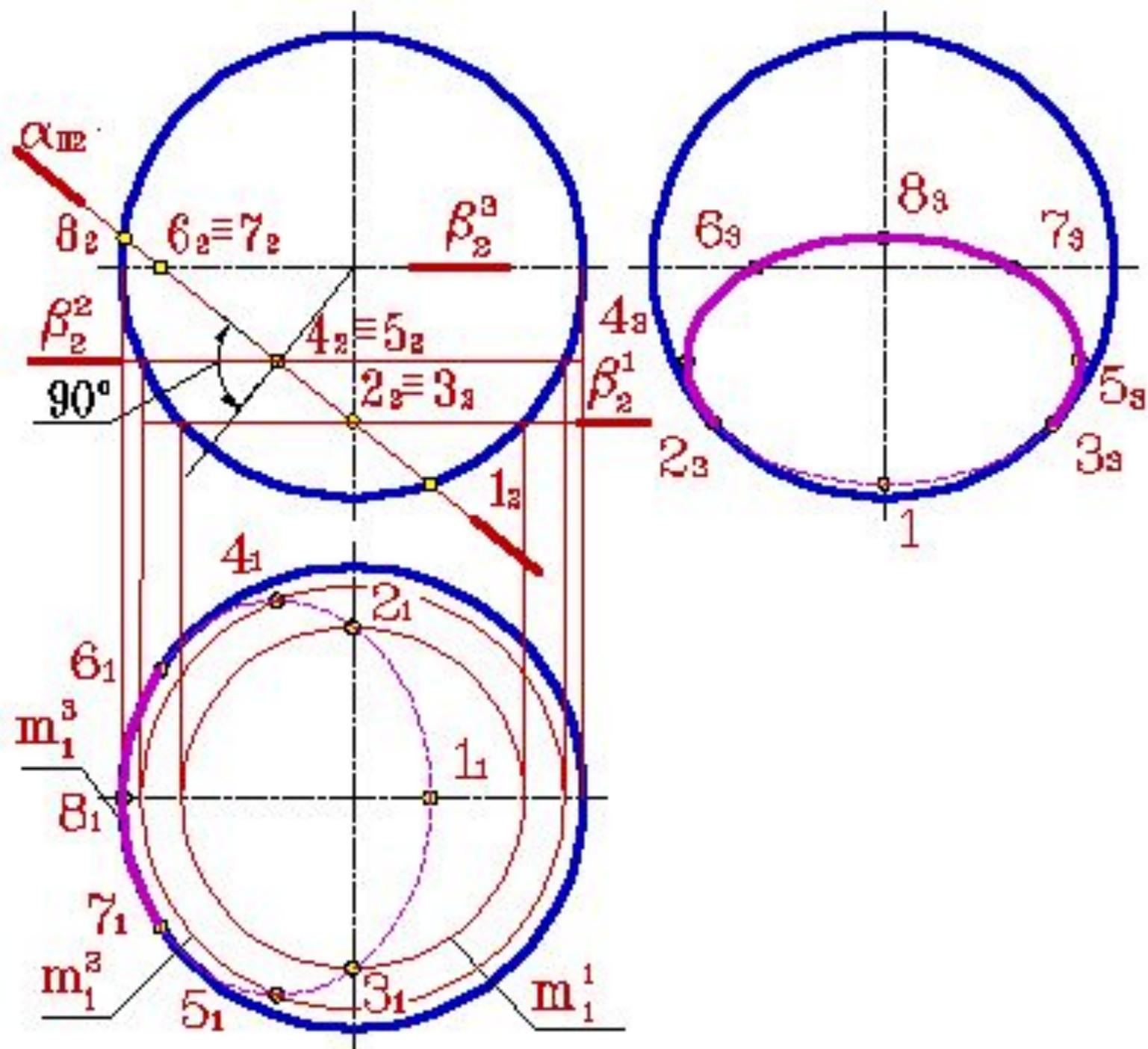
- Этот способ рекомендуется применять, если сечения заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямыми линиями или окружностями. Такая возможность существует в трех случаях:
- **1. Если образующие (окружности) расположены в общих плоскостях уровня;**
- **2. Если в общих плоскостях уровня оказываются прямолинейные образующие линейчатой поверхности и окружности циклической;**
- **3. Линейчатые каркасы заданных поверхностей принадлежат общим плоскостям уровня или пучкам плоскостей общего положения.**

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- Окружность, по которой плоскость α пересекает сферу, проецируется на плоскости **горизонтальную** и **профильную** в виде эллипса, а на **фронтальную** плоскость в прямую линию ограниченную очерком сферы



- **Охарактеризуем выбранные для построения точки:**
- ·1, 8- две вершины эллипса, определяющие положение малой оси, их фронтальные проекции определяют пересечение следа плоскости α с очерком сферы, а горизонтальные проекции являются высшей и низшей точками сечения
- ·2, 3- фронтальные проекции этих точек лежат на вертикальной оси сферы, а профильные проекции будут лежать на очерке сферы и определять зону видимости при построении эллипса на *профильной плоскости проекций*.
- · 4, 5- две вершины эллипса, определяющие положение большой оси эллипса, положение их фронтальной проекции определяет перпендикуляр, опущенный из центра сферы к следу плоскости α .
- · 6, 7- Фронтальные проекции этих точек лежат на горизонтальной оси сферы, т.е. принадлежат экватору сферы, их горизонтальная проекция лежит на очерке сферы и определяет зону видимости при построении эллипса.

- Линия пересечения плоскости α и сферы на фронтальной плоскости проекций совпадает со следом плоскости на ней отмечаем точки $1_2 \dots 8_2$.
- *Для нахождения горизонтальных проекций этих точек в общем случае используется метод вспомогательных секущих плоскостей (β - горизонтальные плоскости уровня).*
- Например, через точки $2_2, 3_2$ проведем след плоскости $\beta 1_2$, на горизонтальной плоскости проекций линией пересечения плоскости $\beta 1$ и сферы будет окружность $m 1_1$, а точки 2_1 и 3_1 лежат на этой окружности по линии связи (в данном случае осевой линии). Таким образом находятся все точки, кроме 1_1 и 8_1 , которые ввиду своего положения на очерке фронтальной проекции сферы будут принадлежать горизонтальной осевой линии. Построенные точки $1_1 \dots 8_1$ соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

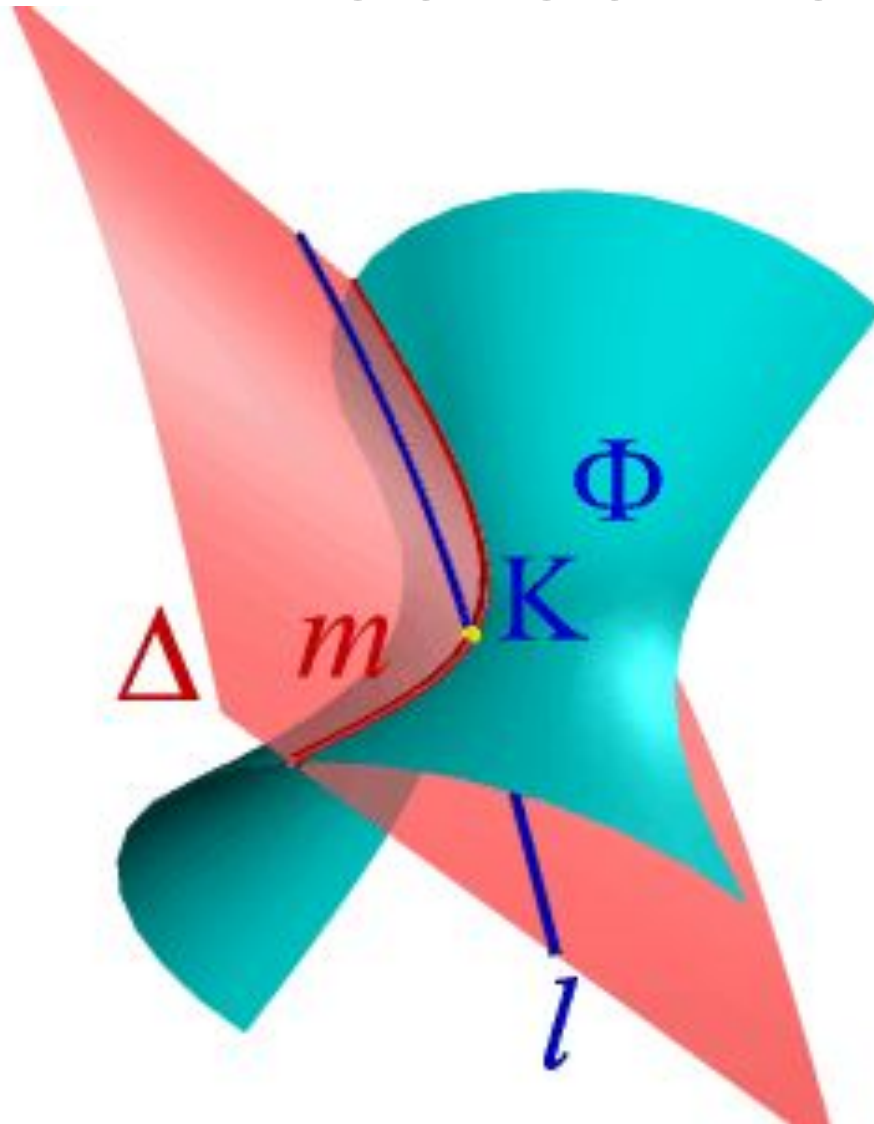
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- В общем случае для графического определения точек пересечения линии с поверхностью необходимо выполнить ряд геометрических построений, описываемых следующим алгоритмом:

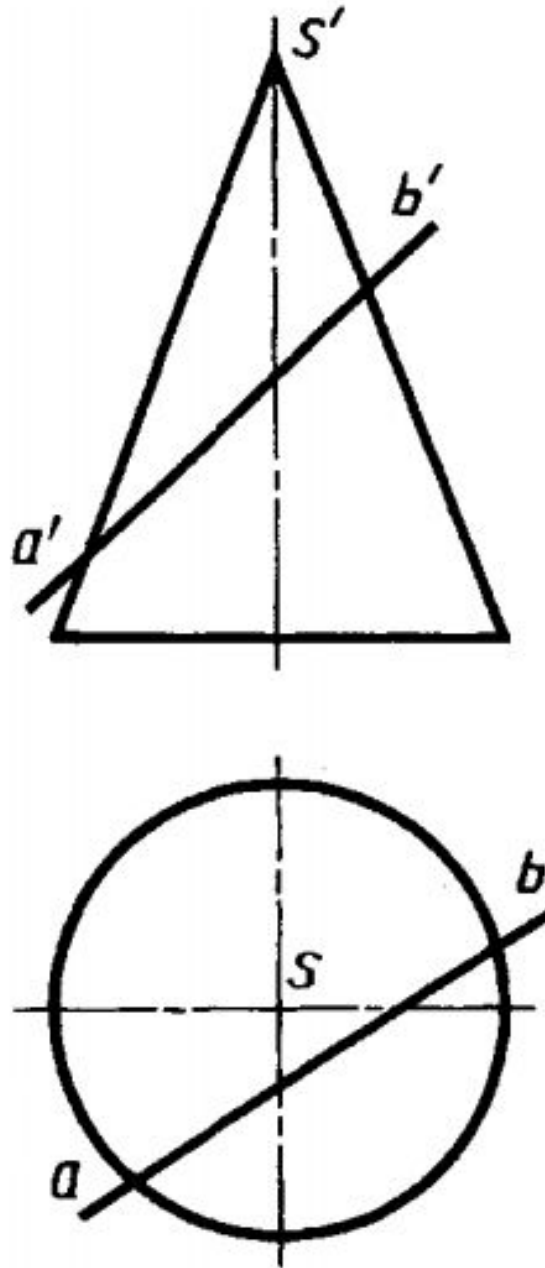
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ПЛОСКОСТИ

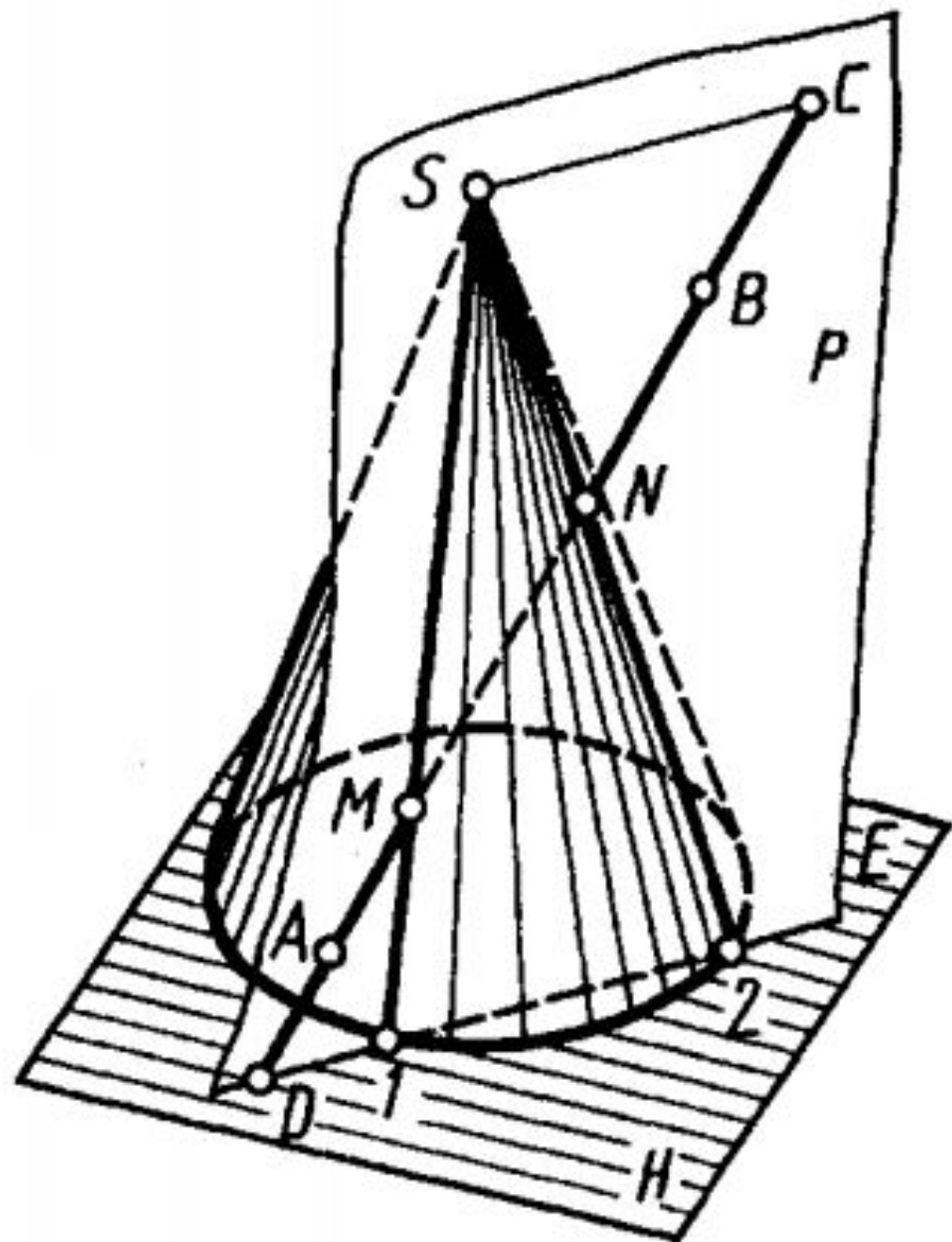
- 1. Заключаем прямую линию в некоторую дополнительную плоскость (в которой будет получаться простейшая фигура(окружность, треугольник, квадрат));
- 1. Строим линию пересечения заданной плоскости и дополнительной поверхности;
- 2. Определяем искомую точку пересечения прямой с линией сечения плоскости (точка может быть не единственная).

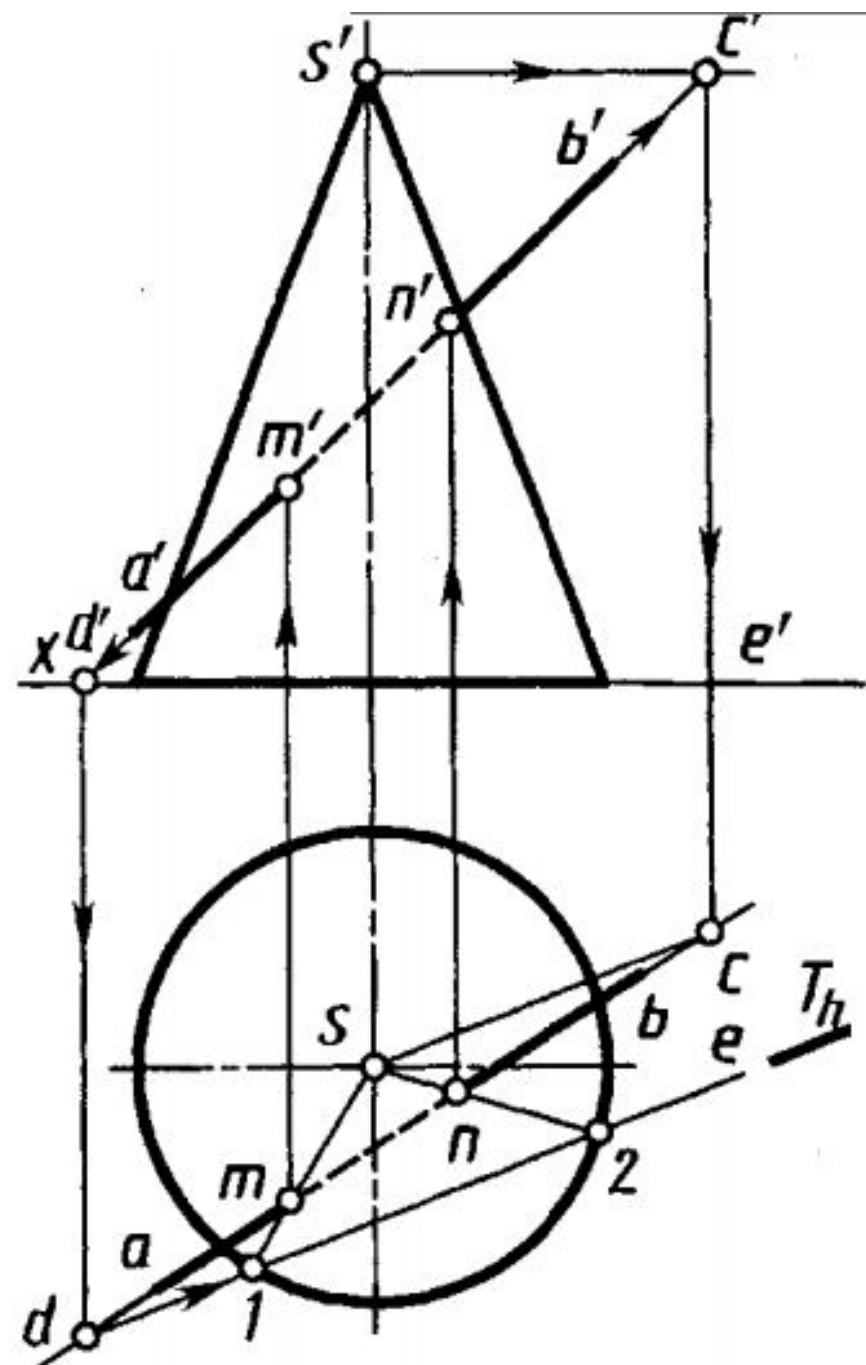
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



Построение точки пересечения прямой с конусом



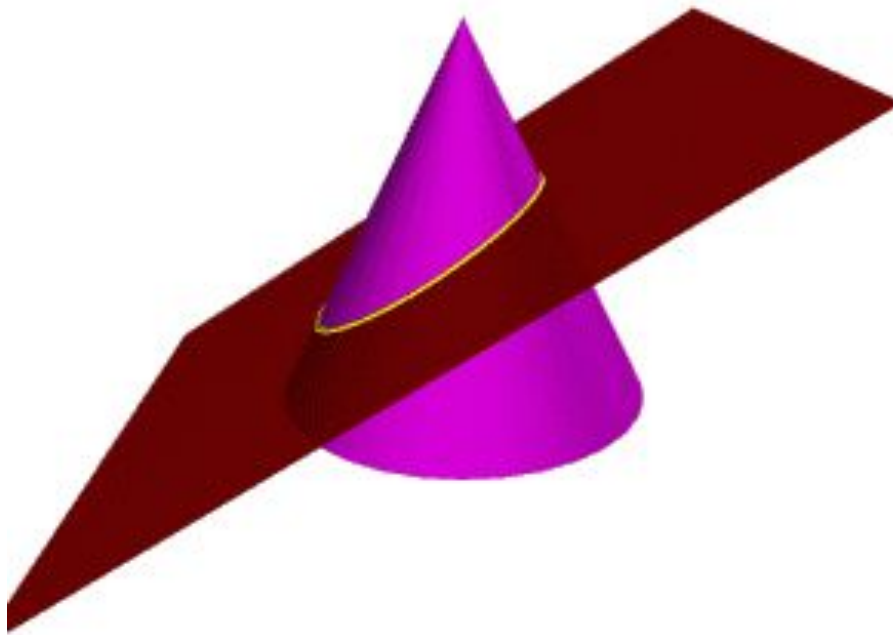




Конические сечения

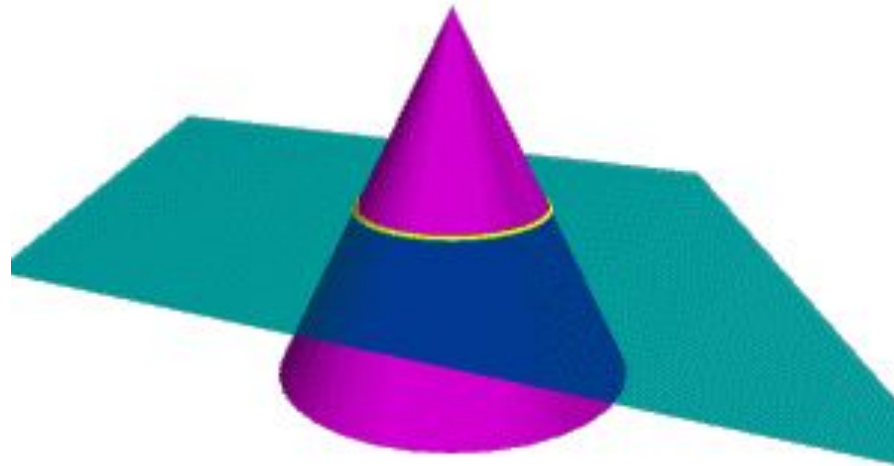
- В зависимости от положения секущей плоскости линиями сечения конической поверхности могут быть :
- **эллипс,**
- **парабола,**
- **гипербола,**
- **а в частных случаях: окружность, прямая, две пересекающиеся прямые и точка.**

Если плоскость пересекает все образующие поверхности конуса вращения, то линией сечения является *эллипс*.



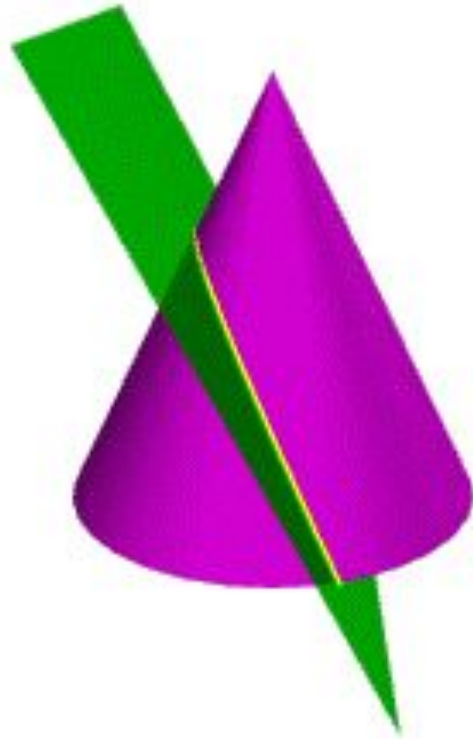
В этом случае секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих поверхности конуса.

В частном случае *если* плоскость пересекает
поверхность конуса по *окружности*



- сечение вырождается в *точку*, если плоскость проходит через вершину конуса

Если плоскость параллельна одной образующей поверхности конуса, то линией пересечения является



- В частном случае (плоскость является касательной к поверхности конуса) сечение вырождается в *прямую*.

Если плоскость параллельна двум образующим поверхности конуса, то линией сечения является *гипербола*



- случае прохождения плоскости через вершину конической поверхности фигурой сечения могут быть сами образующие, т.е. гипербола вырождается в *две пересекающиеся прямые*

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

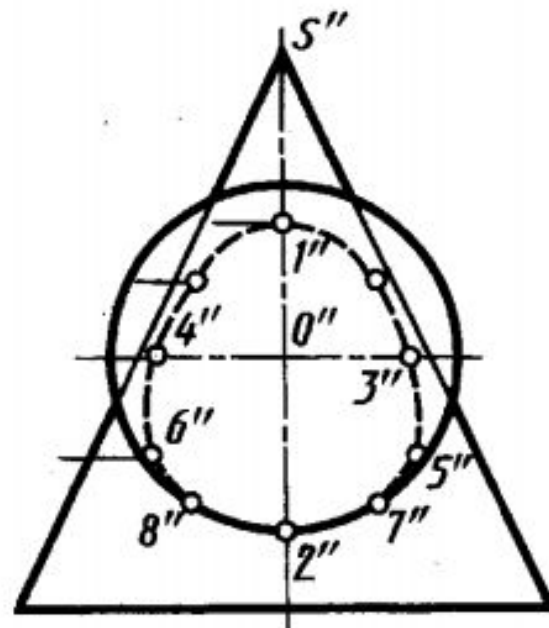
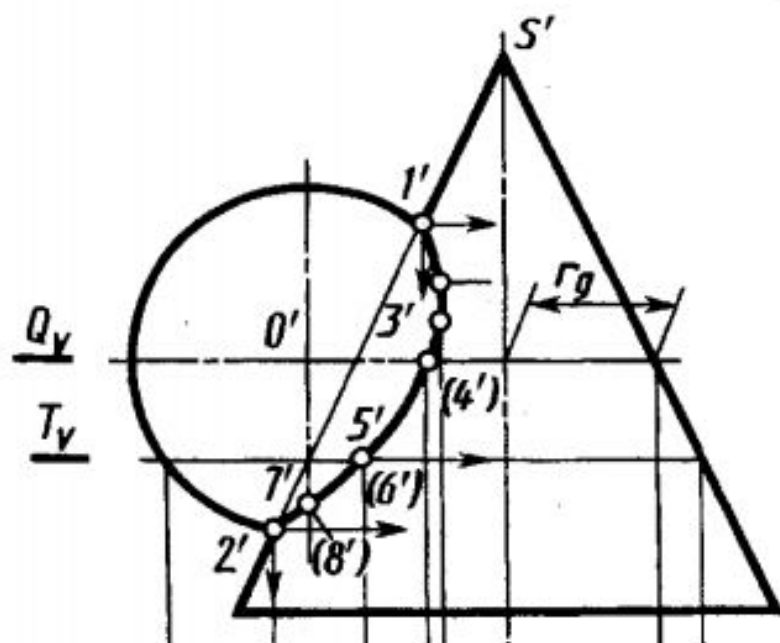
- Линией пересечения двух поверхностей является множество точек, общих для данных поверхностей.
- **1. Из множества выделяют характерные (опорные, или главные) точки, с которых следует начинать построение этой линии.** (К таким точкам относятся: *экстремальные* точки- верхняя и нижняя точки относительно той или иной плоскости проекций; точки, расположенные на очерковых образующих некоторых поверхностей точки границы зоны видимости и т.д.)

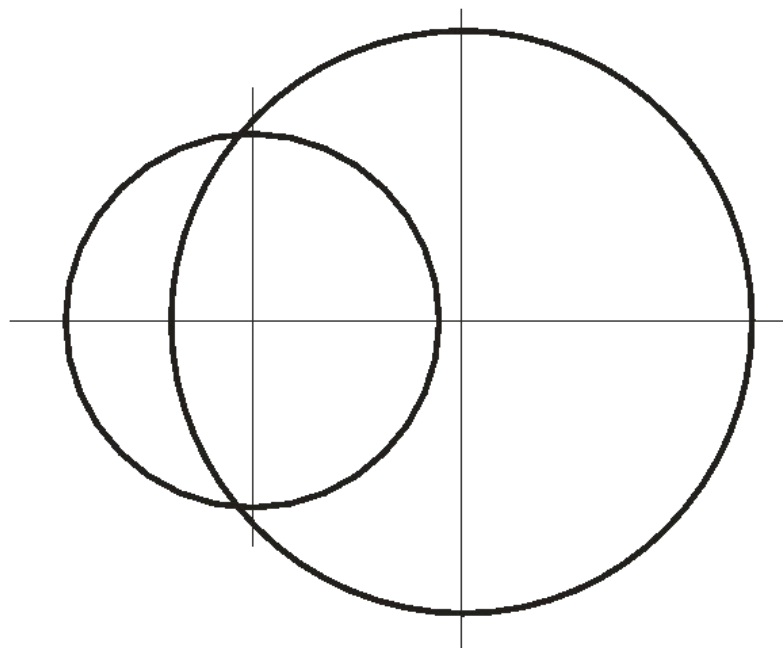
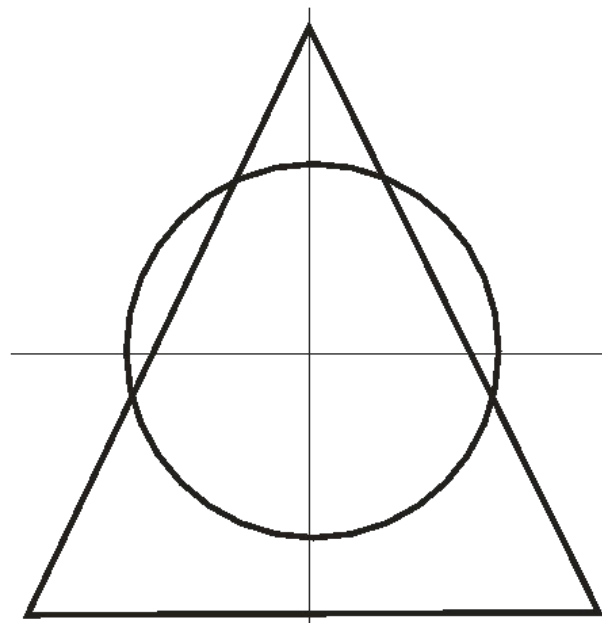
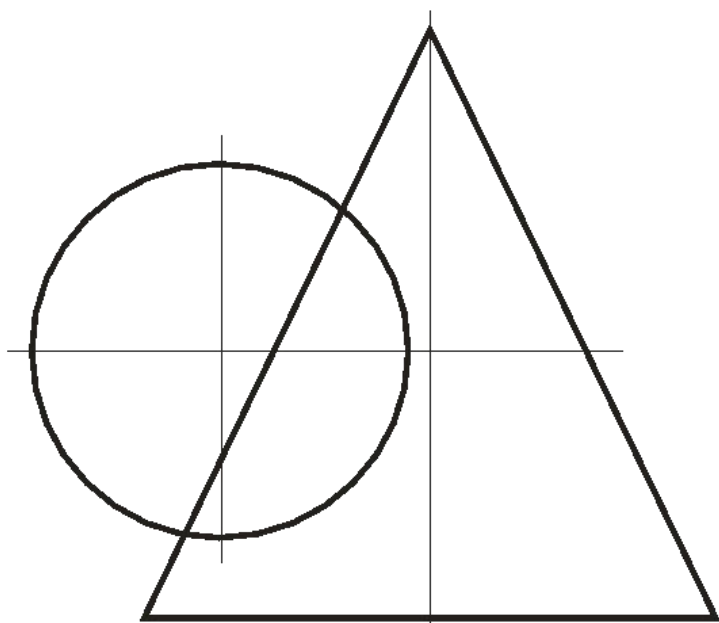
- Секущие поверхности-посредники выбираются так, чтобы они, пересекаясь с данными поверхностями, давали простые для построения линии, например прямые и окружности.
- Из общей схемы построения линии пересечения поверхностей выделяют два основных метода:
- метод *секущих плоскостей*
- метод *секущих сфер*.

Метод секущих плоскостей

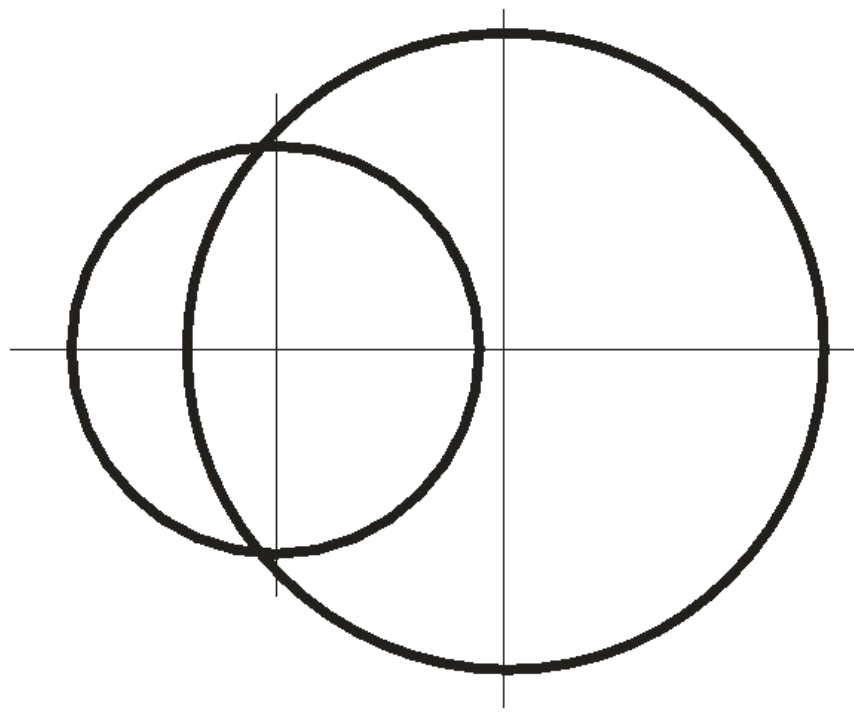
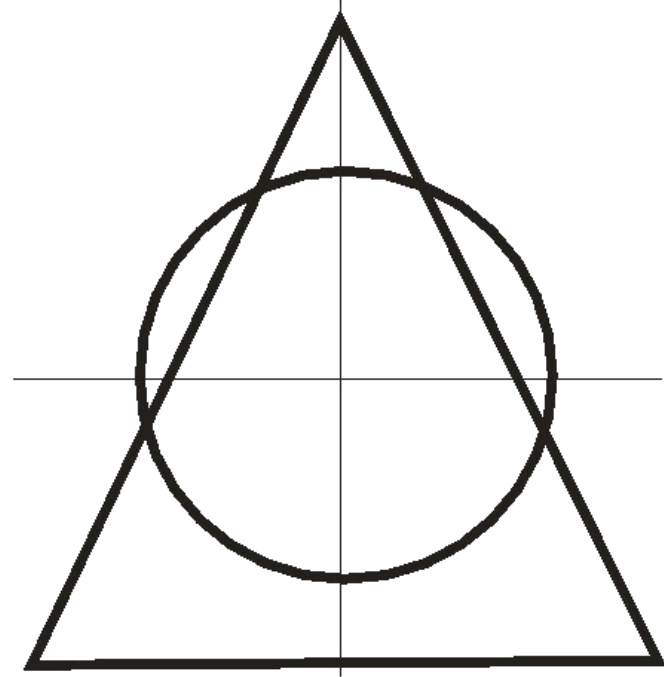
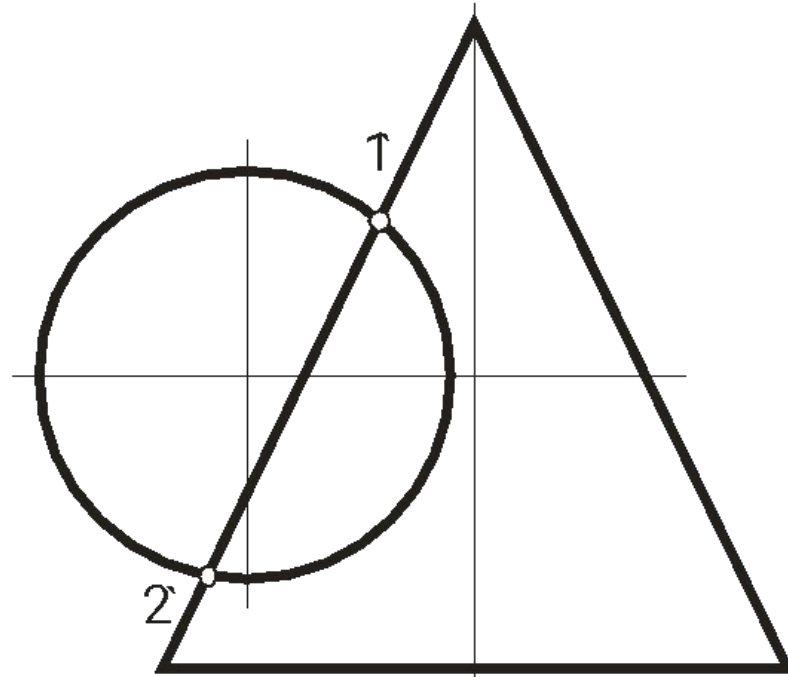
- Вспомогательные секущие плоскости чаще всего выбирают проецирующими и параллельными одной из плоскостей проекций - плоскостями уровня.
- Этот способ рекомендуется применять, если сечения заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямыми линиями или окружностями. Такая возможность существует в трех случаях:
 - 1. Если образующие (окружности) расположены в общих плоскостях уровня;
 - 2. Если в общих плоскостях уровня оказываются прямолинейные образующие линейчатой поверхности и окружности циклической;
 - 3. Линейчатые каркасы заданных поверхностей принадлежат общим плоскостям уровня или пучкам плоскостей общего положения.

- Алгоритм
- 1) Определяем опорные точки линии пересечения
- 2) Находим их горизонтальные проекции
- 3) Рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
- 4) Вторично рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
- 9) Определяем видимость точек

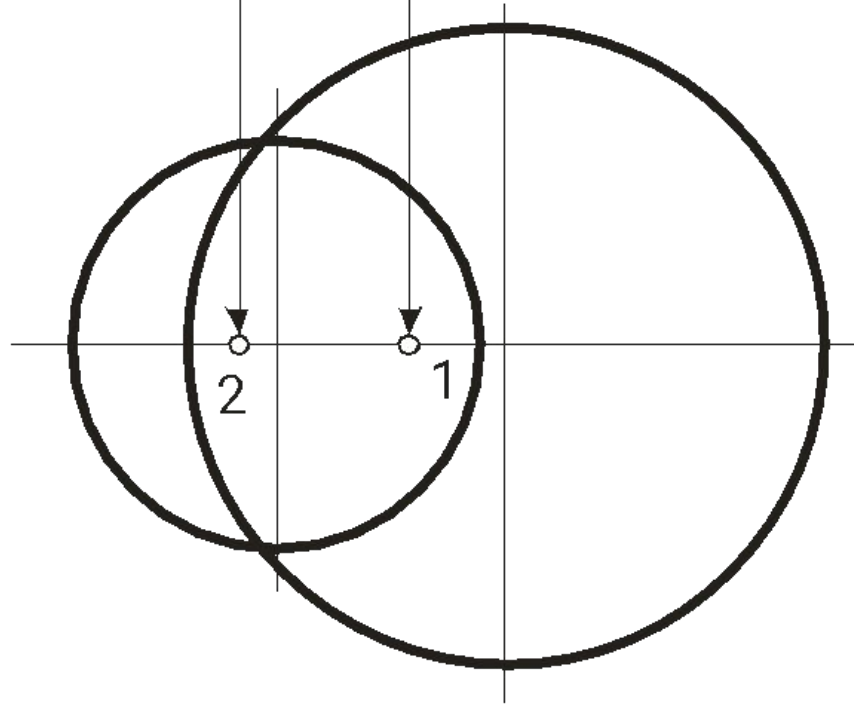
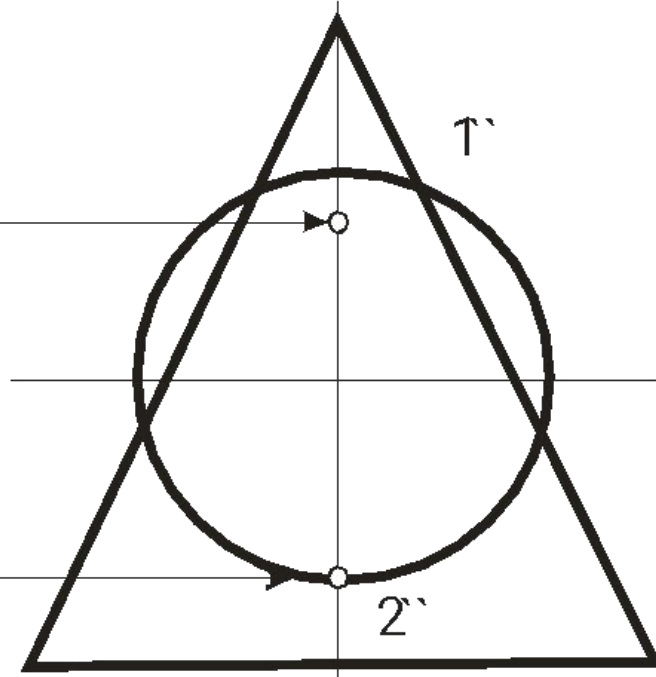
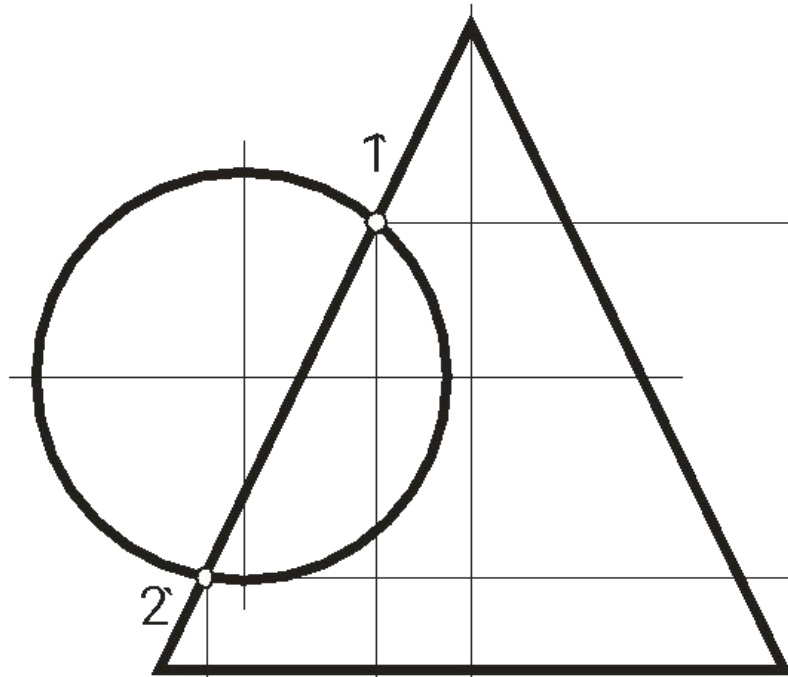


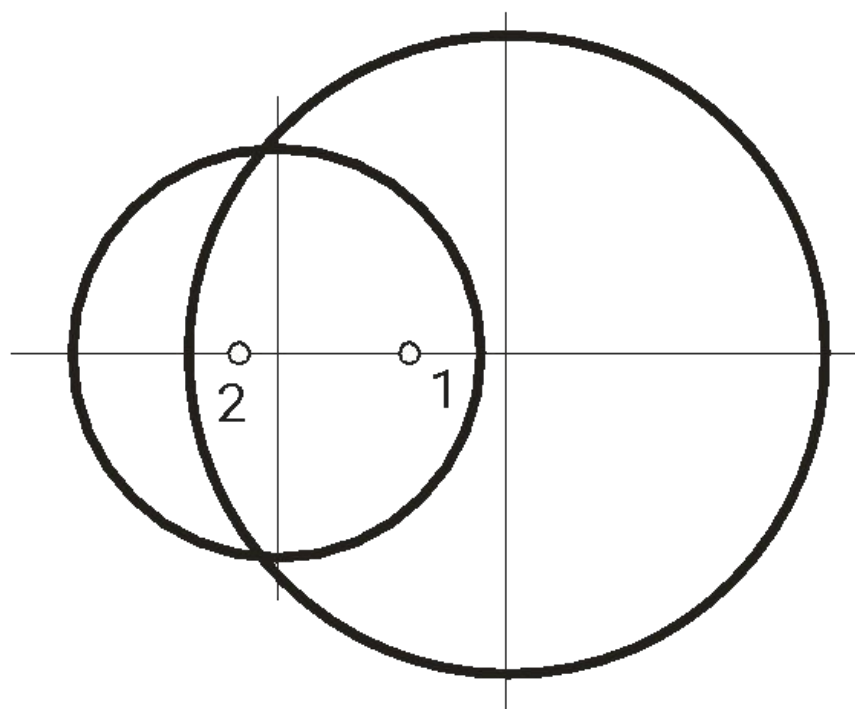
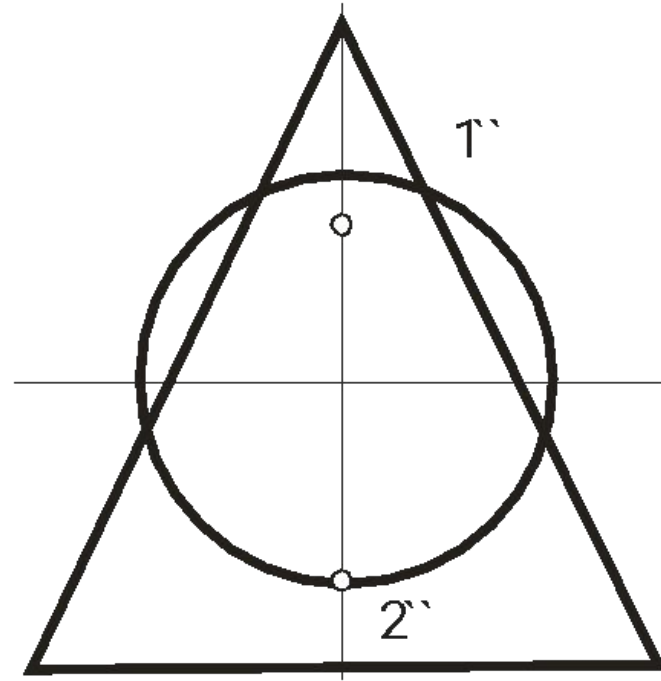
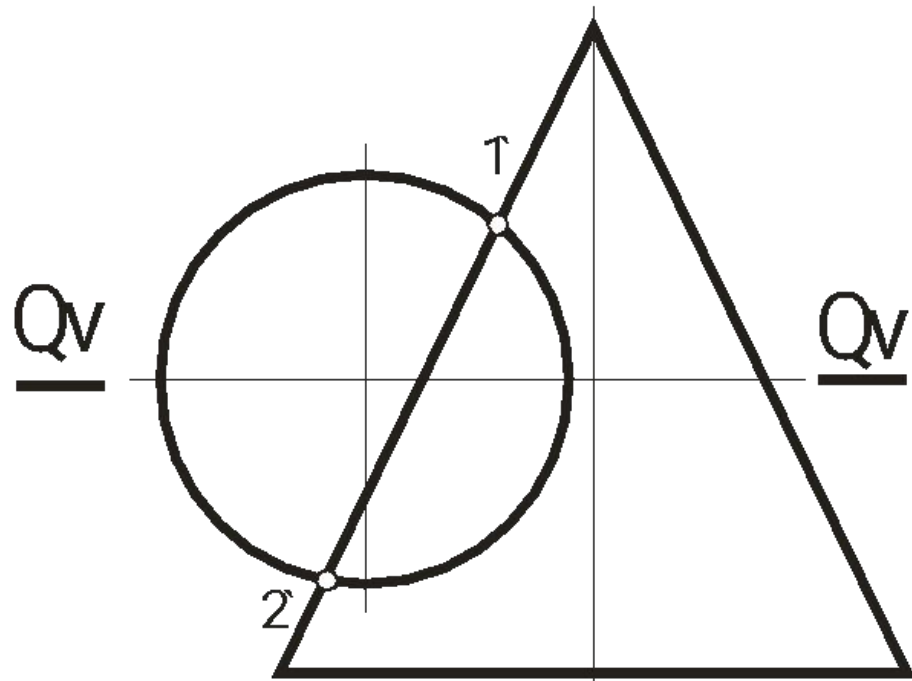


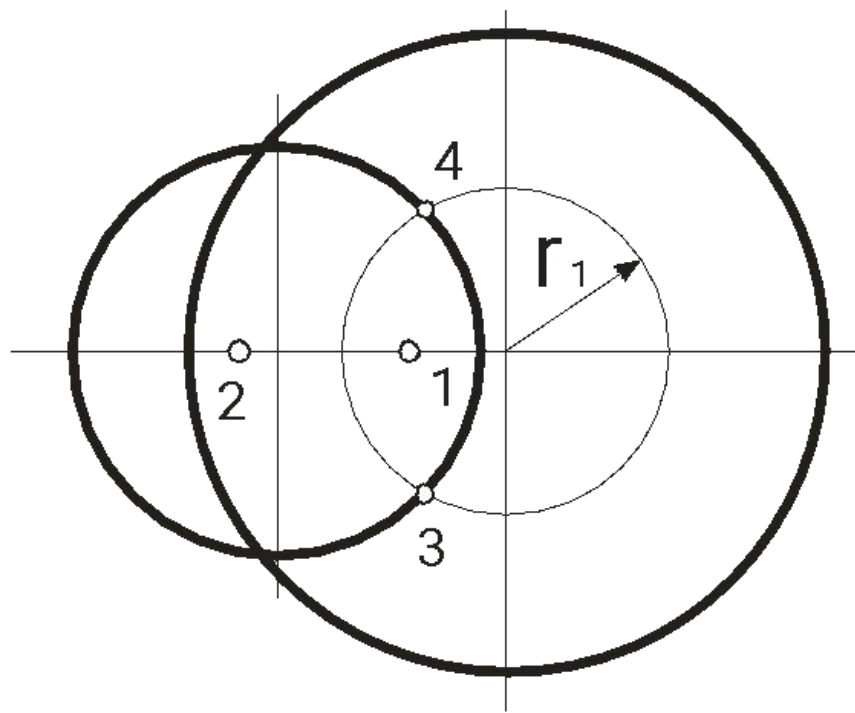
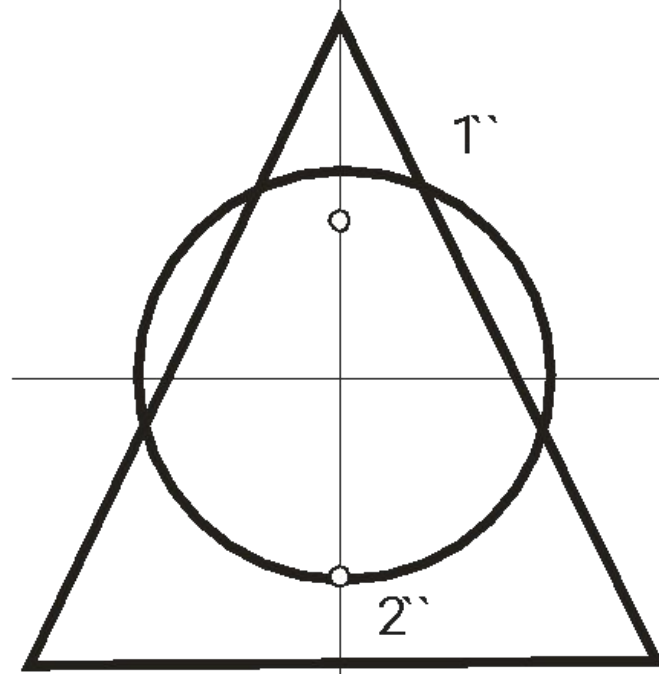
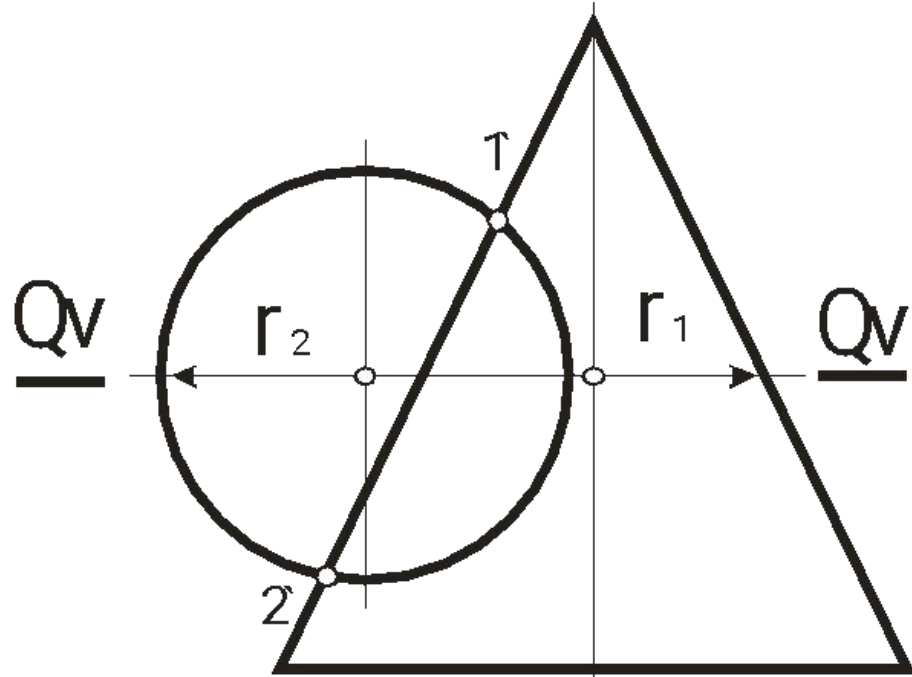
Определяем опорные точки
линии пересечения

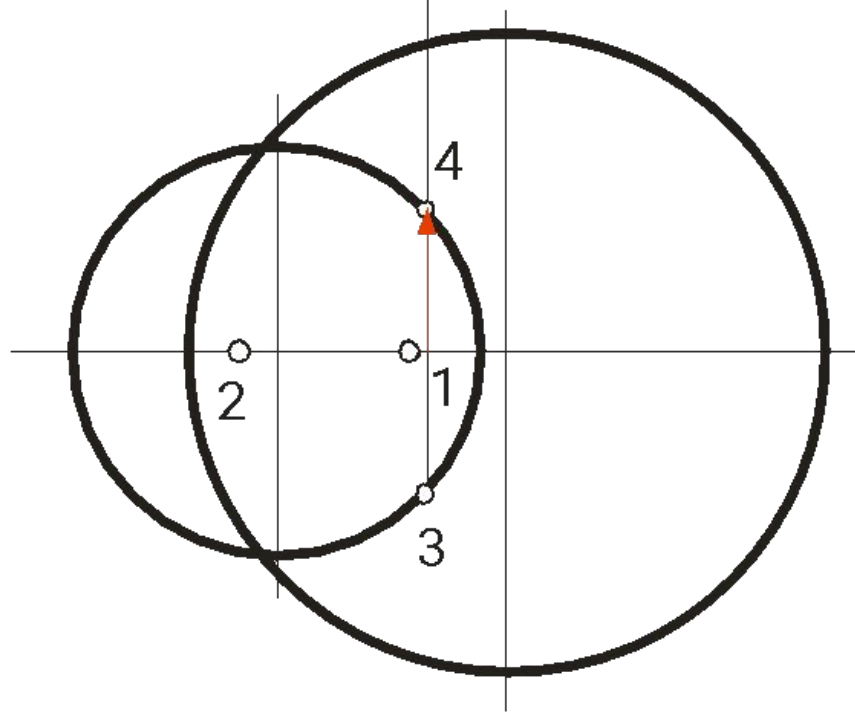
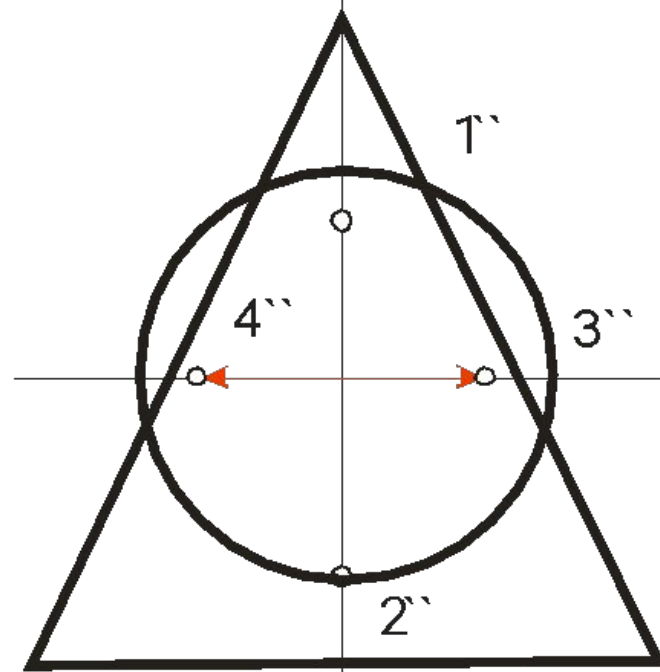
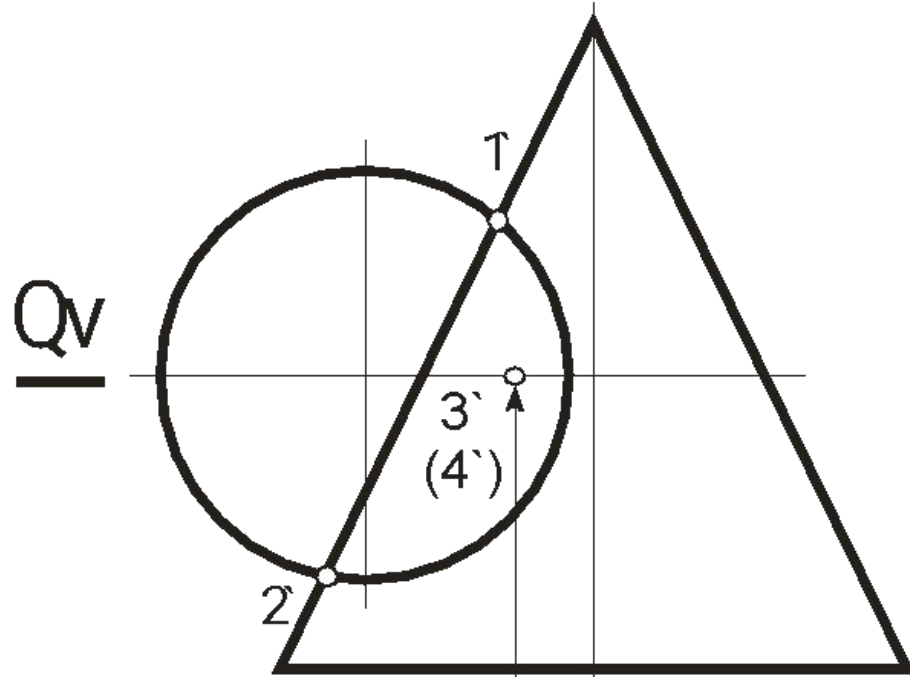


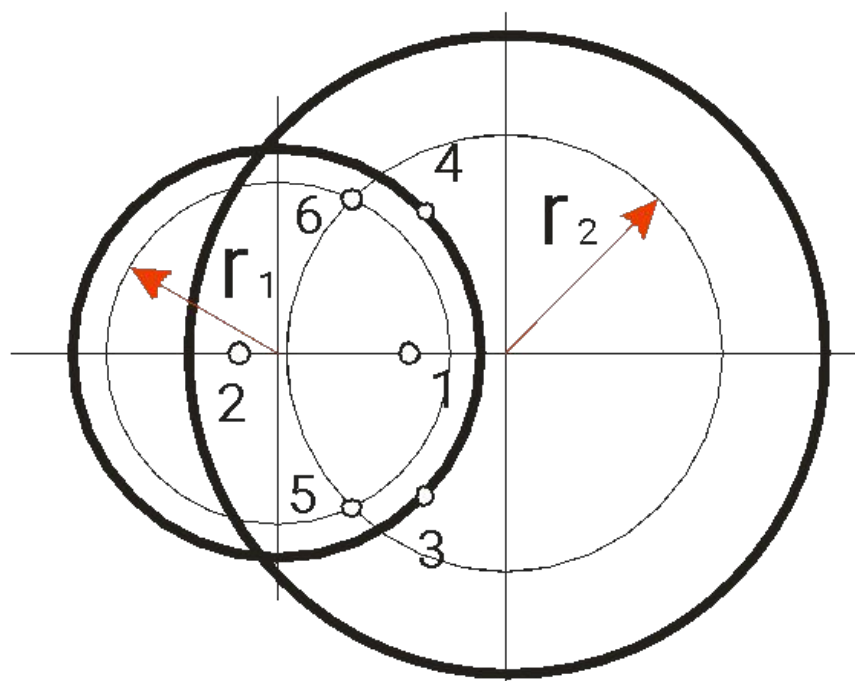
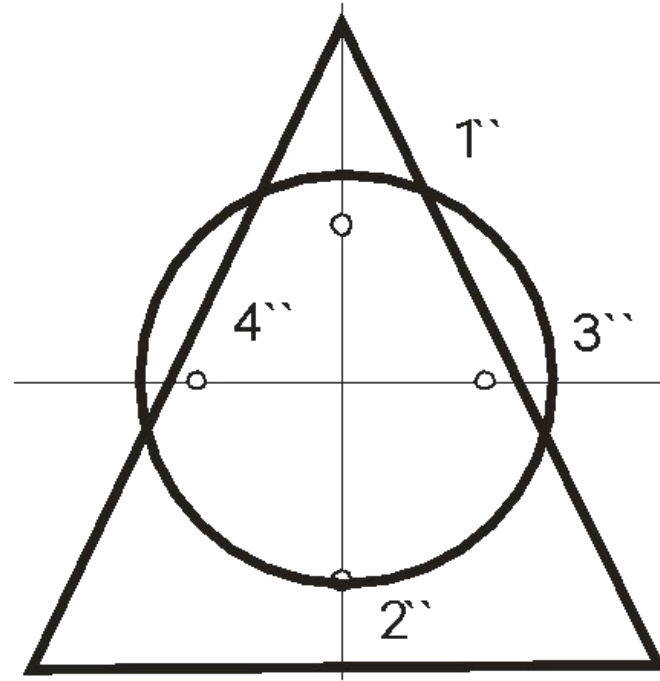
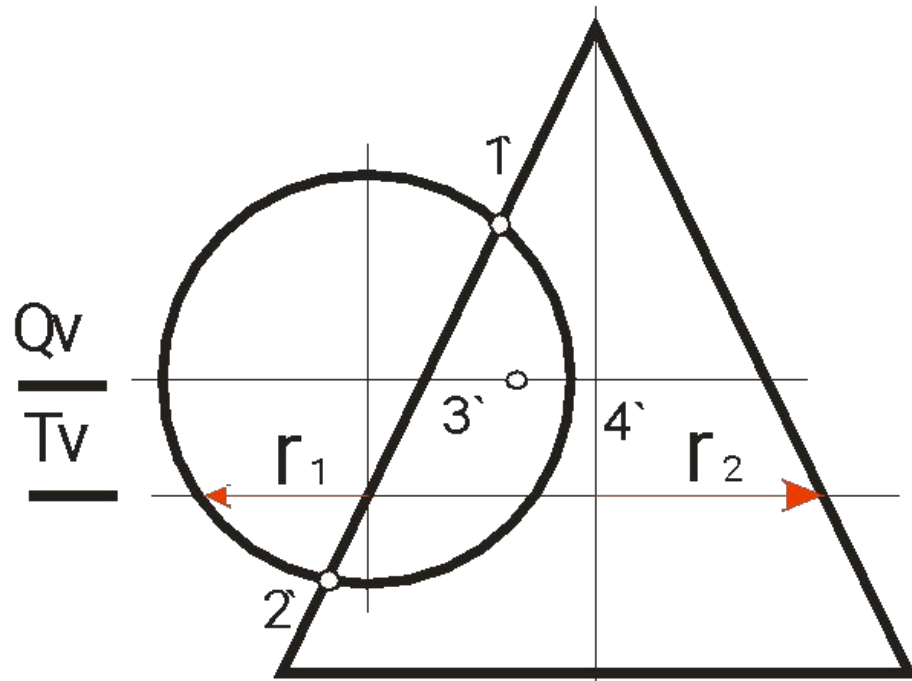
Находим их горизонтальные и
профильные проекции



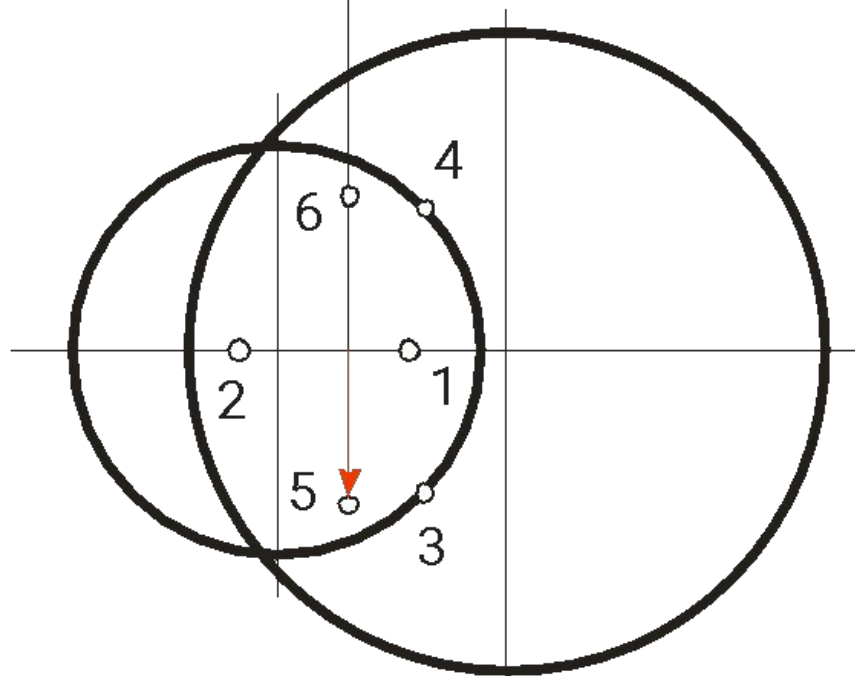
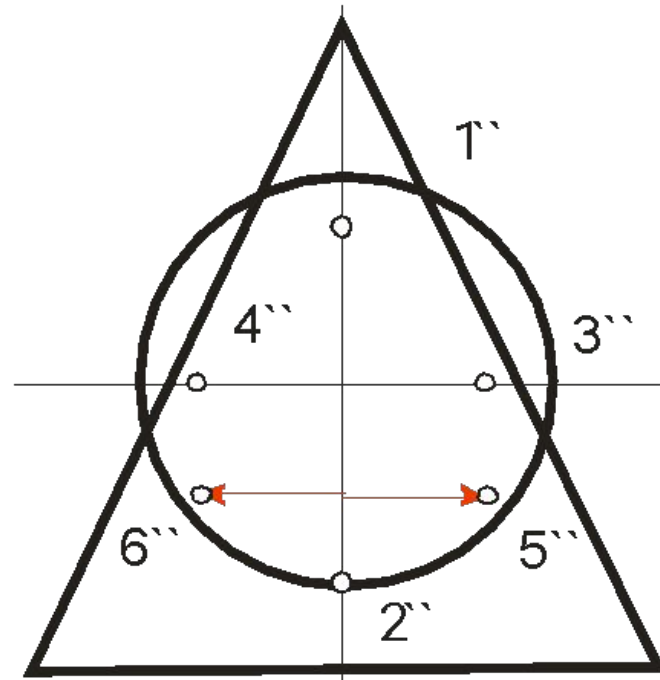
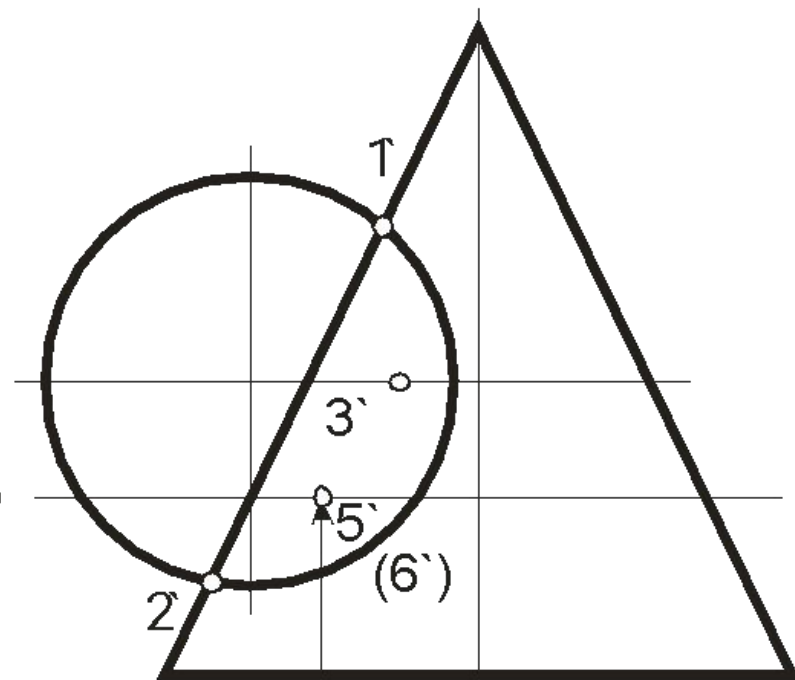


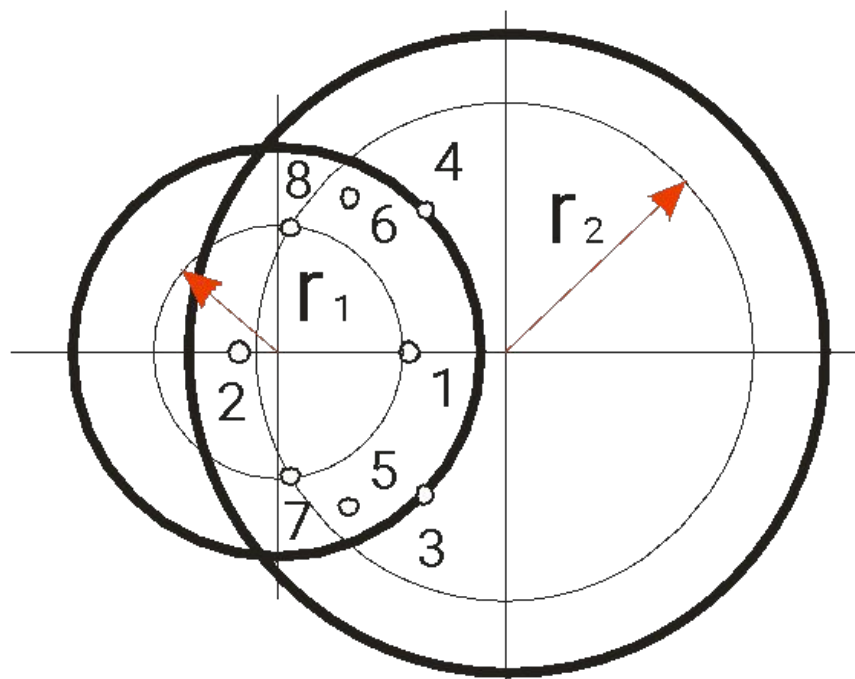
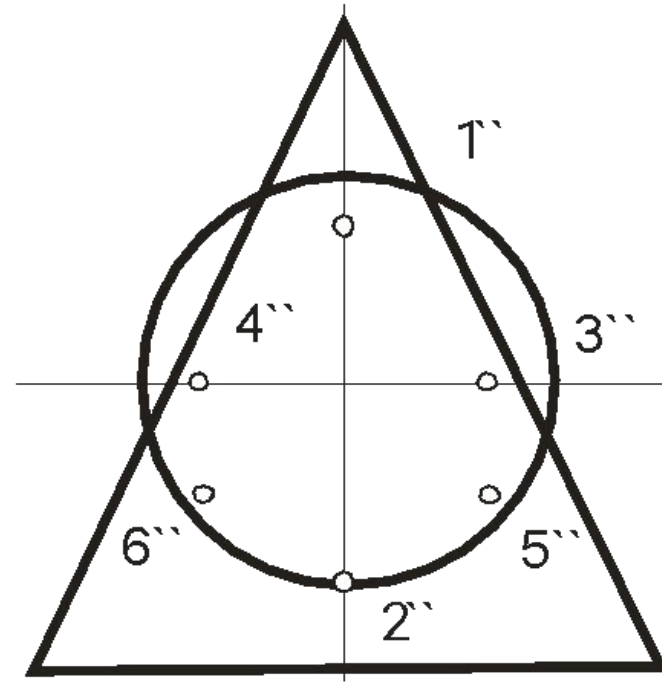
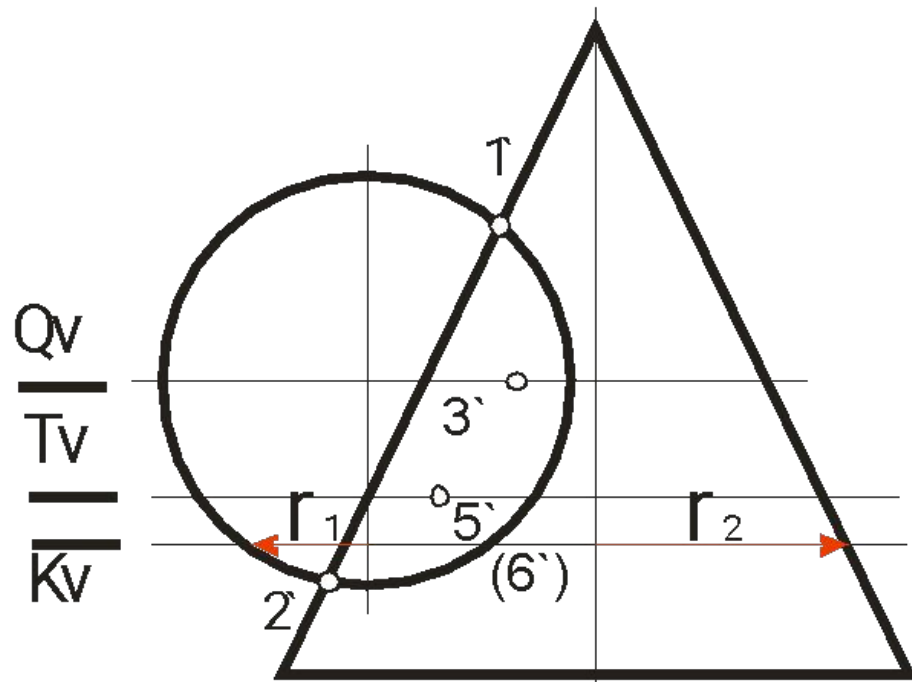


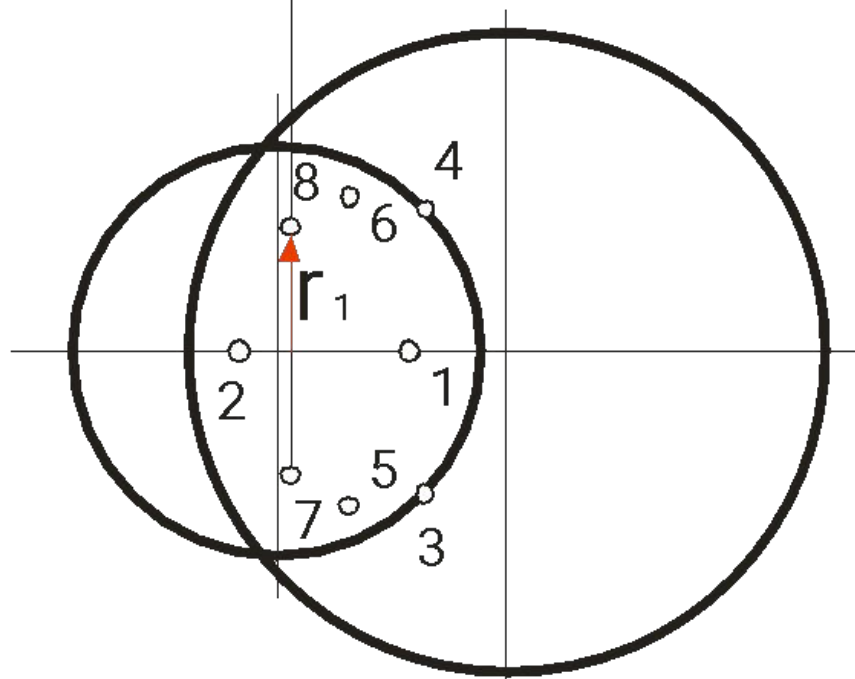
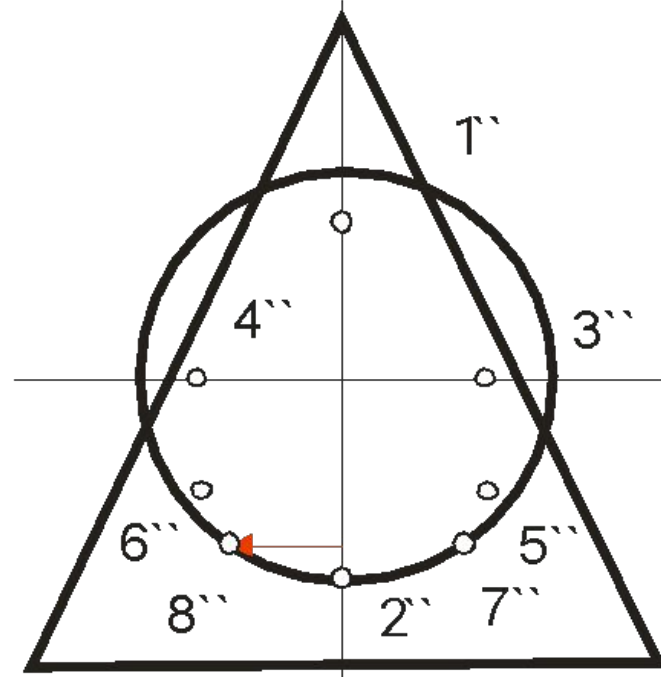
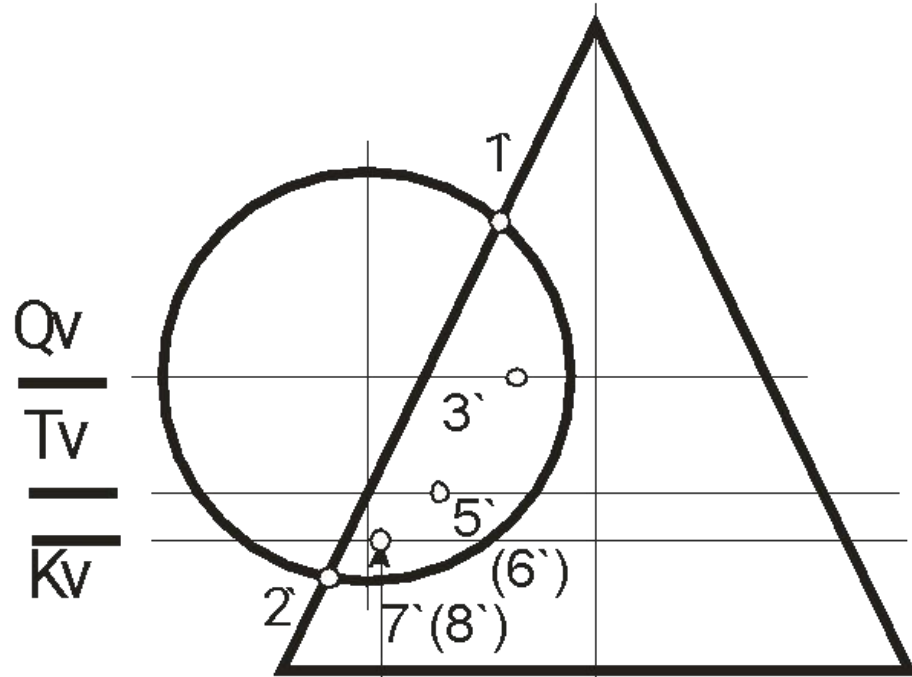


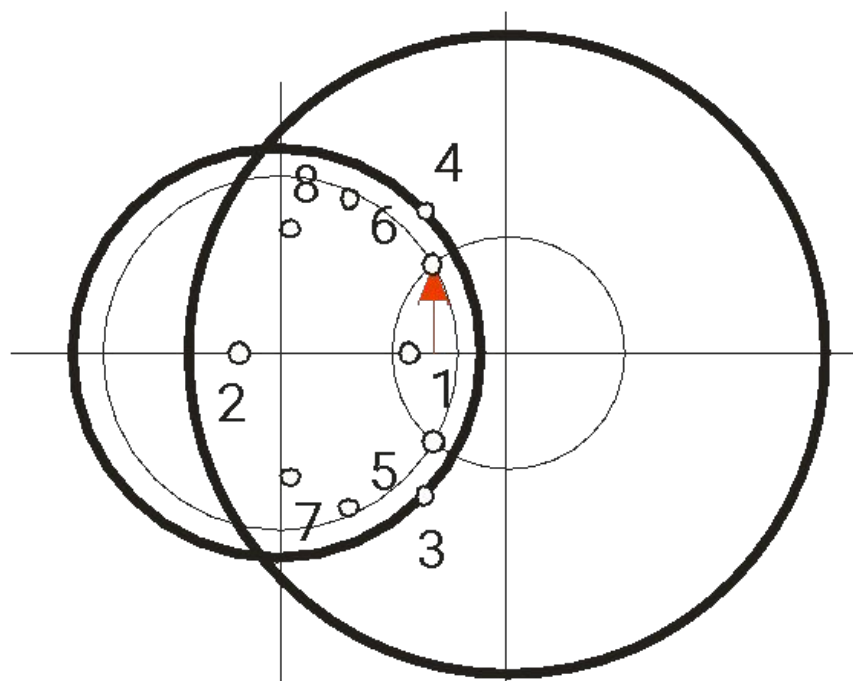
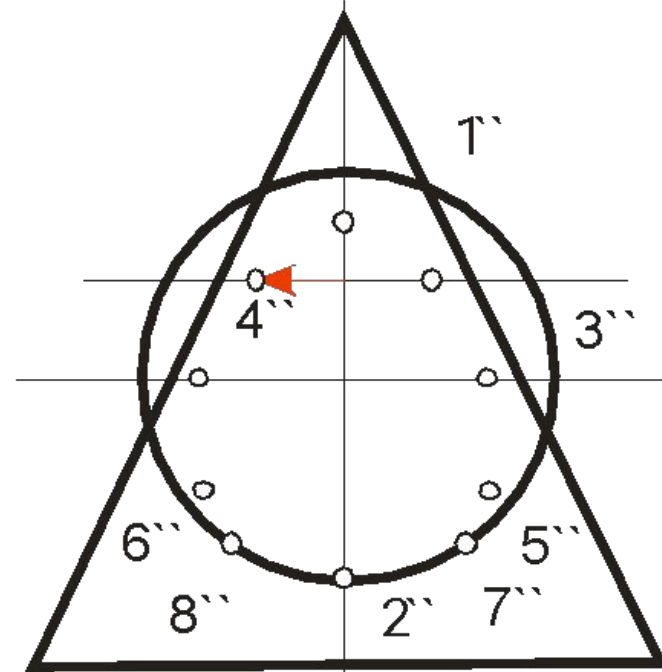
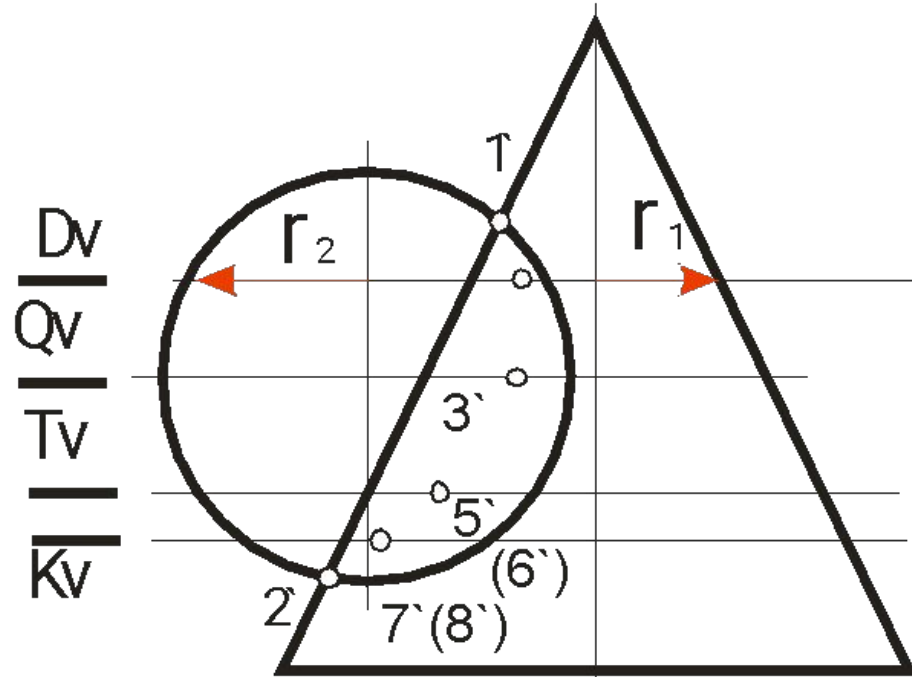


$\frac{Q_v}{T_v}$

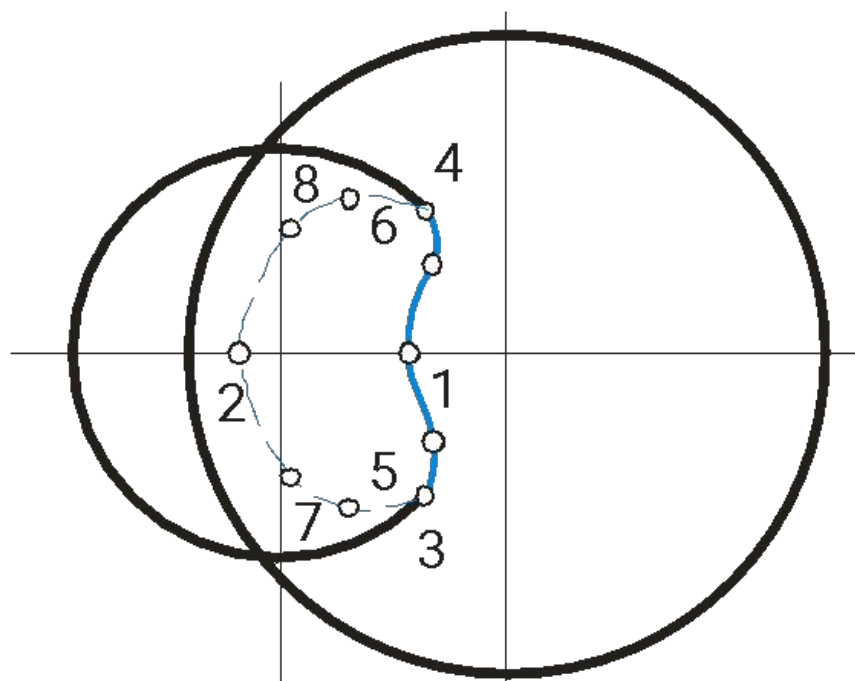
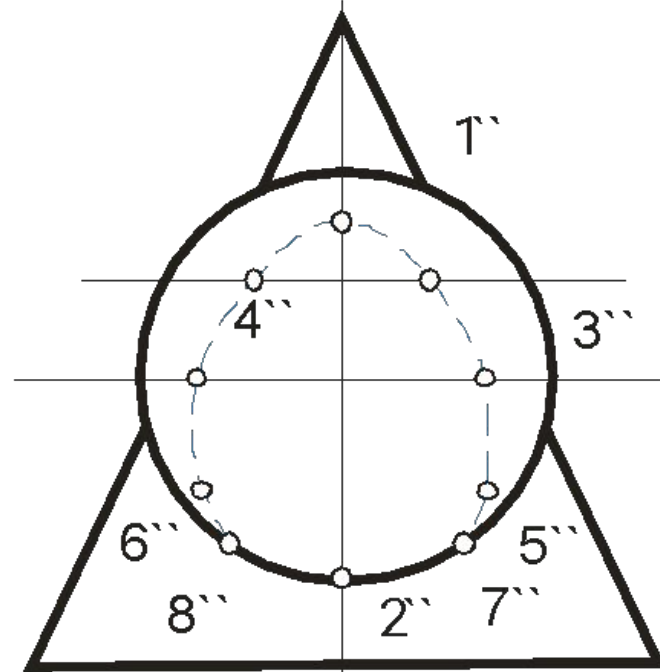
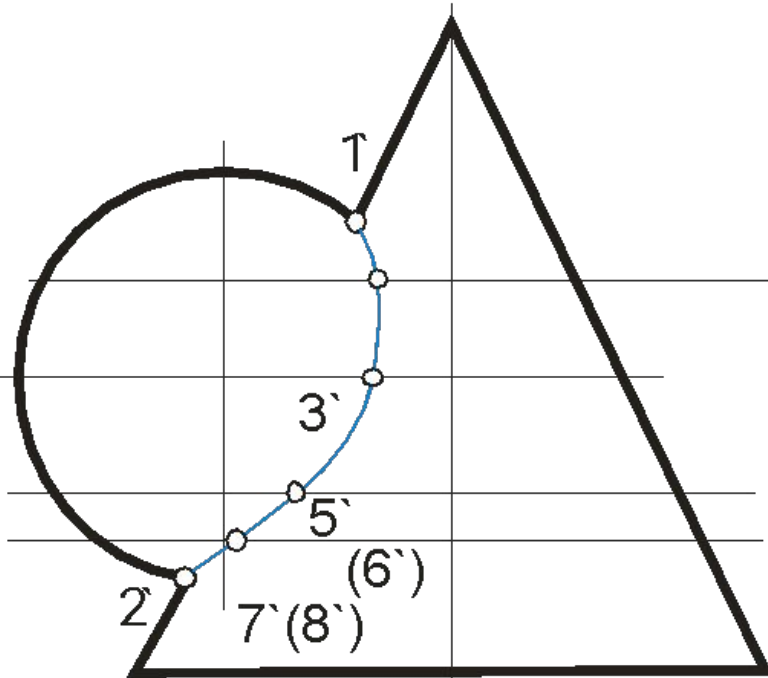








$\overline{Dv}$
 $\overline{Qv}$
 $\overline{Tv}$
 $\overline{Kv}$

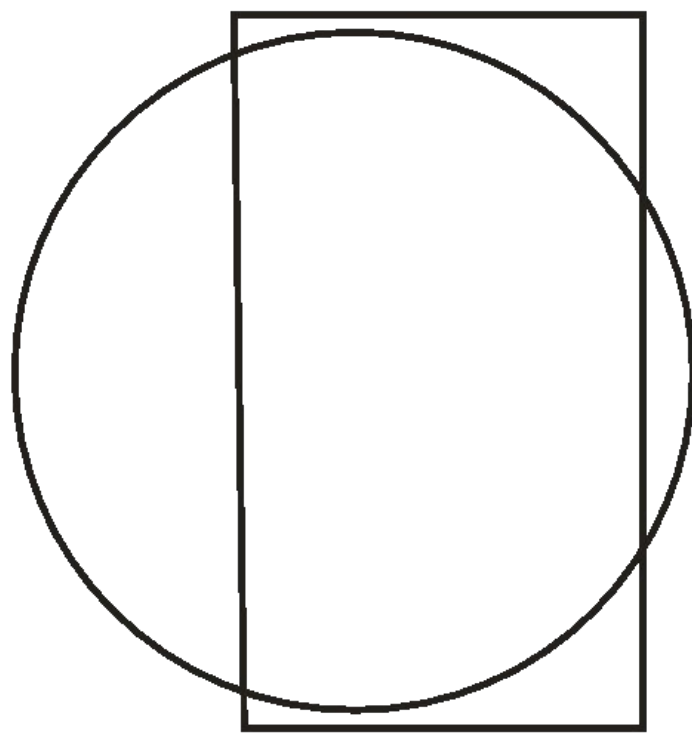
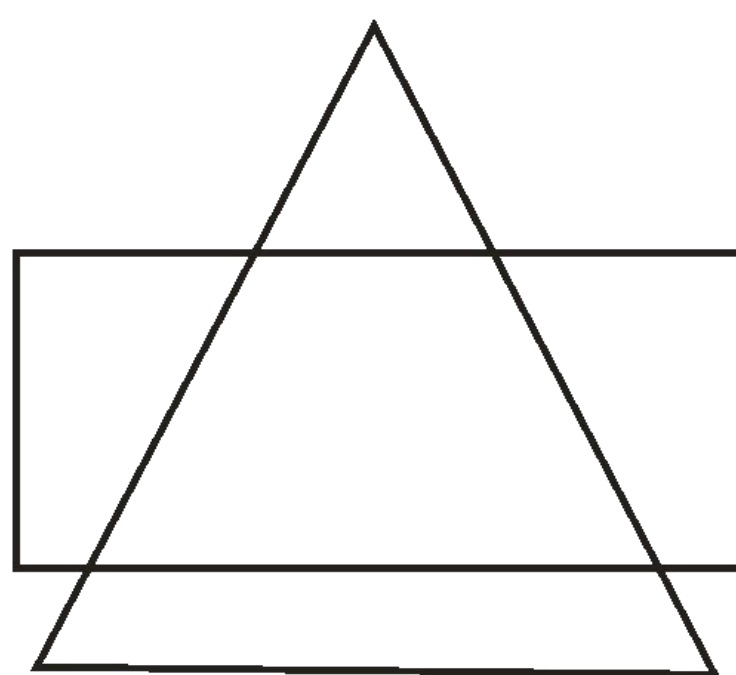
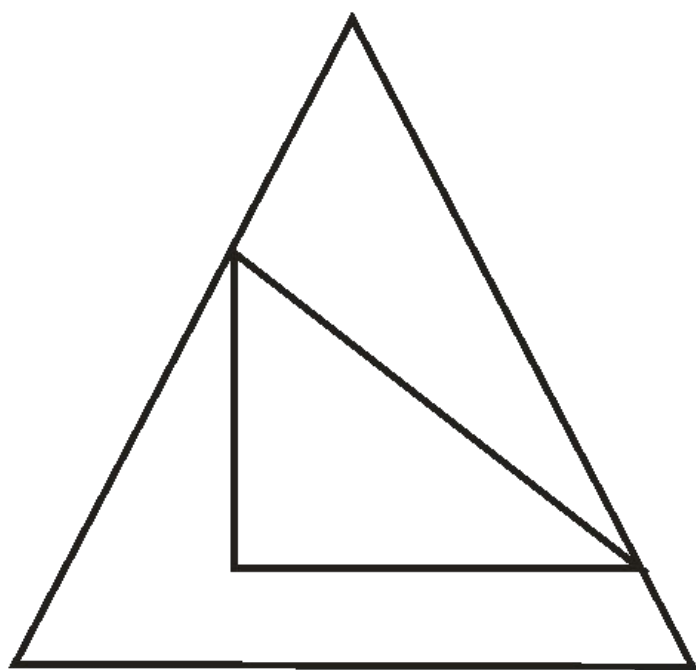


Построение линии пересечения треугольной призмы с конусом

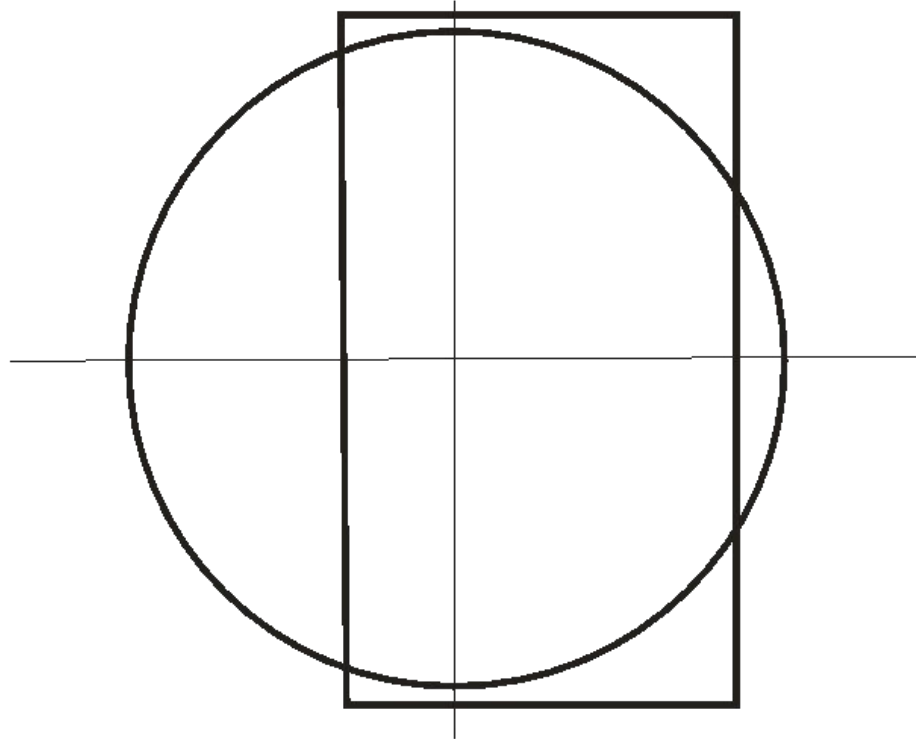
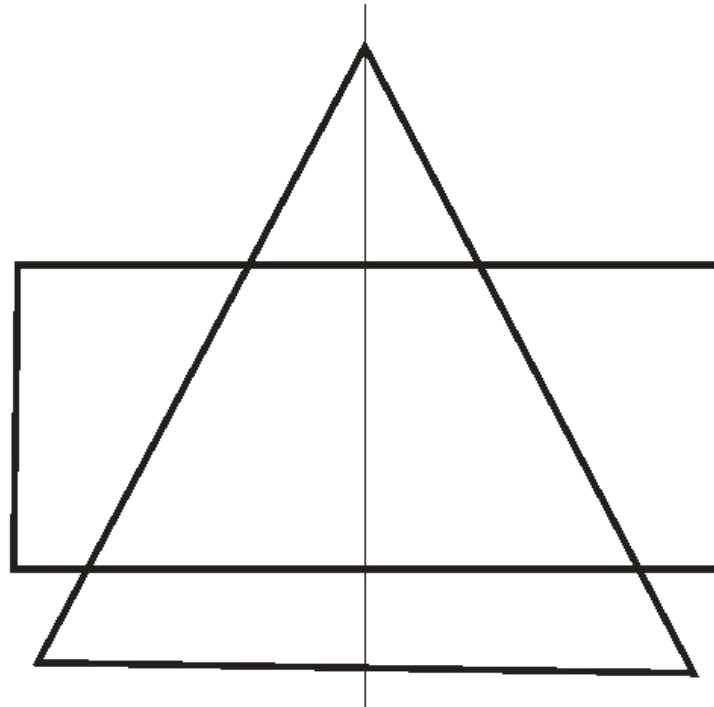
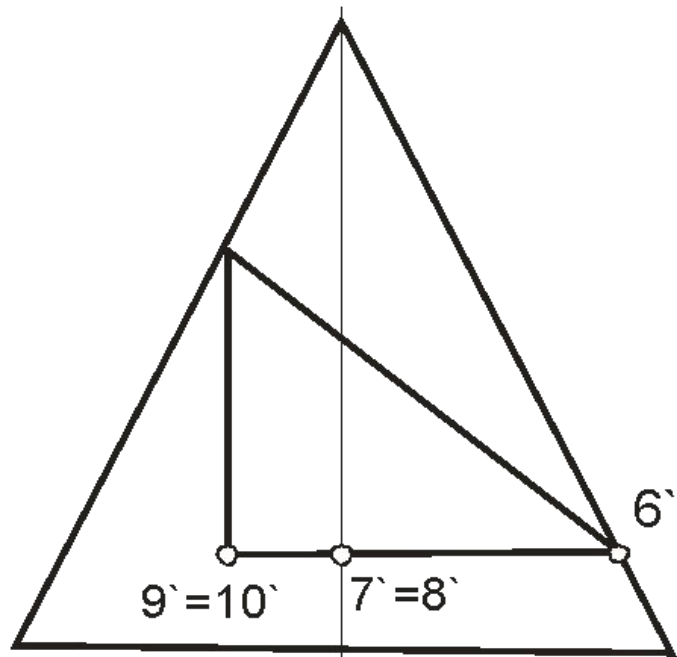


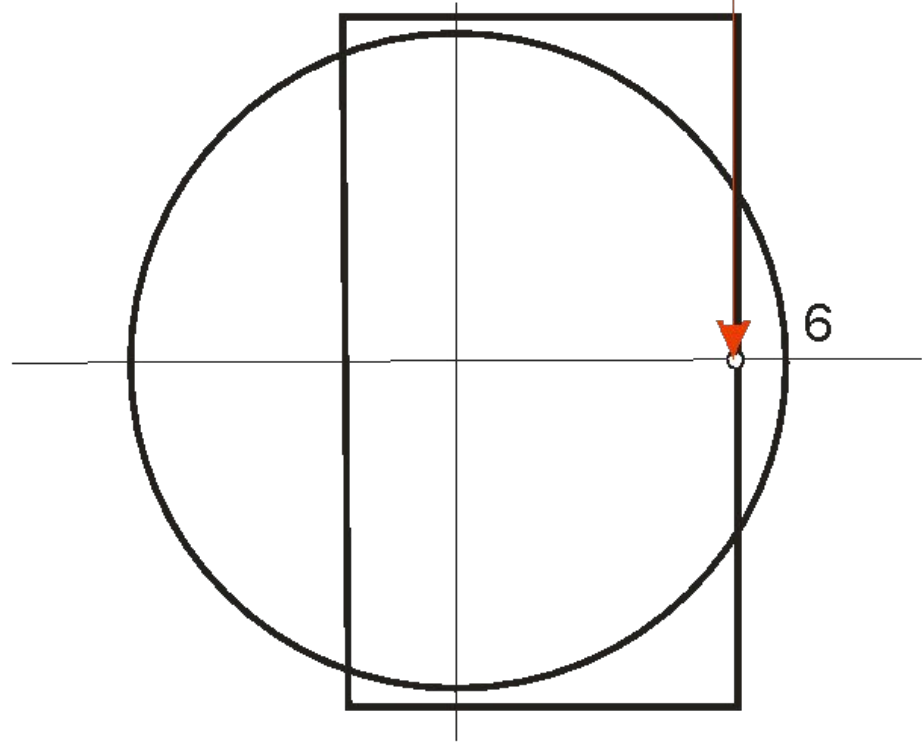
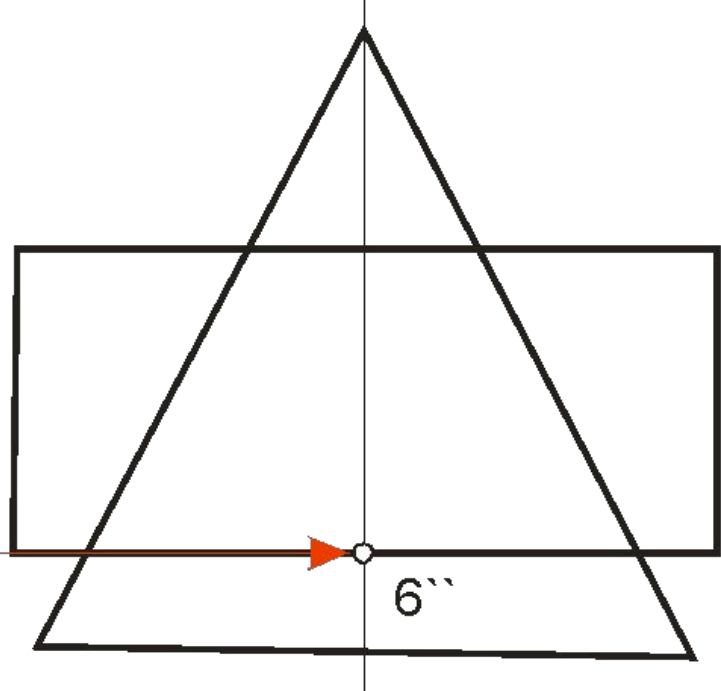
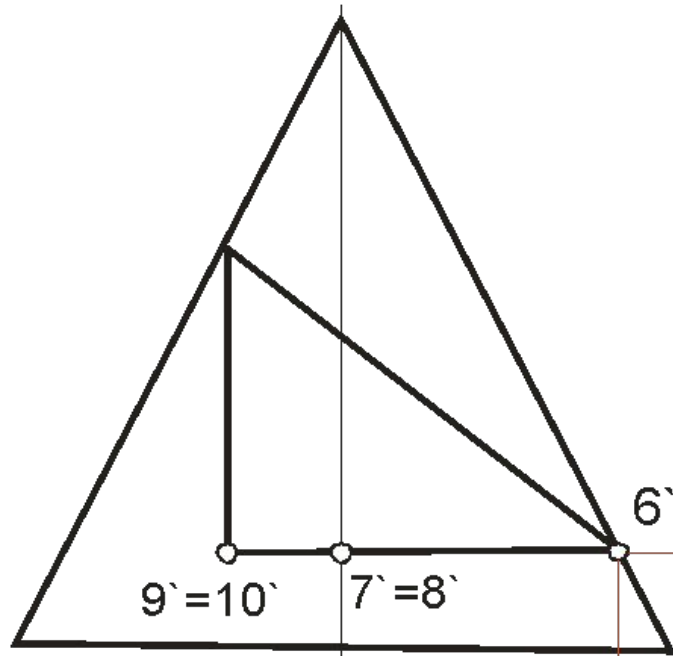
Алгоритм

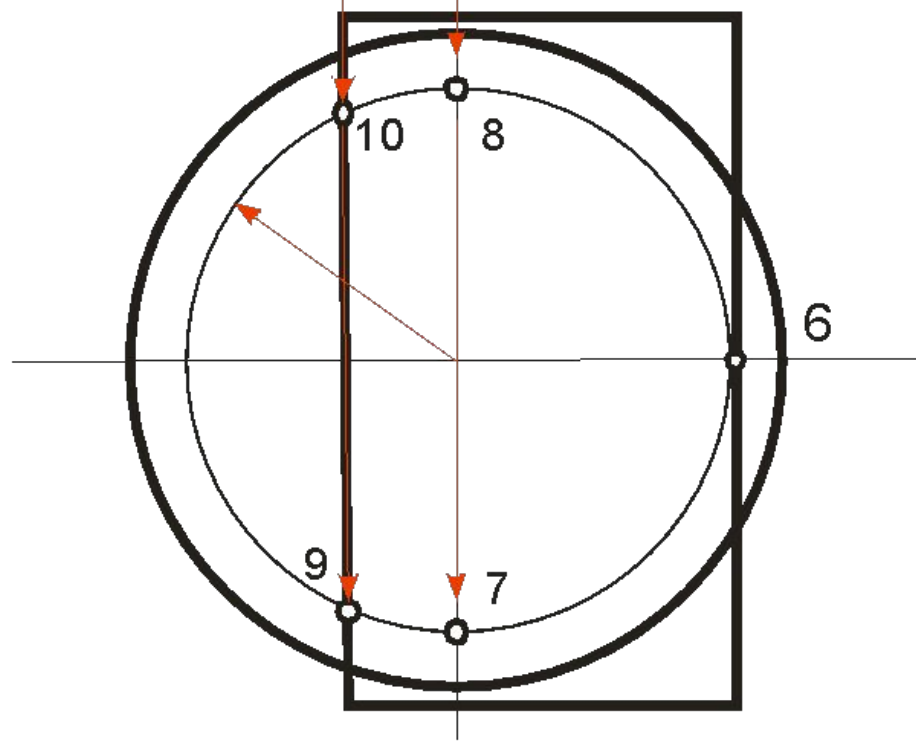
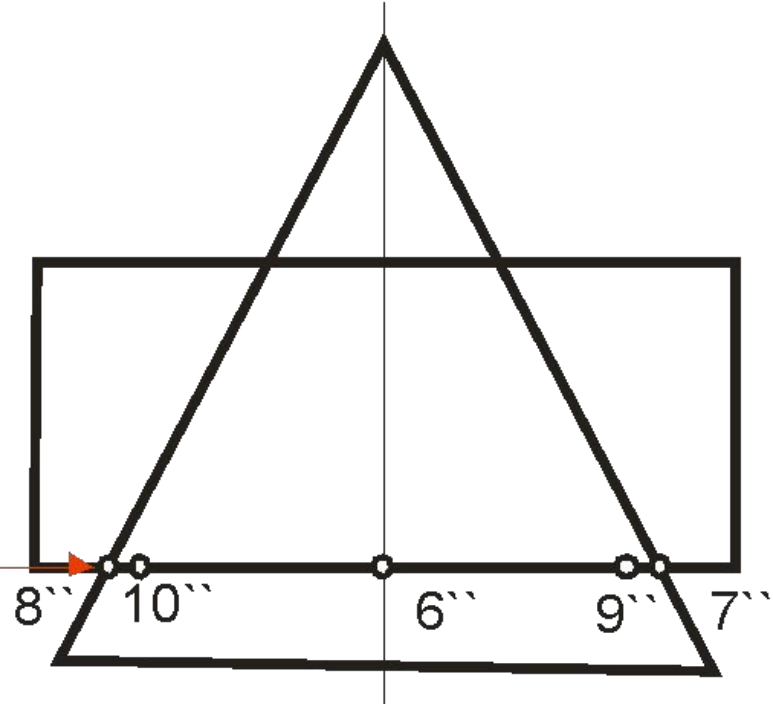
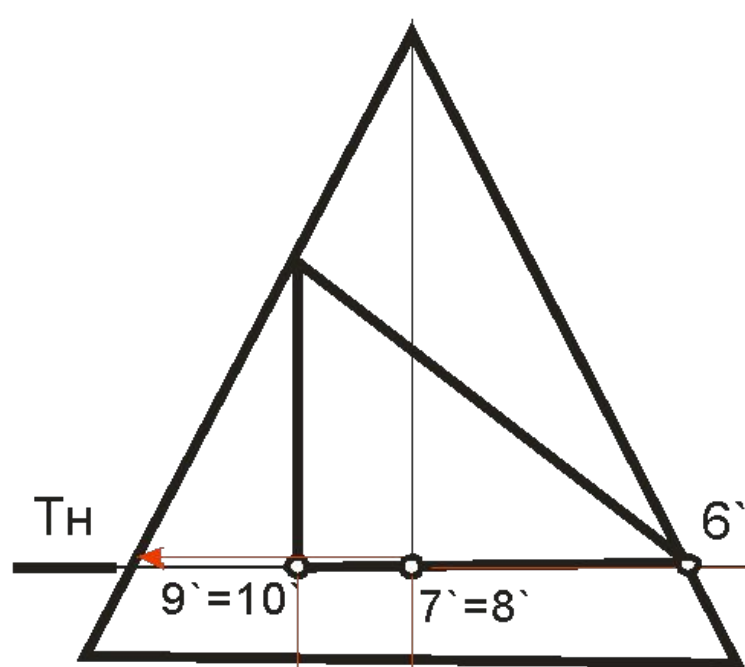
- 1) Определяем опорные точки линии пересечения
- 2) Находим их горизонтальные проекции
- 3) Рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
- 4) Вторично рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
- 9) Определяем видимость точек

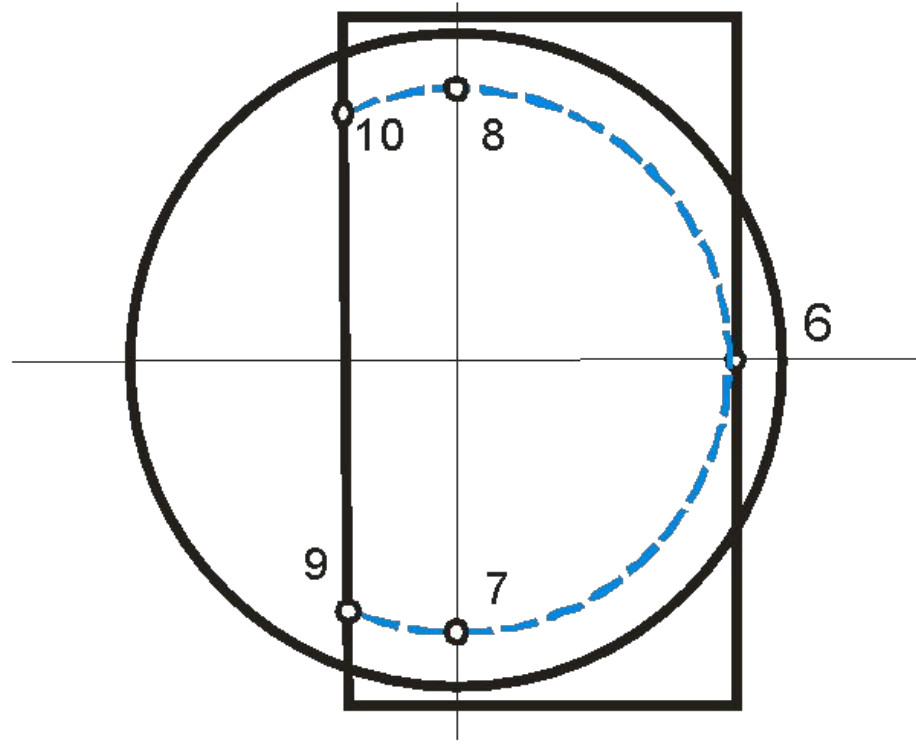
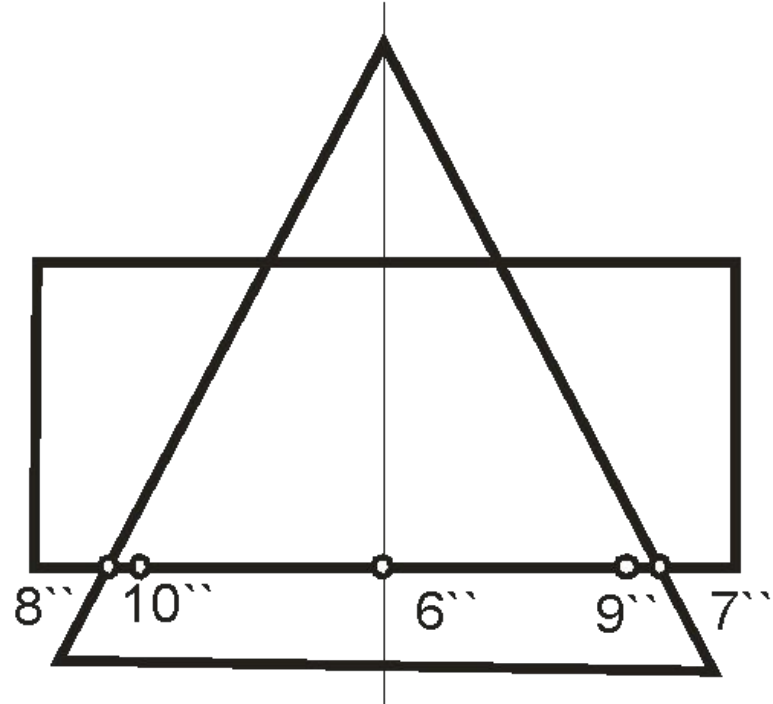
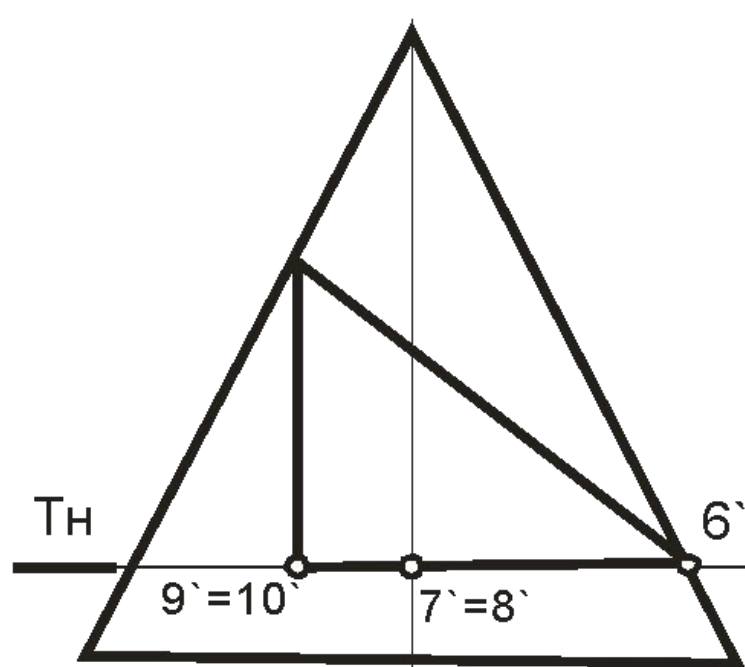


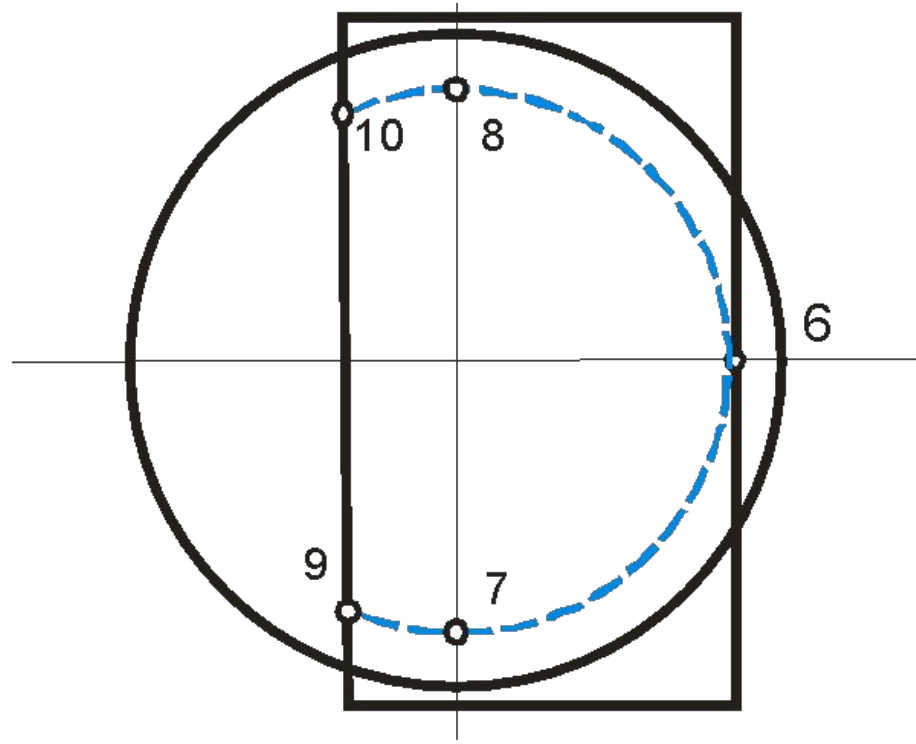
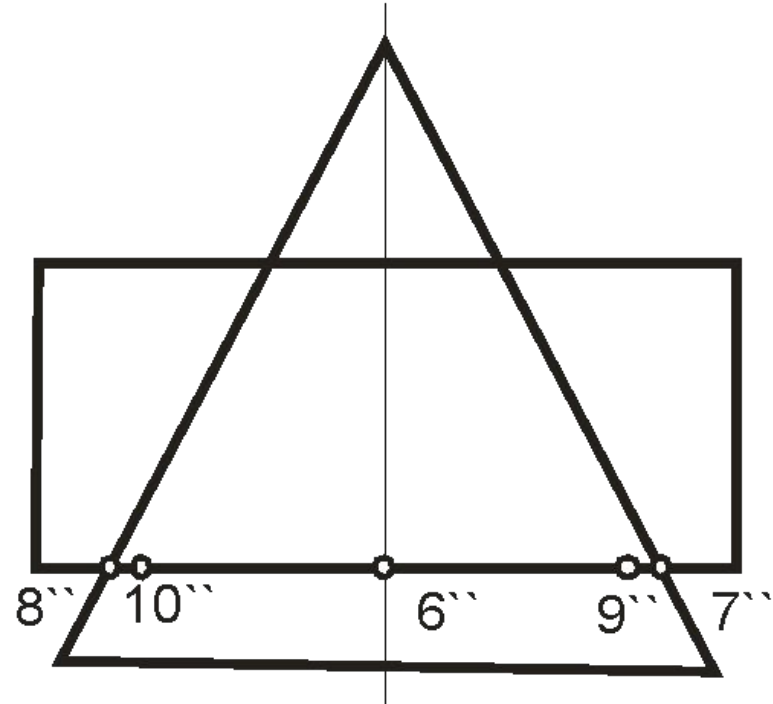
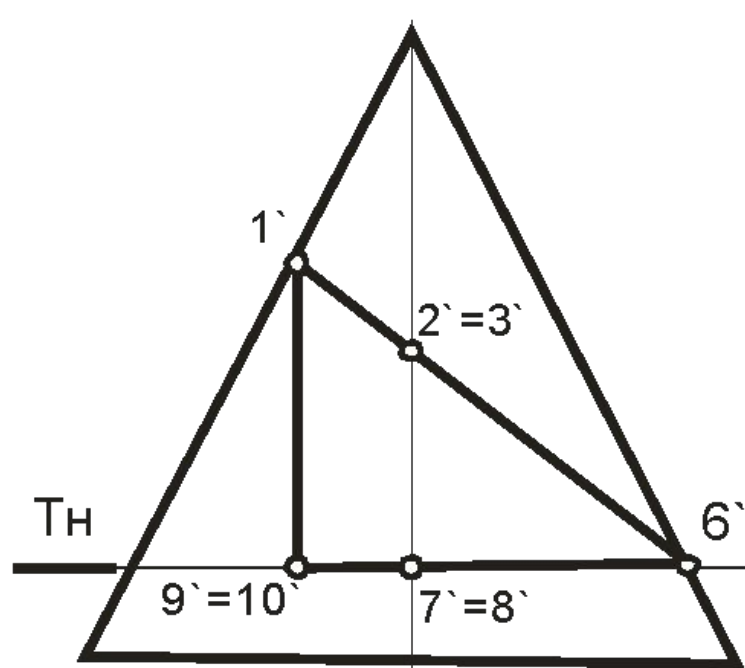
- В этом случае призму можно рассматривать, как три плоскости α , β , γ , проходящие через ее грани, а задача сводится к нахождению линий пересечения этих плоскостей с конусом.
- При этом в соответствии с характерными сечениями конуса известно, что плоскость α пересекает конус по окружности параллельной Π_1 , β - по гиперболе параллельной Π_3 , а γ - по эллипсу.
- На плоскость Π_2 линии пересечения от всех плоскостей проецируются в прямые, совпадающие со следами плоскостей α , β , и γ .
- Для построения проекций этих линий на плоскости Π_1 и Π_3 отметим характерные точки на уже имеющейся фронтальной проекции линий пересечения:

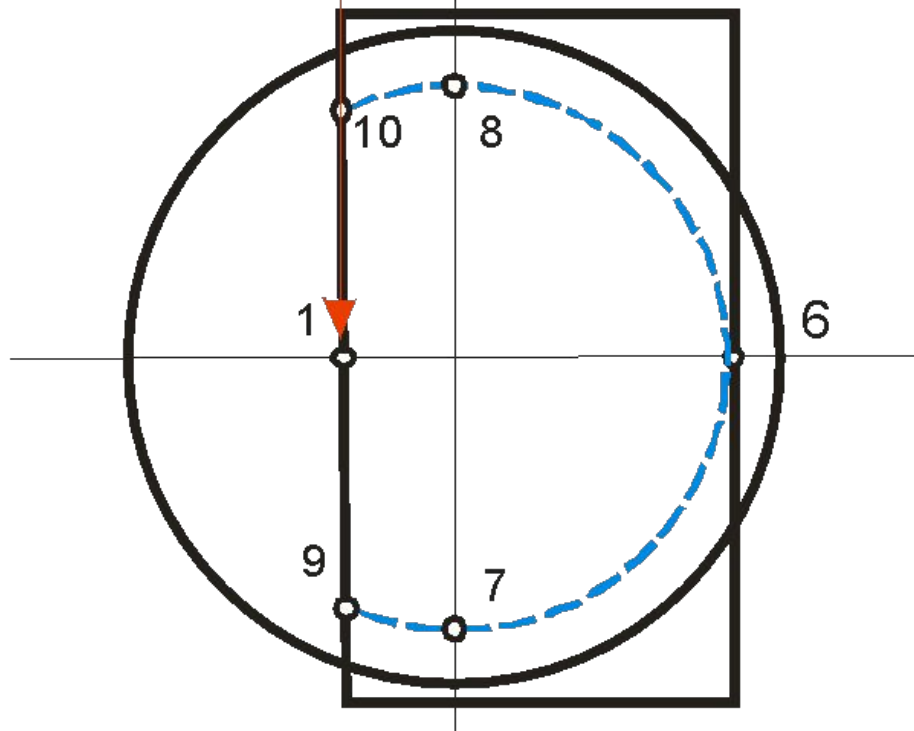
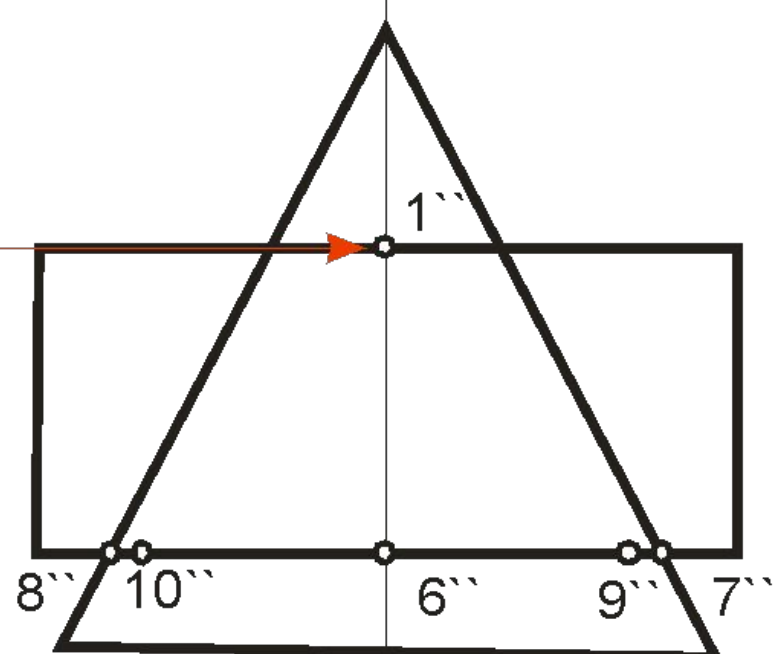
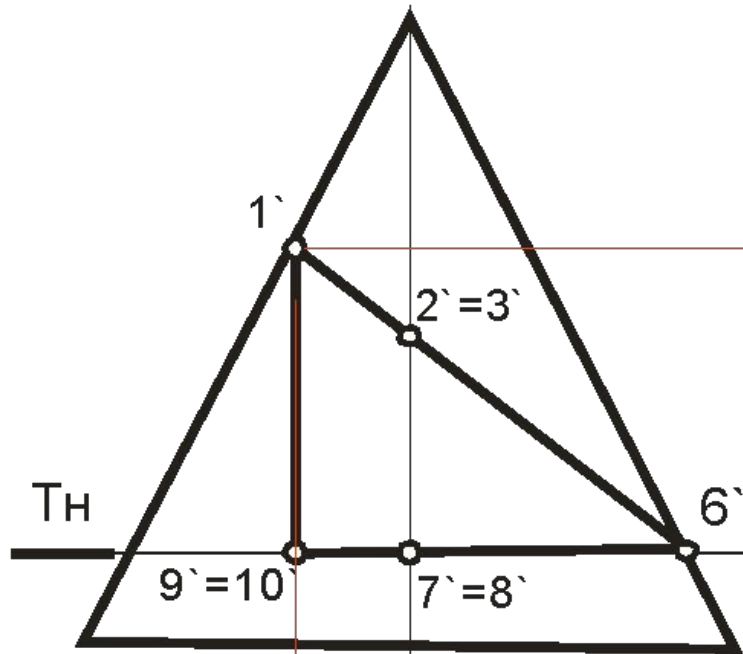


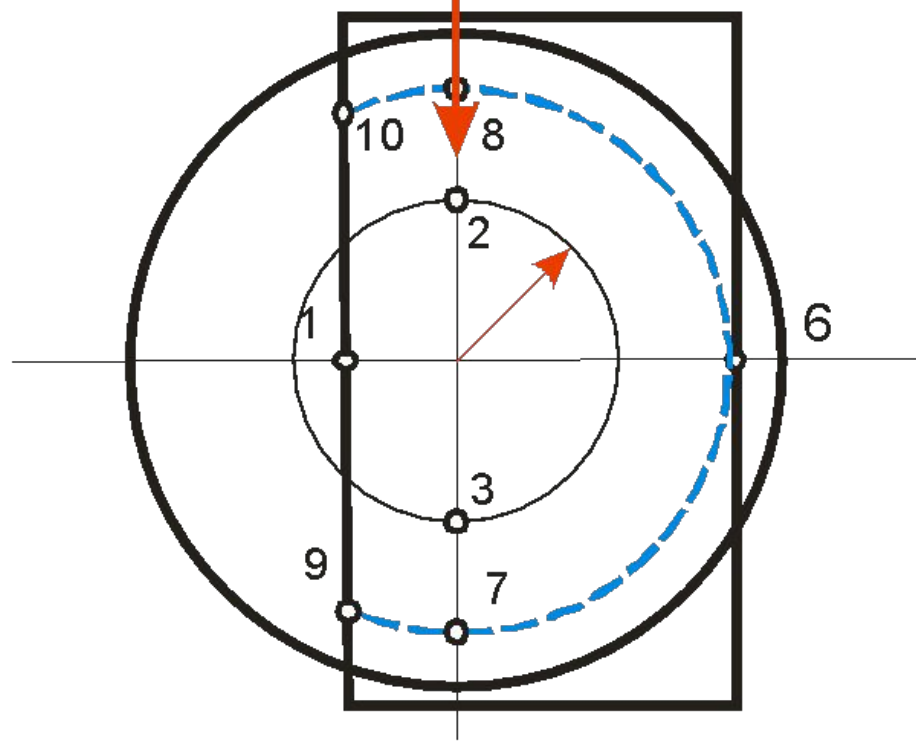
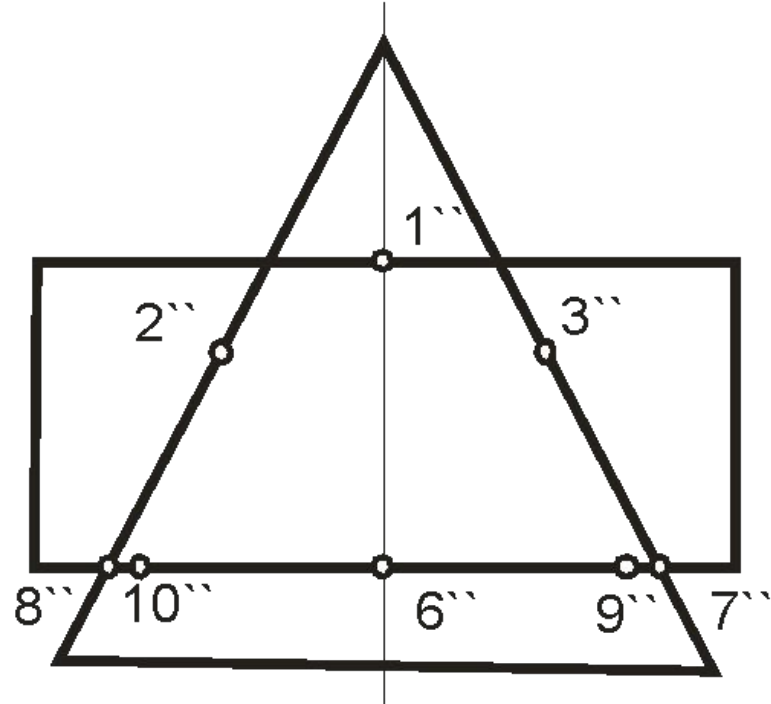
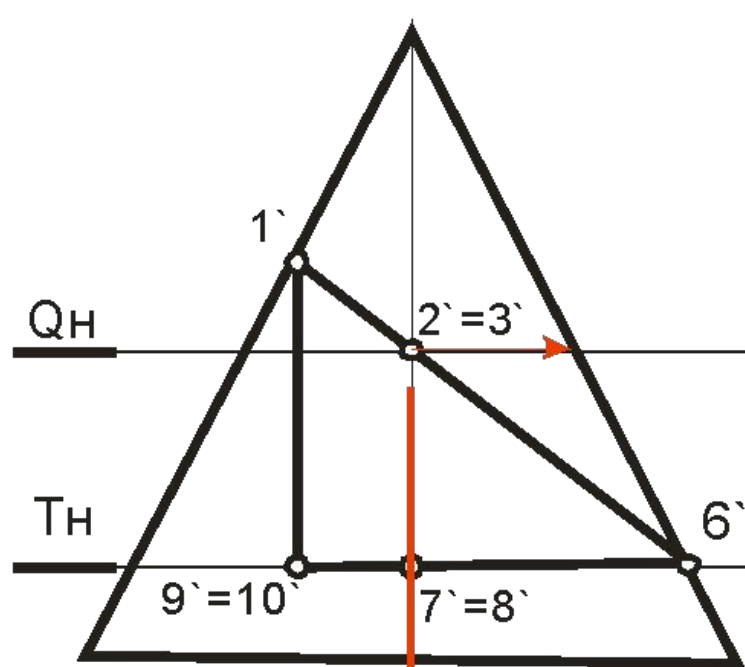


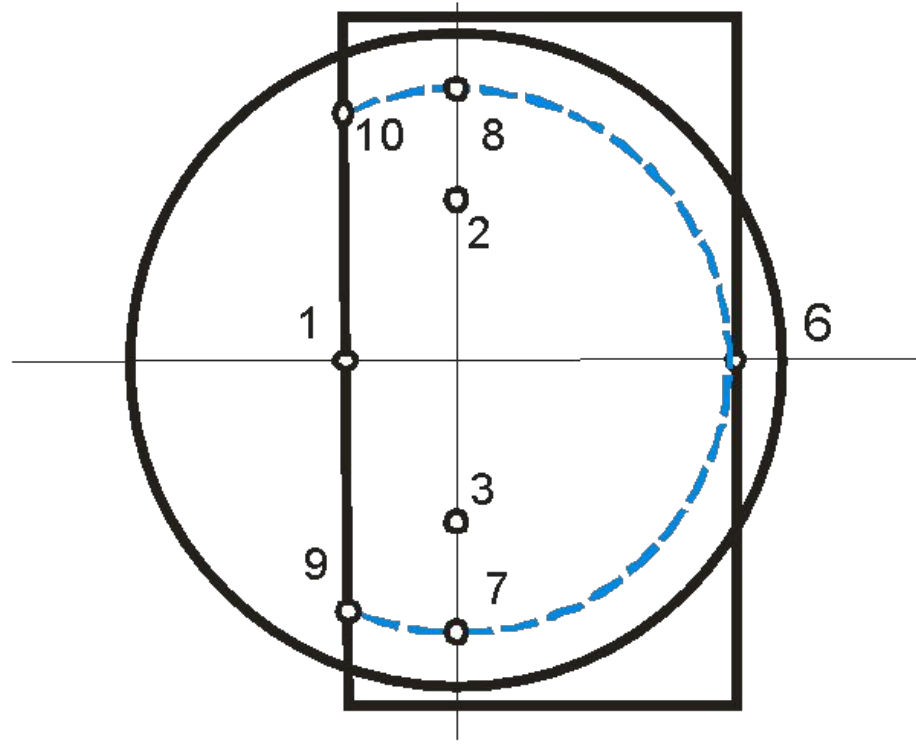
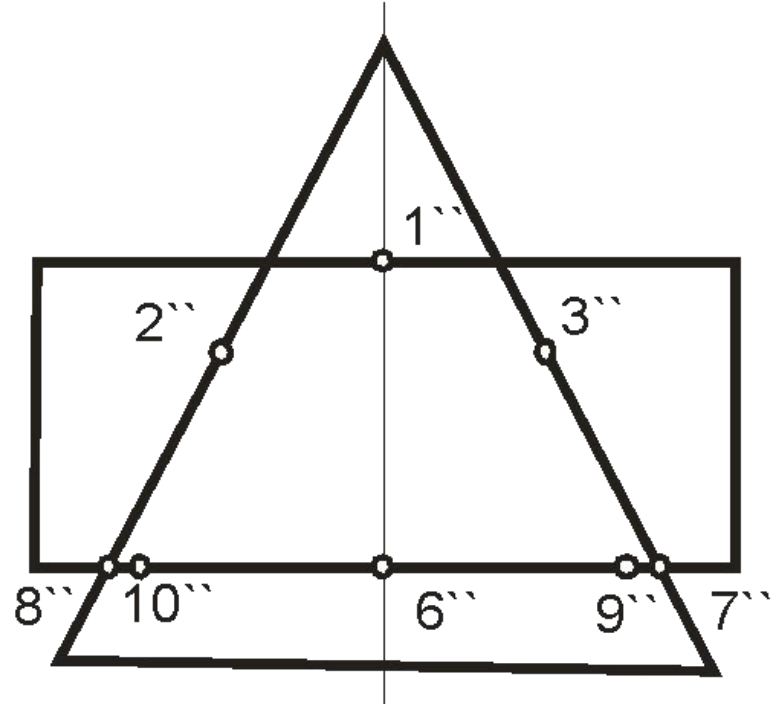
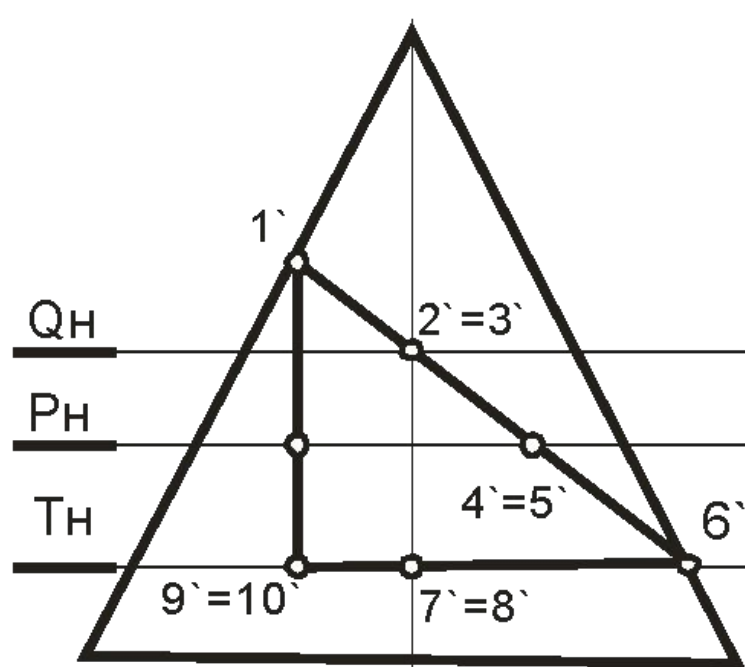


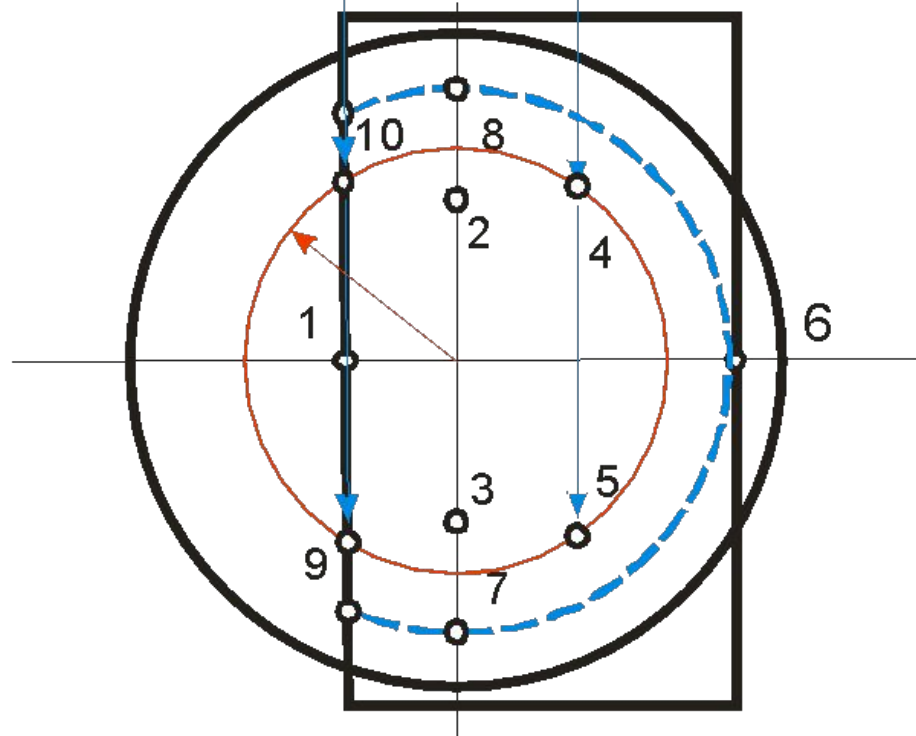
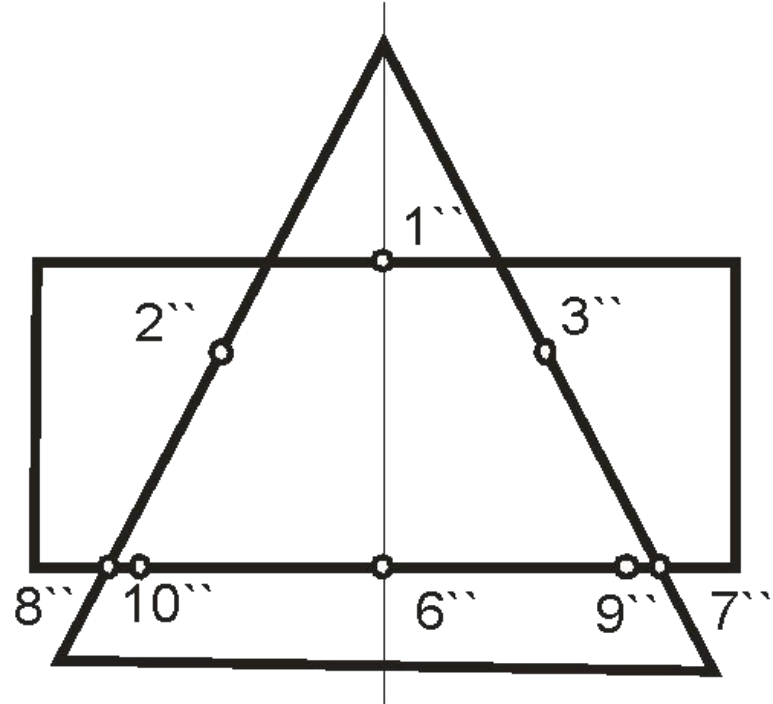
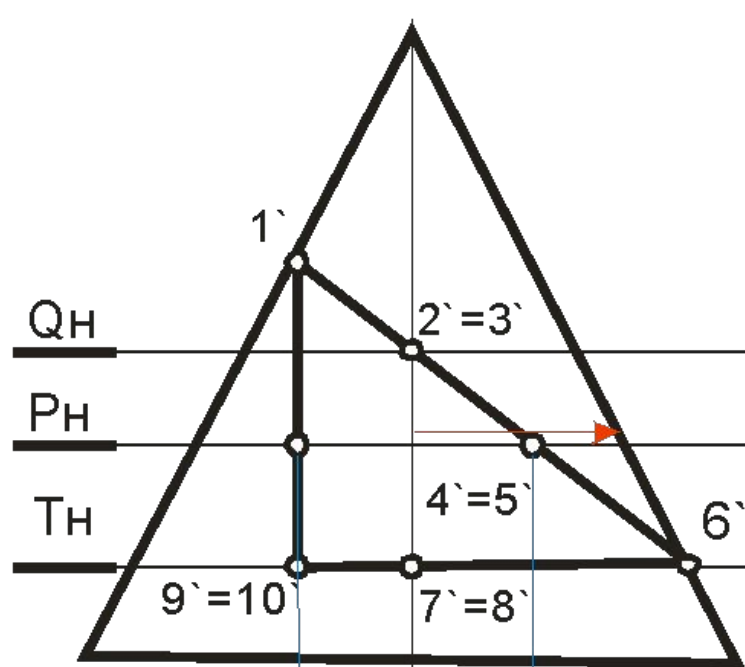


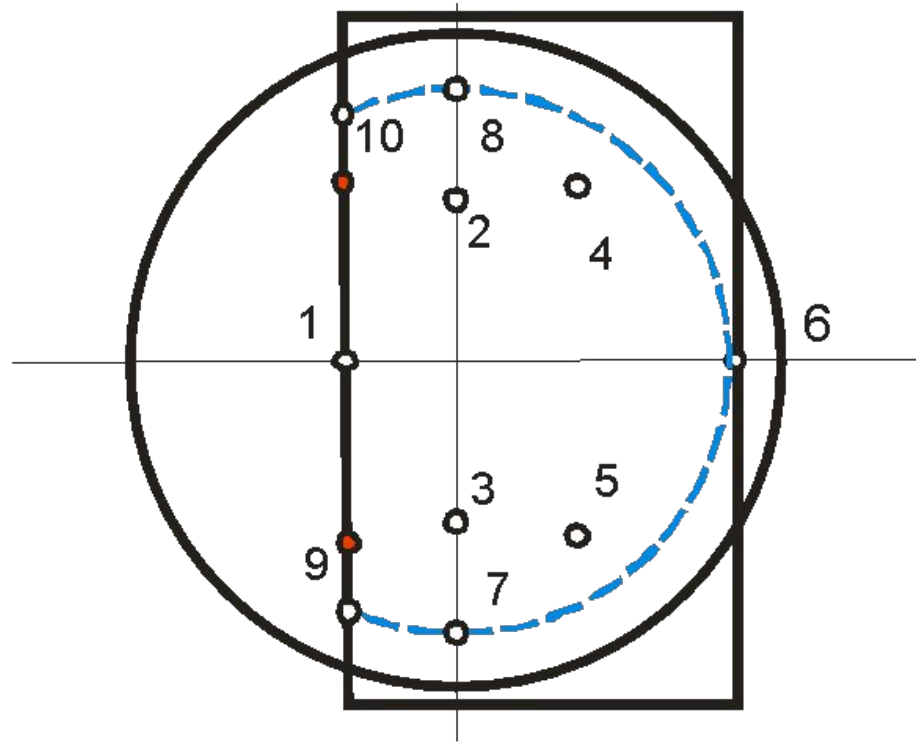
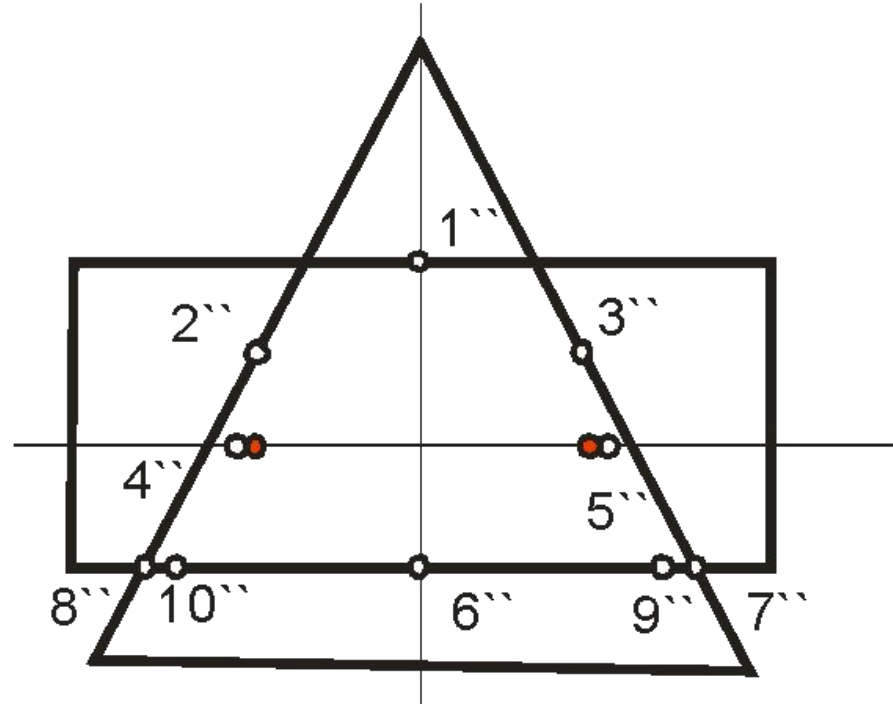
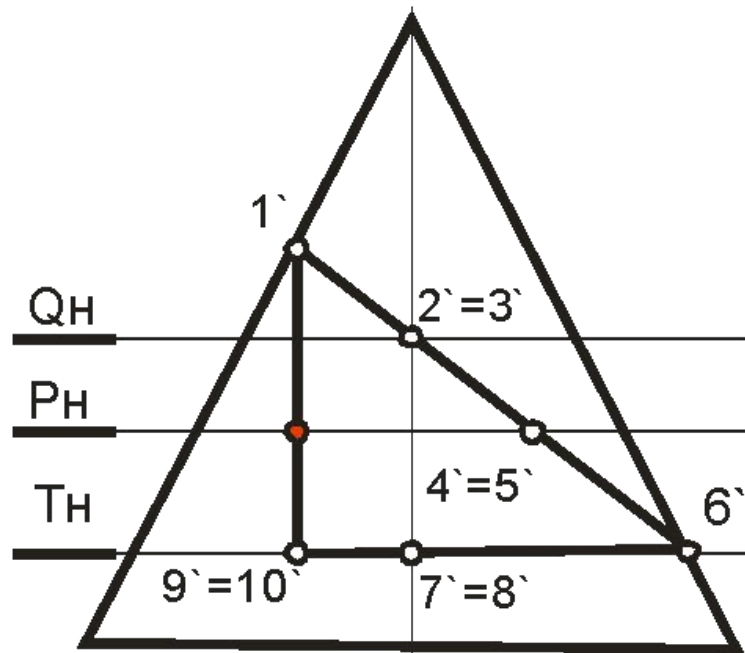


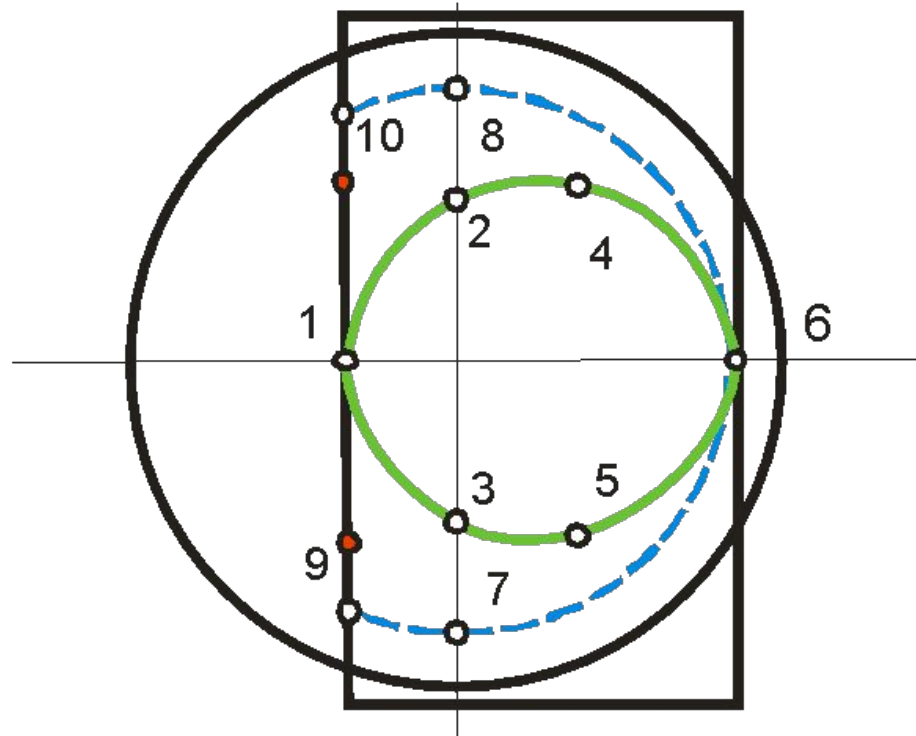
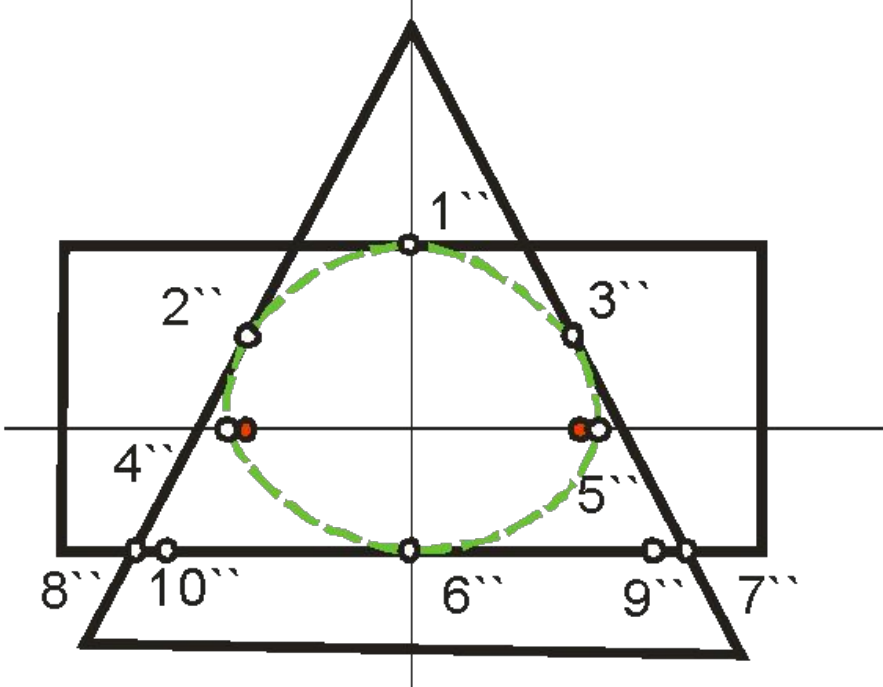
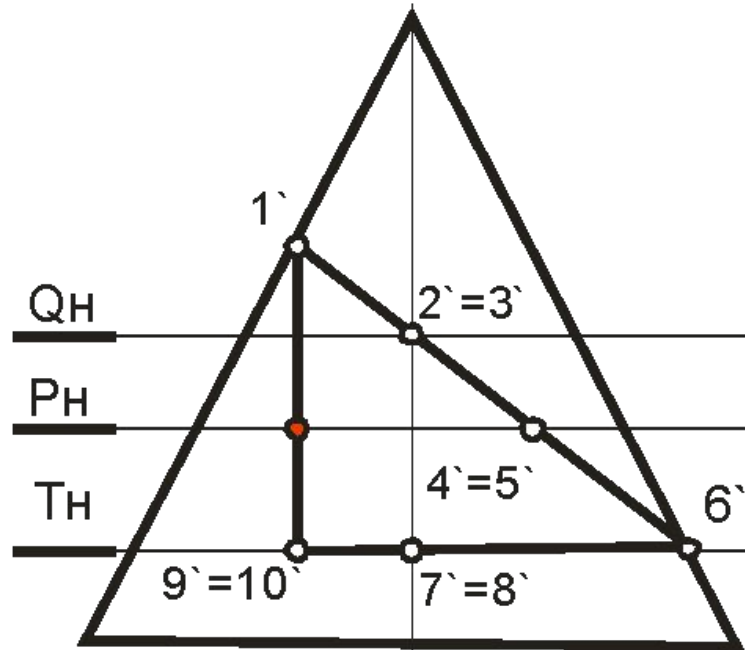


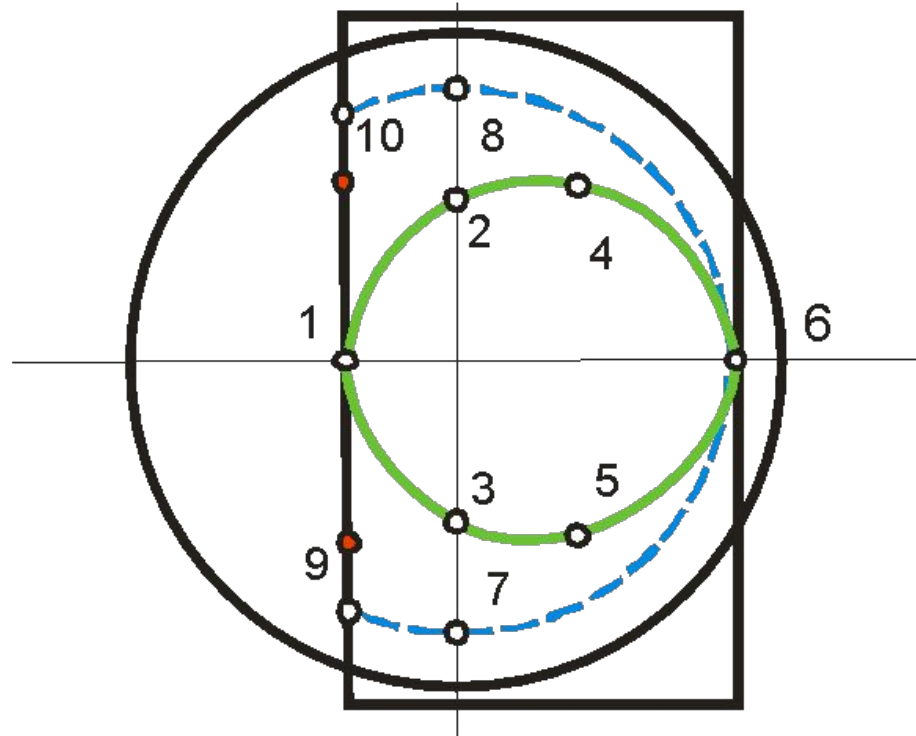
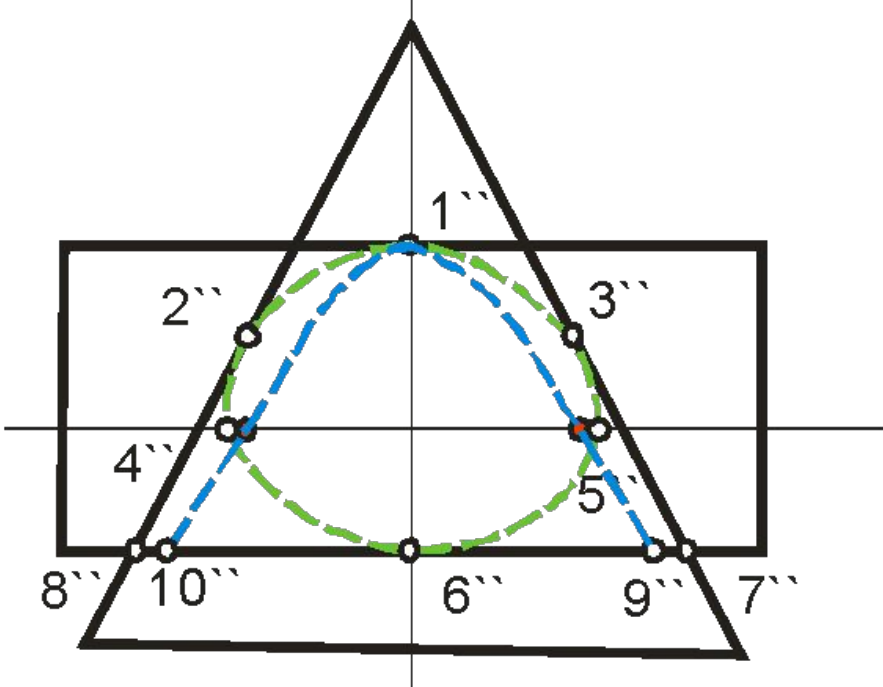
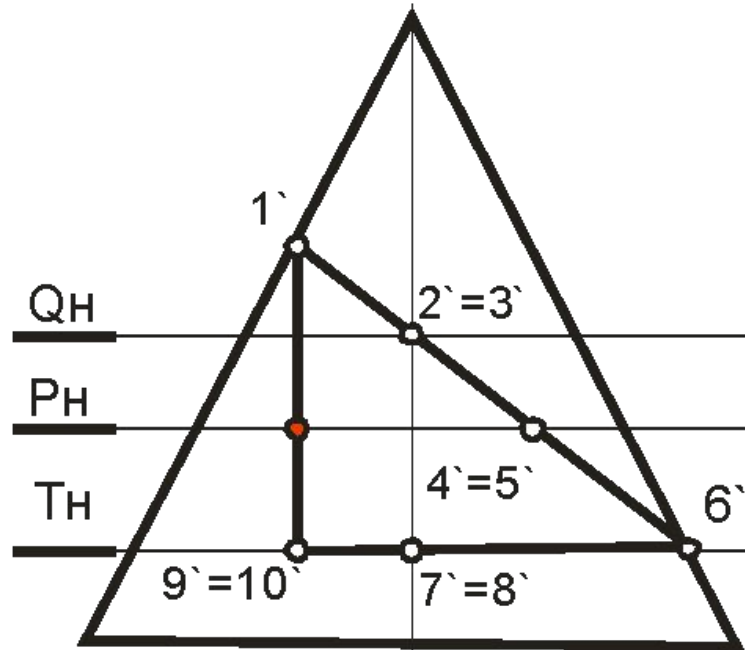












- Точки **12** и **62** – пересечения плоскости γ с очерком проекции конуса на плоскость ***П2*** (главным меридианом), эти точки определяют положение большой оси эллипса, кроме того точка **12** – проекция точки вершины гиперболы и одновременно принадлежит конусу (лежит на очерке фронтальной проекции конуса) и ребру призмы (линии пересечения плоскостей α и β), а точка **62** – проекция точки, одновременно принадлежащей конусу и ребру призмы (линии пересечения плоскостей α и γ); точки **2, 3, 7 и 8** – характерны тем, что их профильные проекции лежат на очерке проекции конуса; **42, 52** – точки, лежащие на середине отрезка **1262** (большой оси эллипса) и определяют положение малой оси эллипса; **9,10** – точки одновременно принадлежащие конусу и ребру призмы (образованному пересечением плоскостей α и β).
- Рассмотрим последовательность нахождения проекций точек **4** и **5**. Через фронтальные проекции этих точек проведем вспомогательную секущую плоскость ϕ . Эта плоскость пересекает конус по параллели p , а грань призмы по прямой линии m , параллельной ребру. На горизонтальной плоскости проекций пересечение p **1** и m **1** определяют положение точек **41** и **51**. Для точного построения кривых линий пересечения поверхностей обозначенных точек не достаточно. После нахождения проекций всех точек их необходимо соединить с учетом видимости.

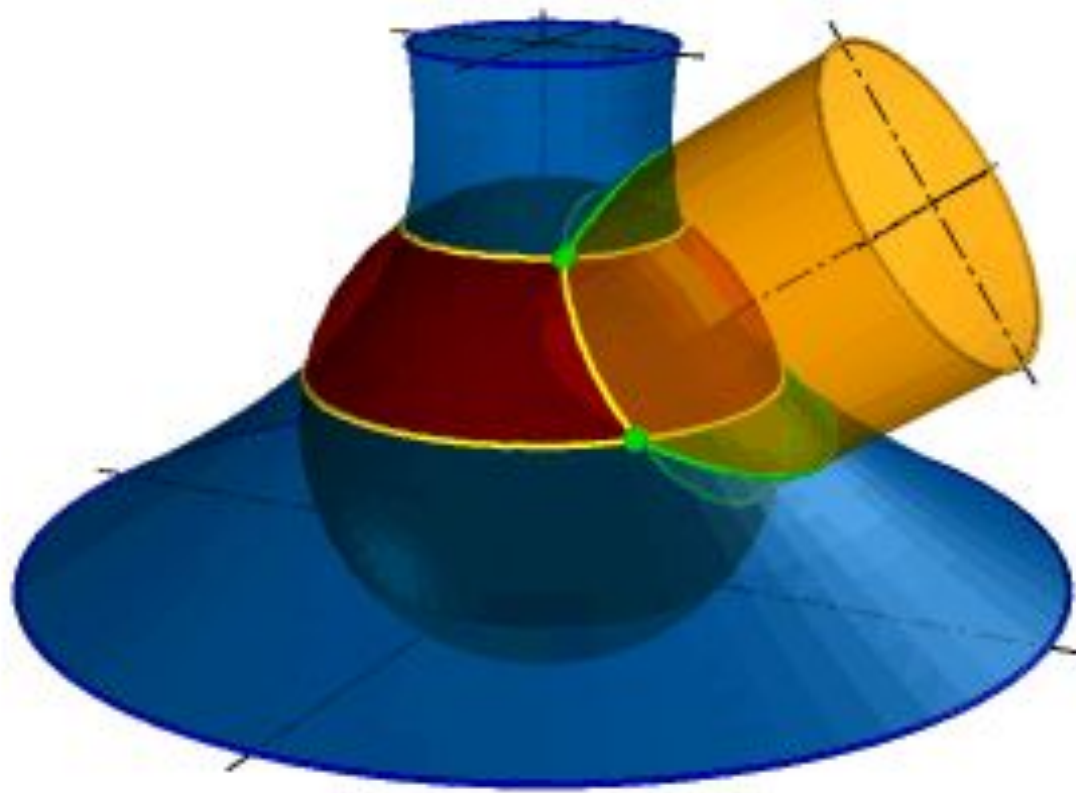
МЕТОД СЕКУЩИХ СФЕР

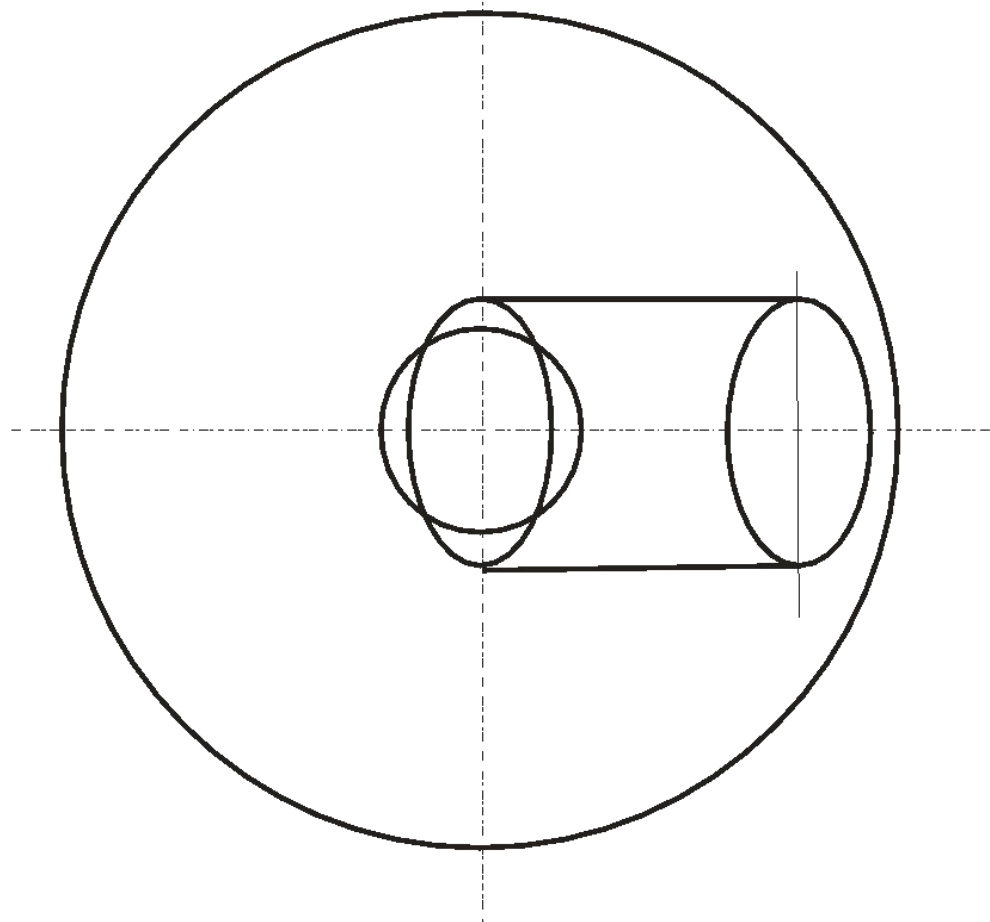
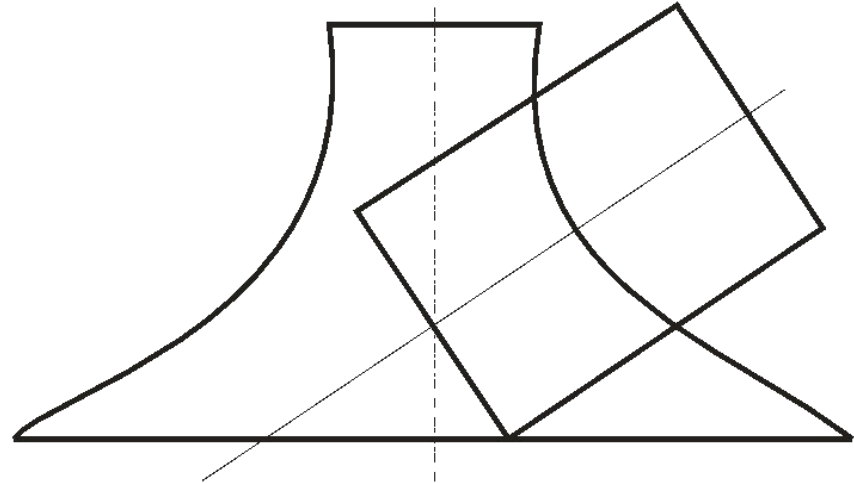
- Способ секущих сфер с постоянным центром для построения линии пересечения двух поверхностей применяют при следующих условиях
- 1) обе пересекающиеся поверхности – поверхности вращения;
- 2) оси поверхностей вращения пересекаются, точку пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;
- 3) плоскость образованная осями поверхностей, должна быть параллельна плоскости проекций

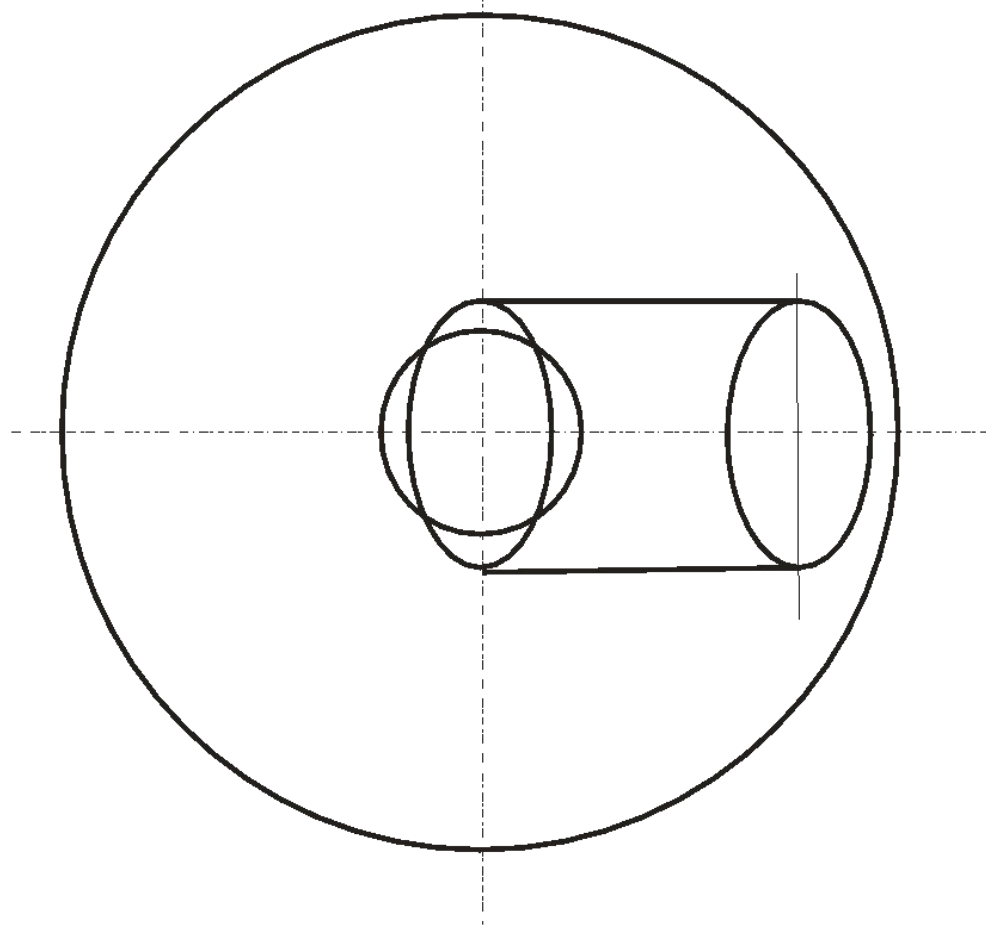
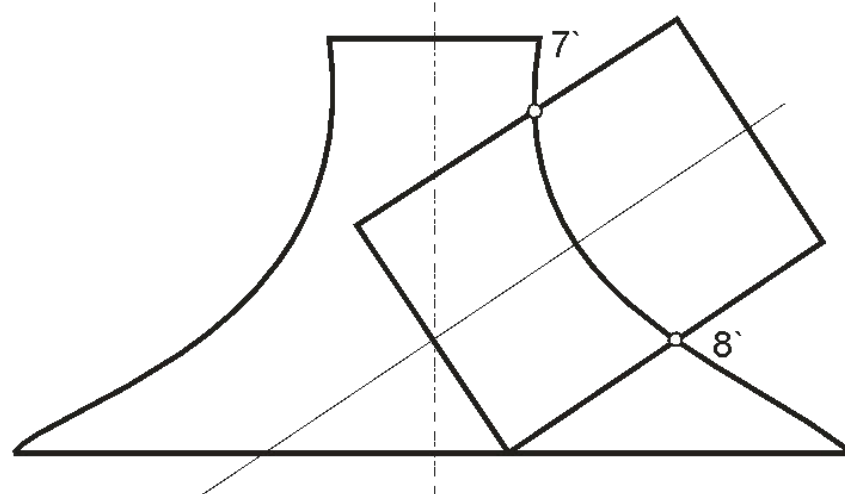
Алгоритм

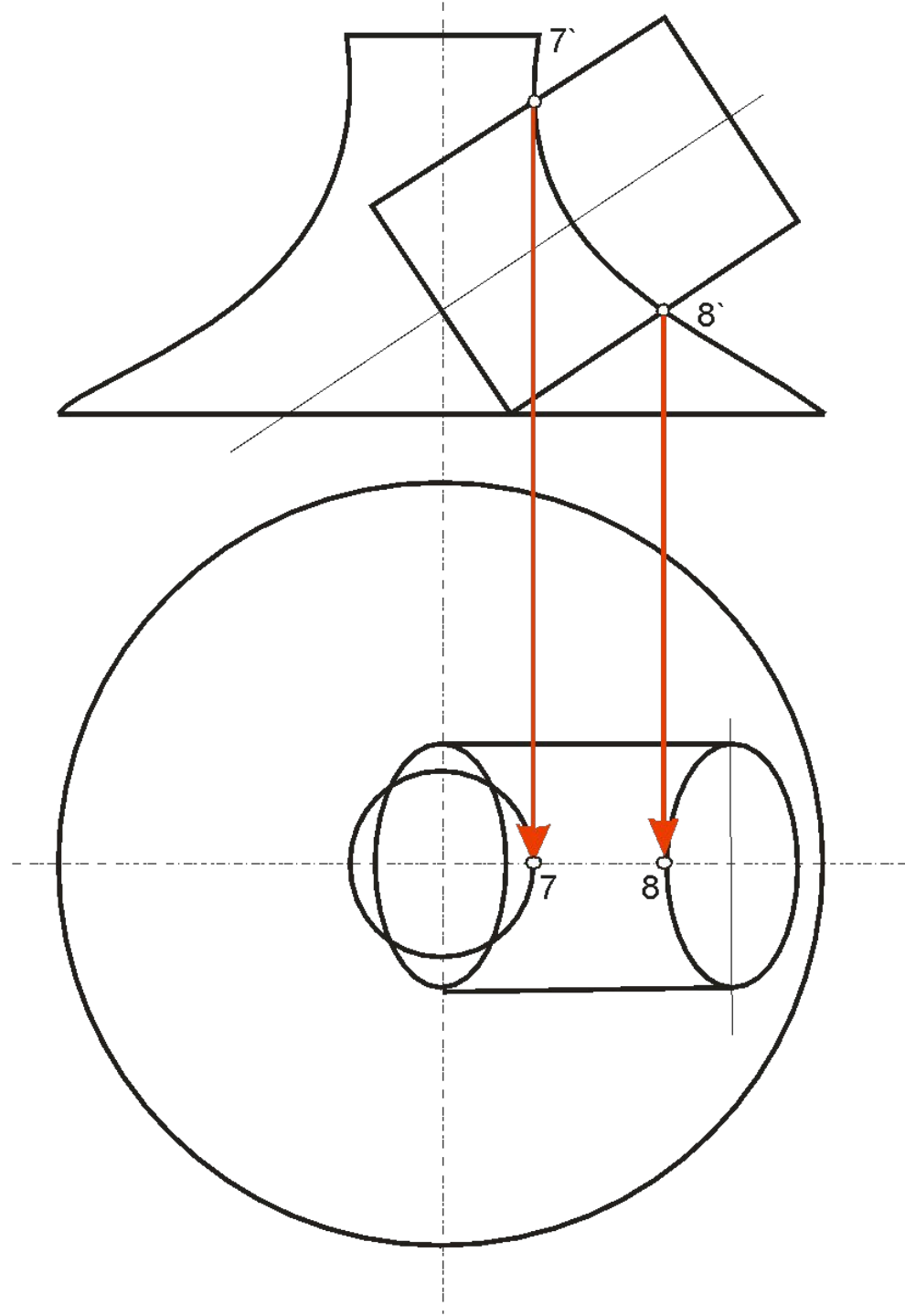
- 1) За центр выбираем точку пересечения осей.
- 2) С данной точки проводим сферу, чтобы она одной из поверхности касалась, а другую пересекала
- 3) Линия касания конуса и сферы перпендикулярна оси на пересечении находим точку
- 4) Увеличиваем радиус сферы и повторяем
- 9) Определяем видимость точек

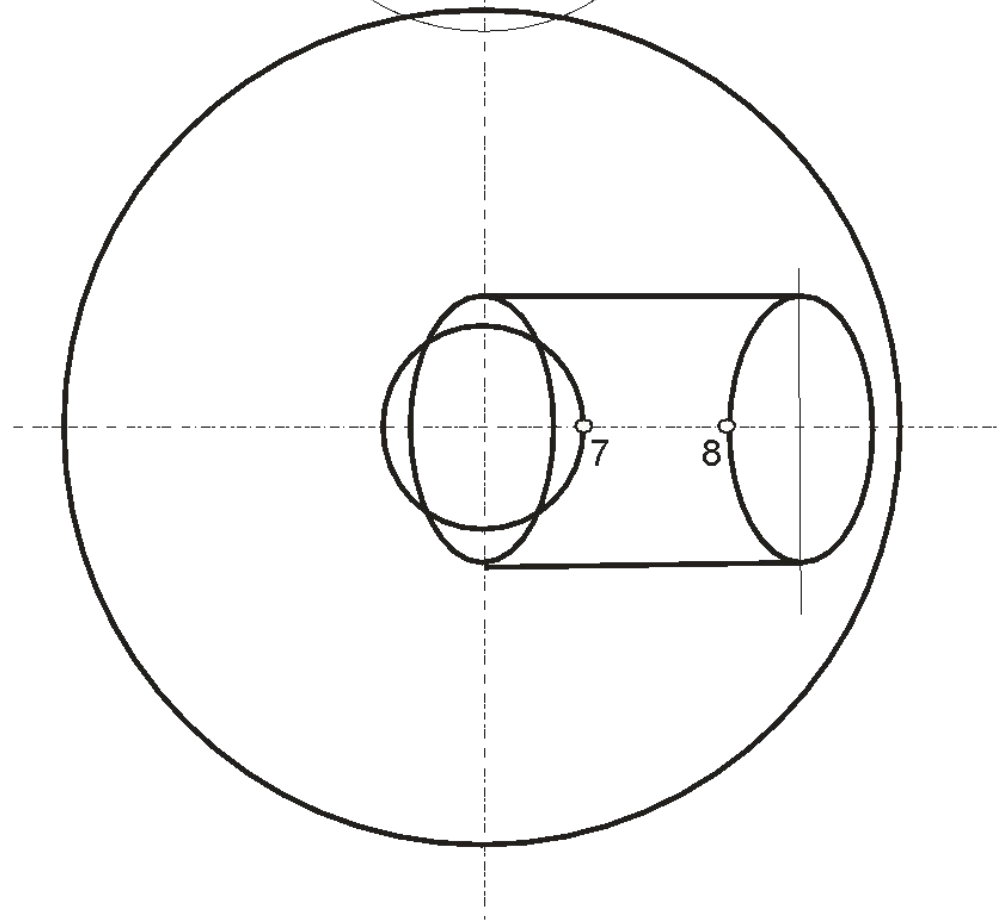
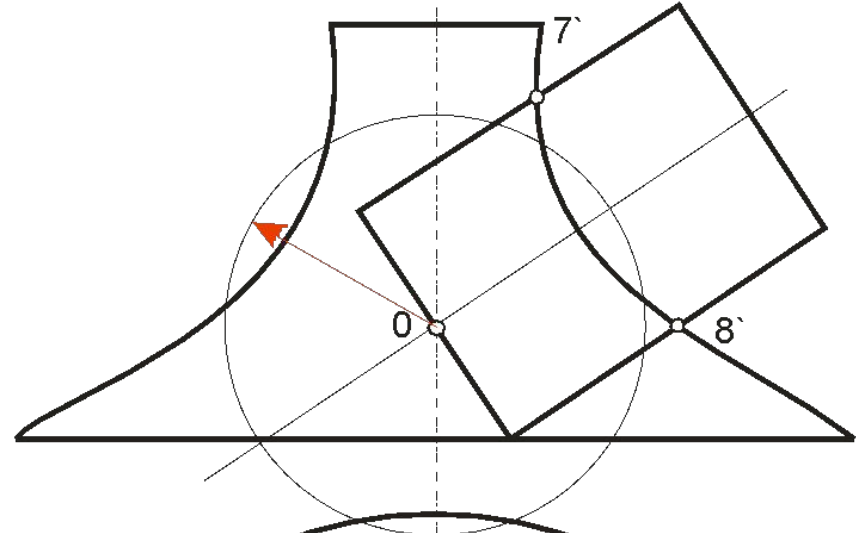
МЕТОД СЕКУЩИХ СФЕР

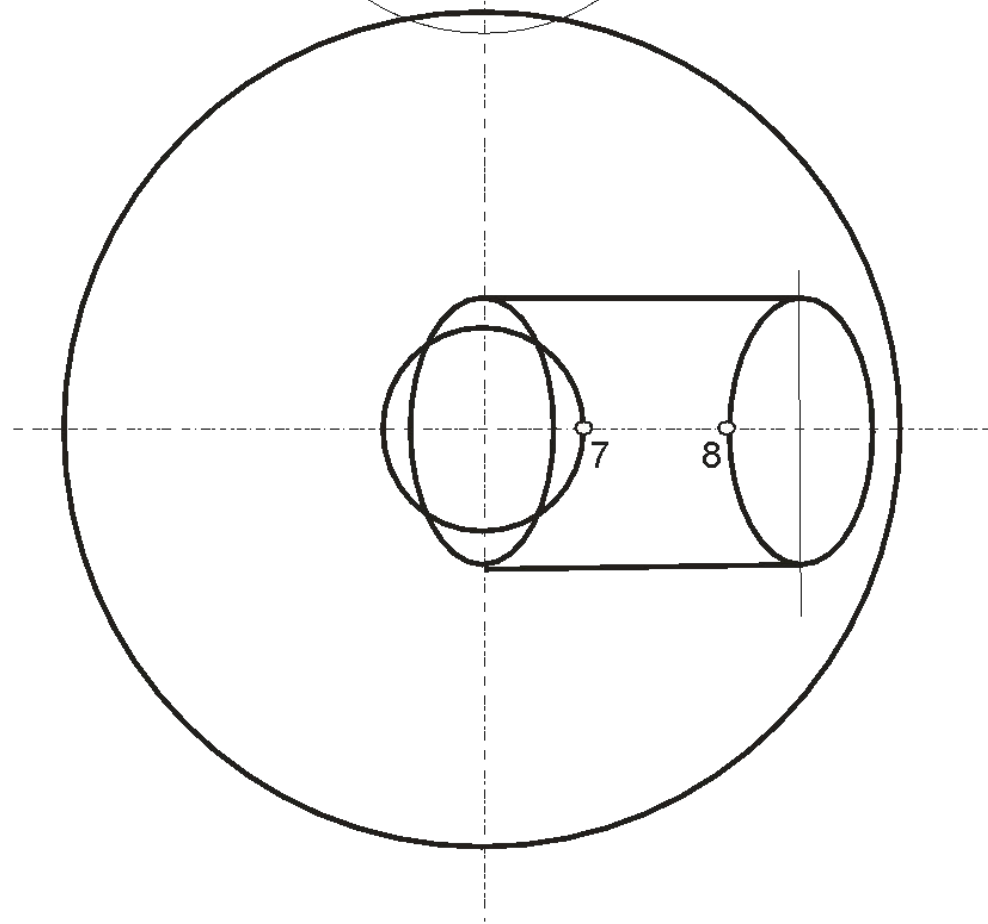
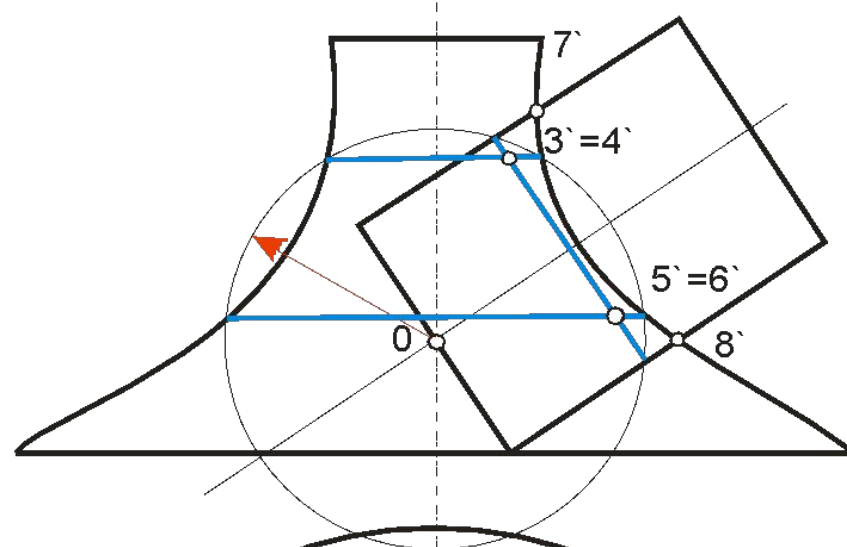


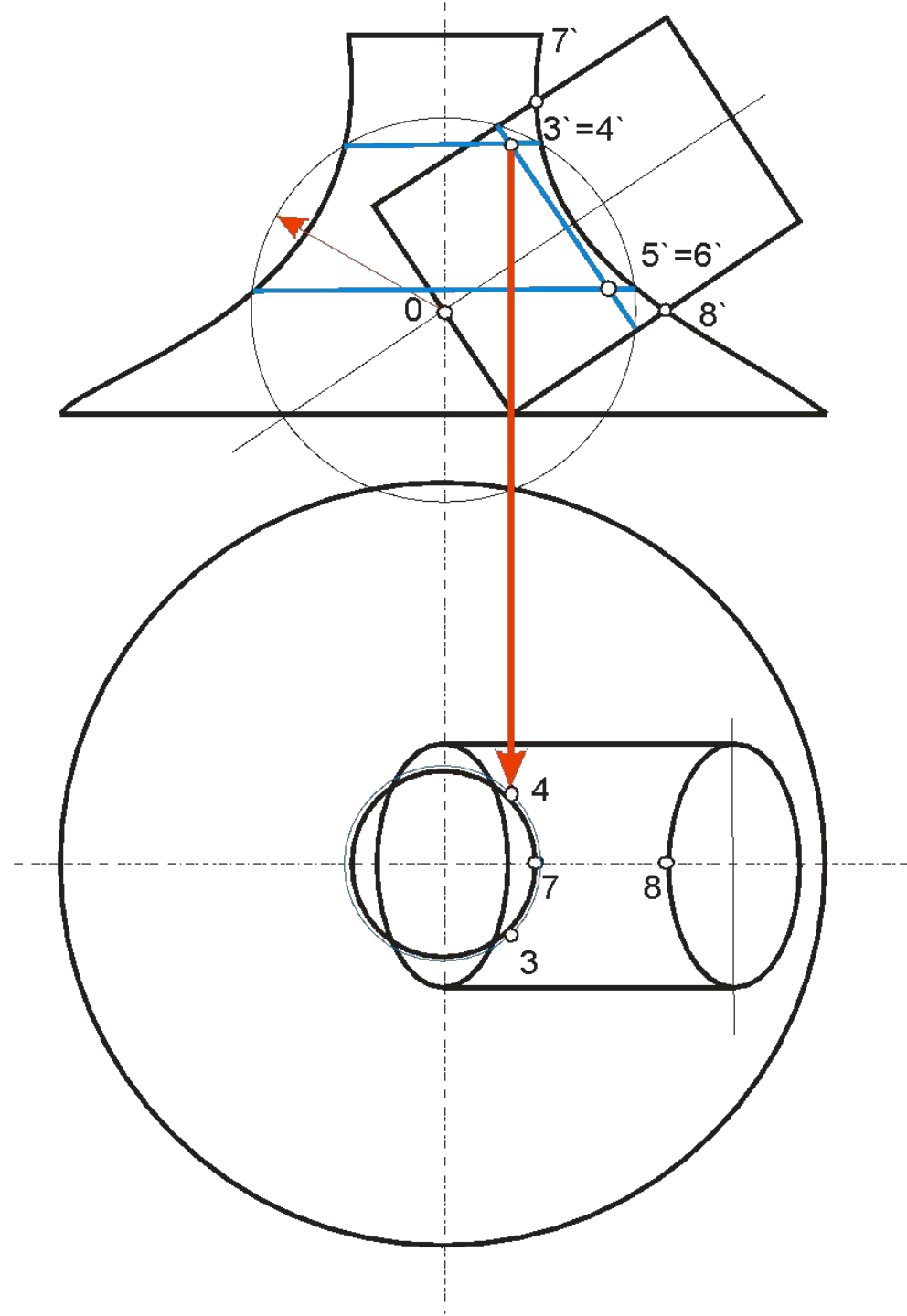


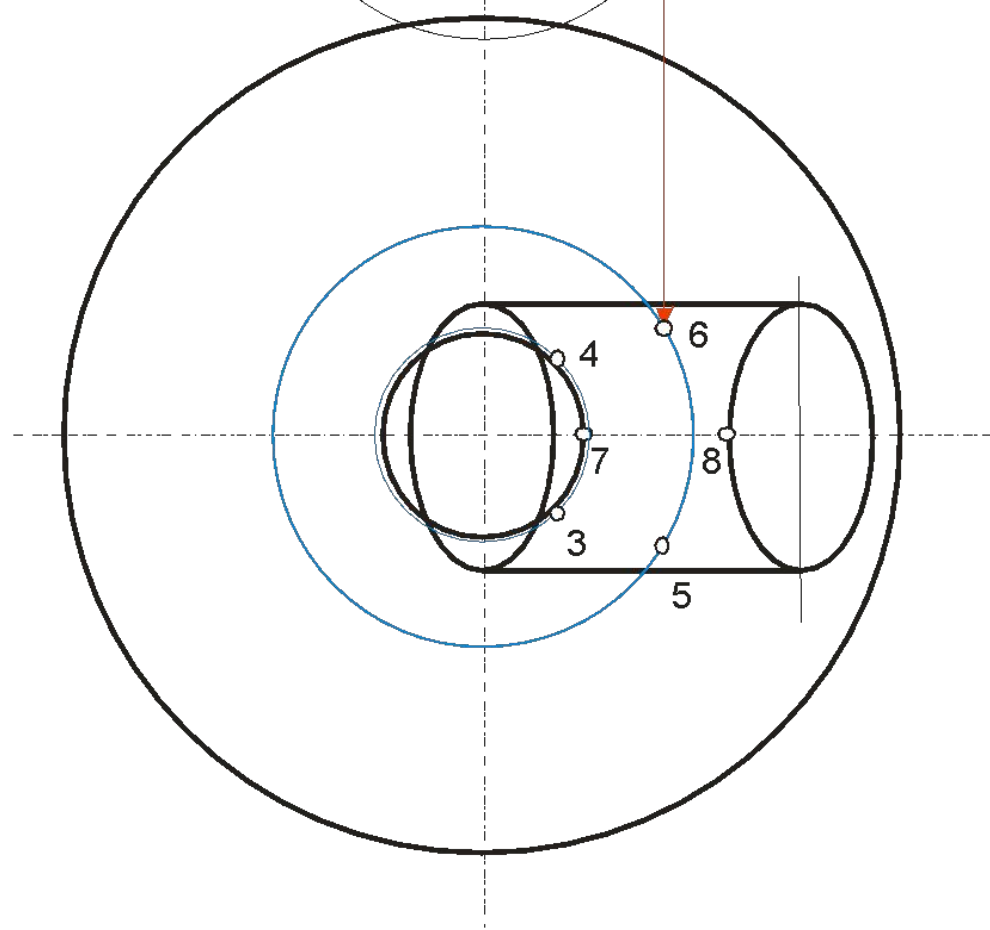
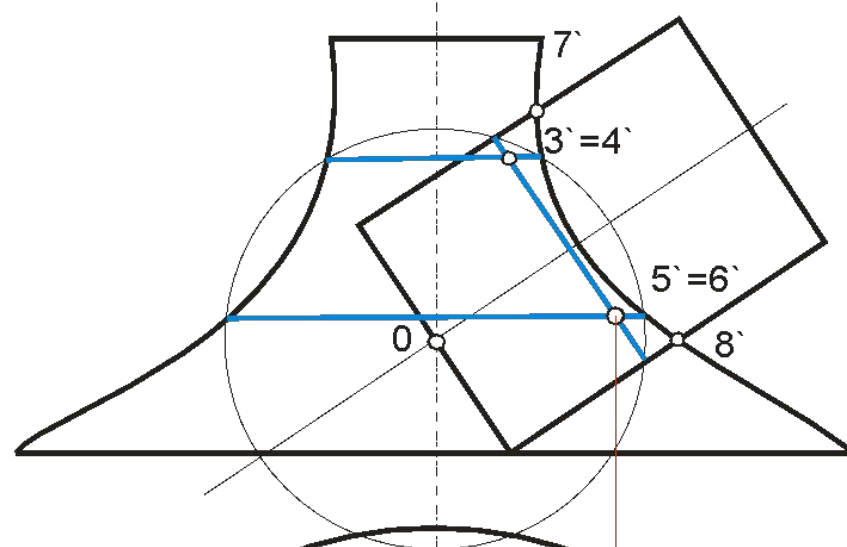


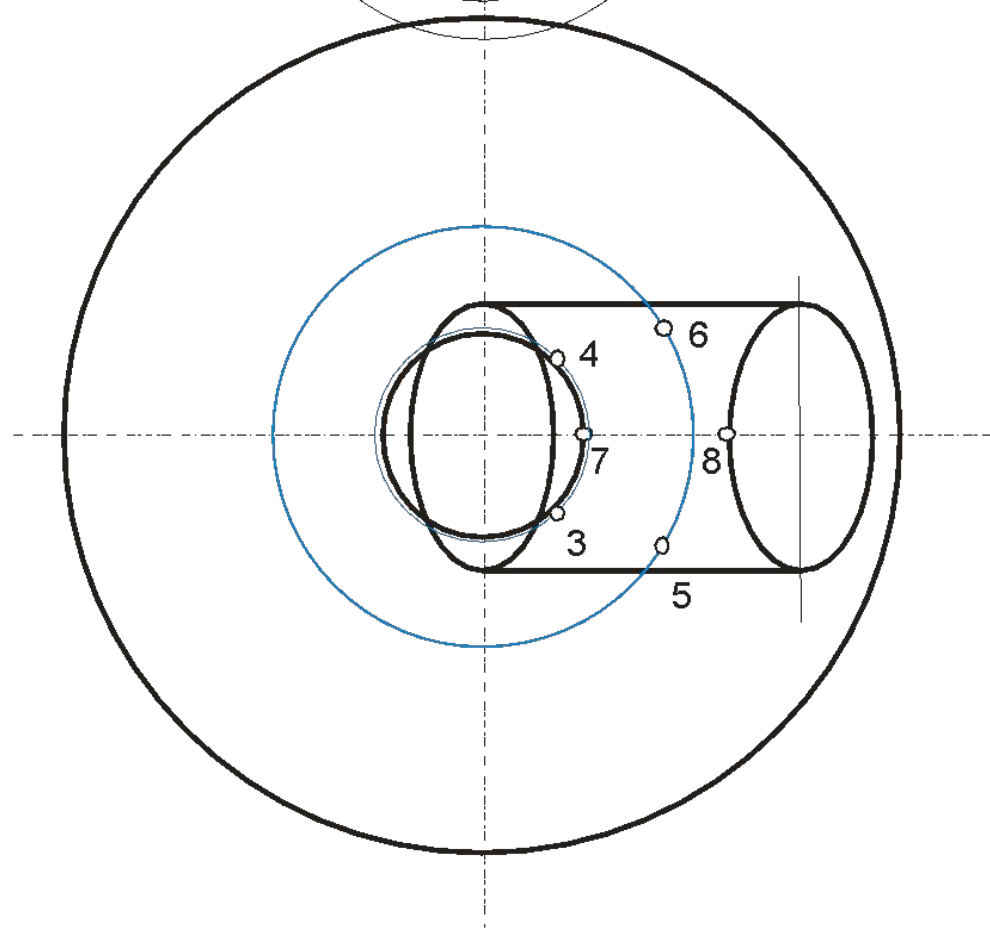
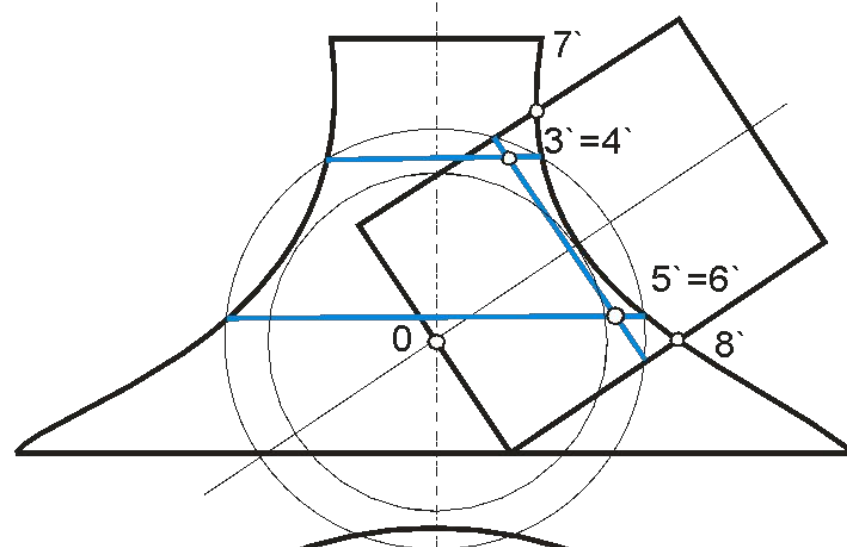


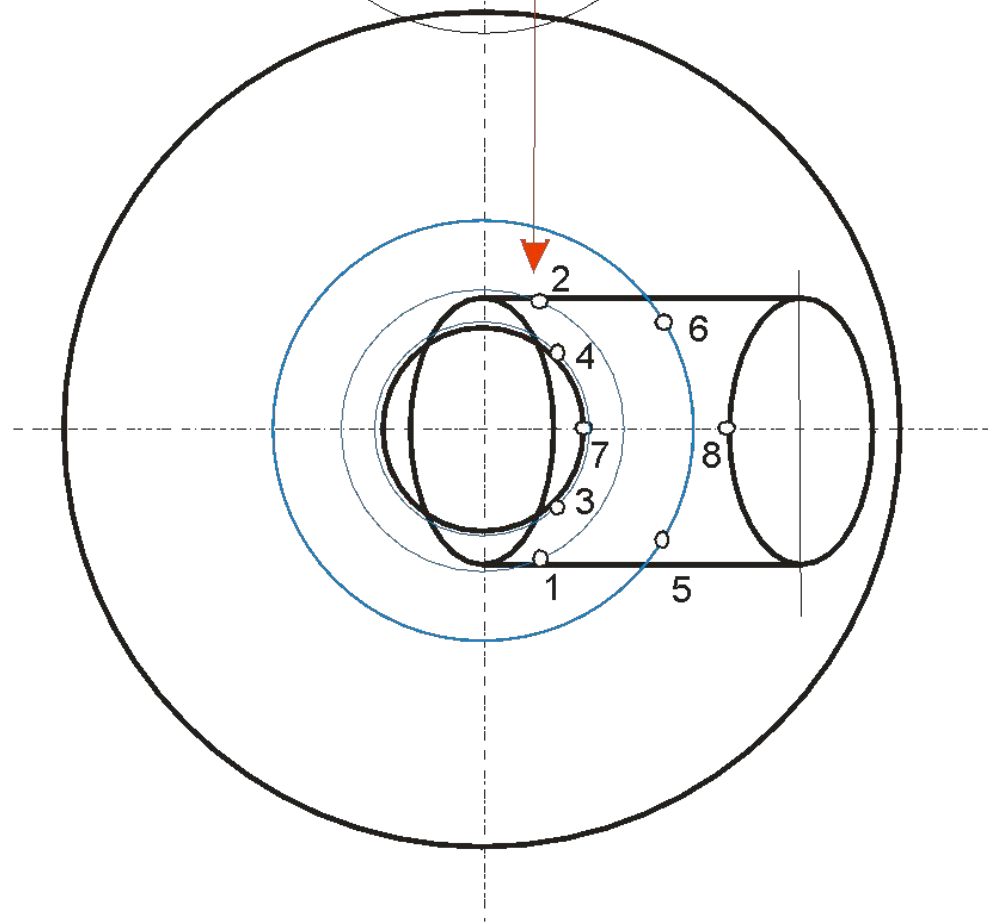
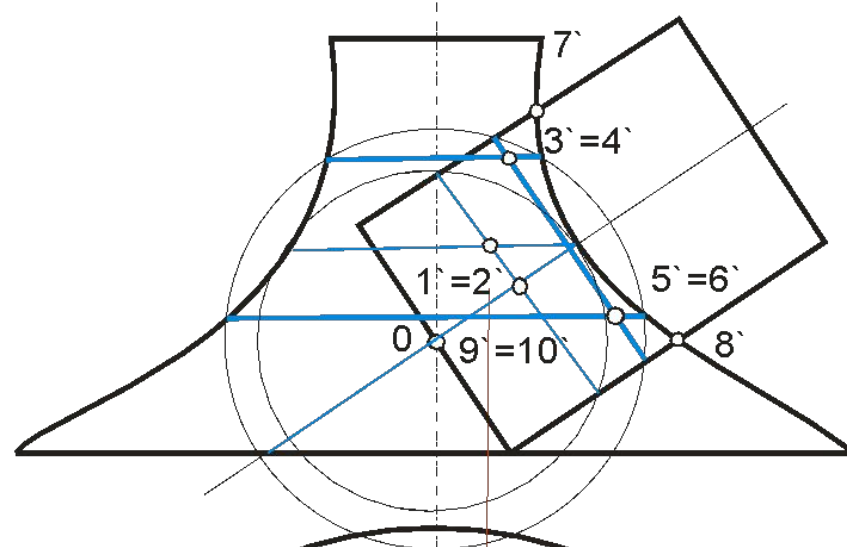


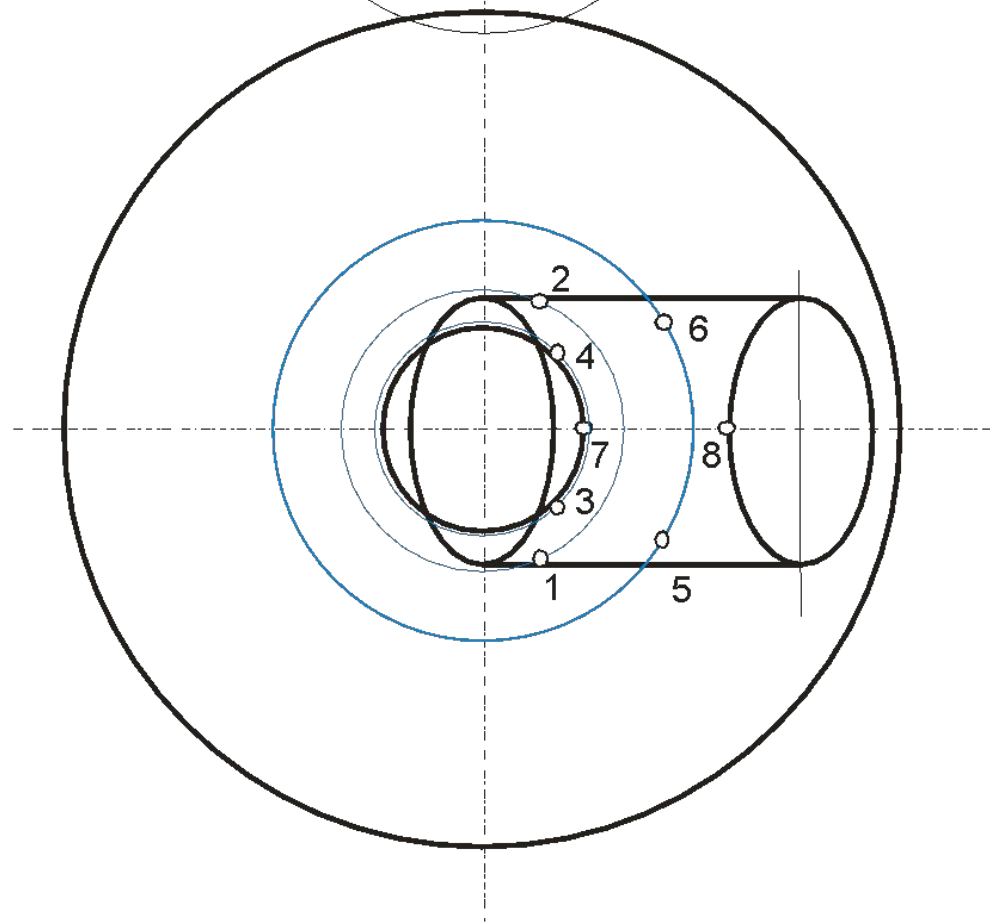
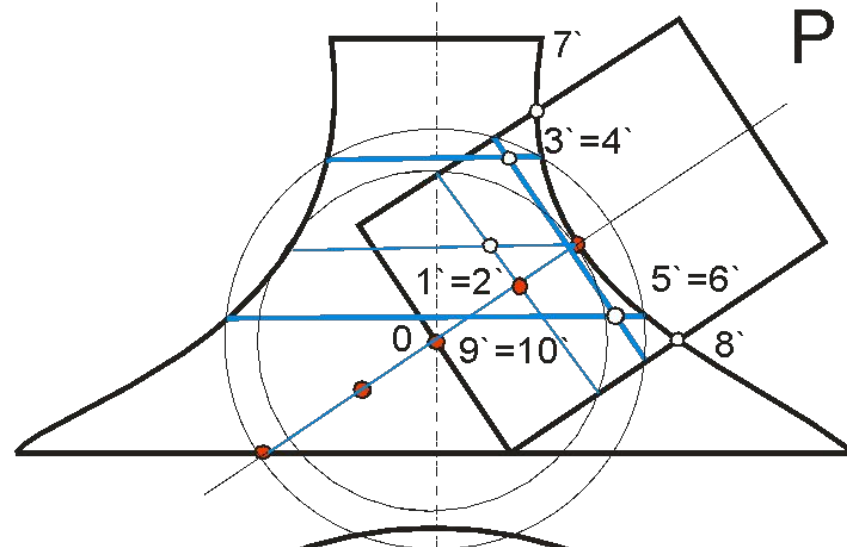


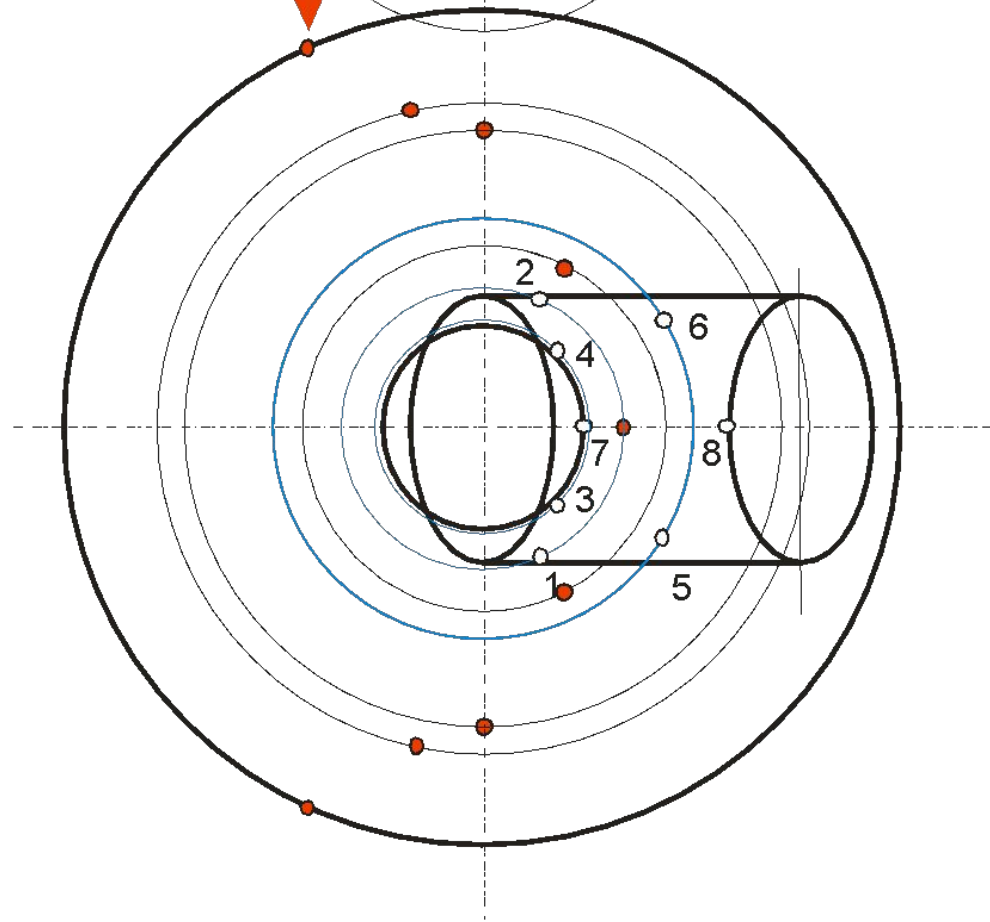
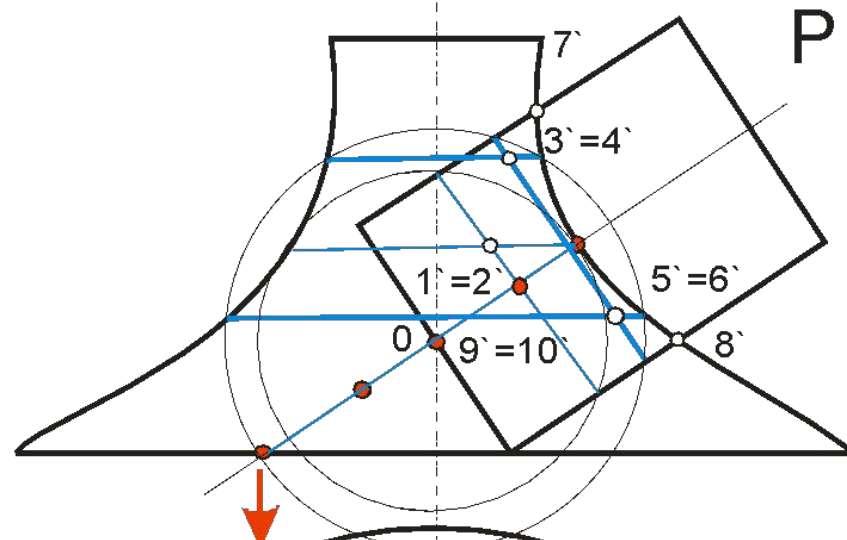


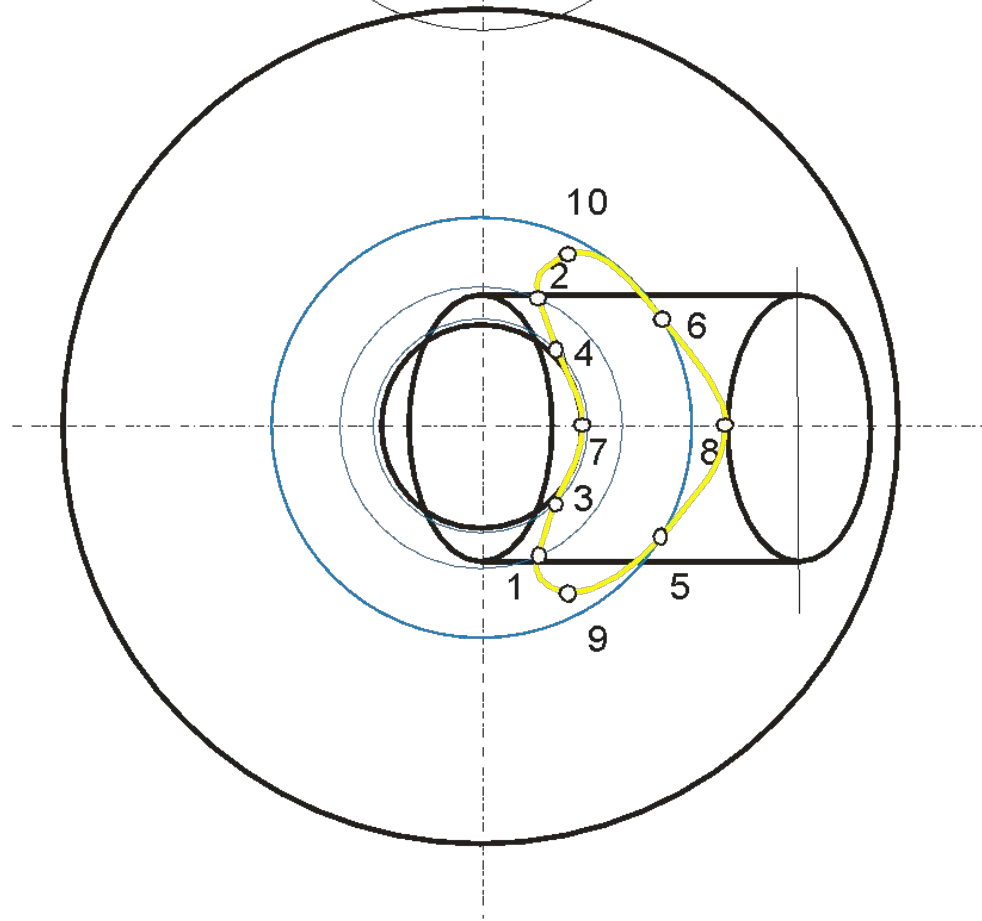
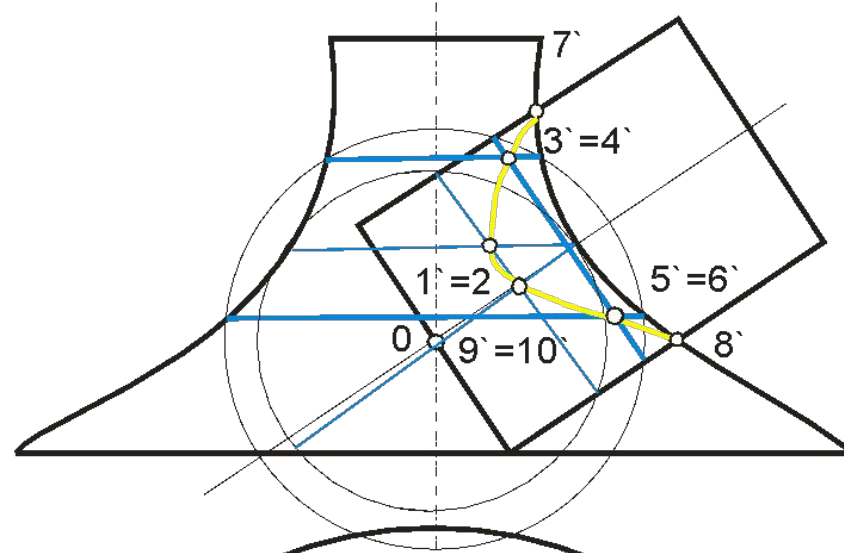








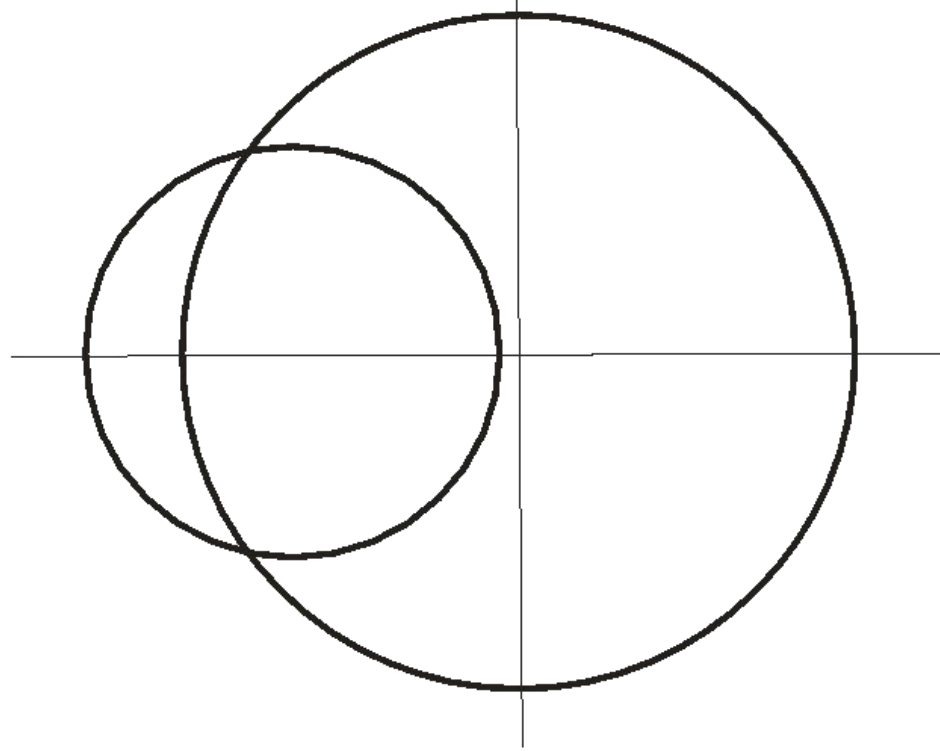
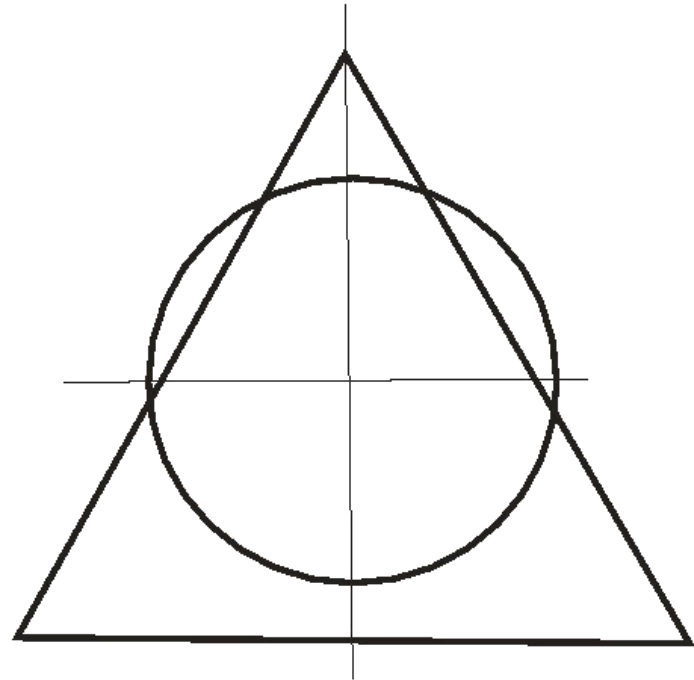
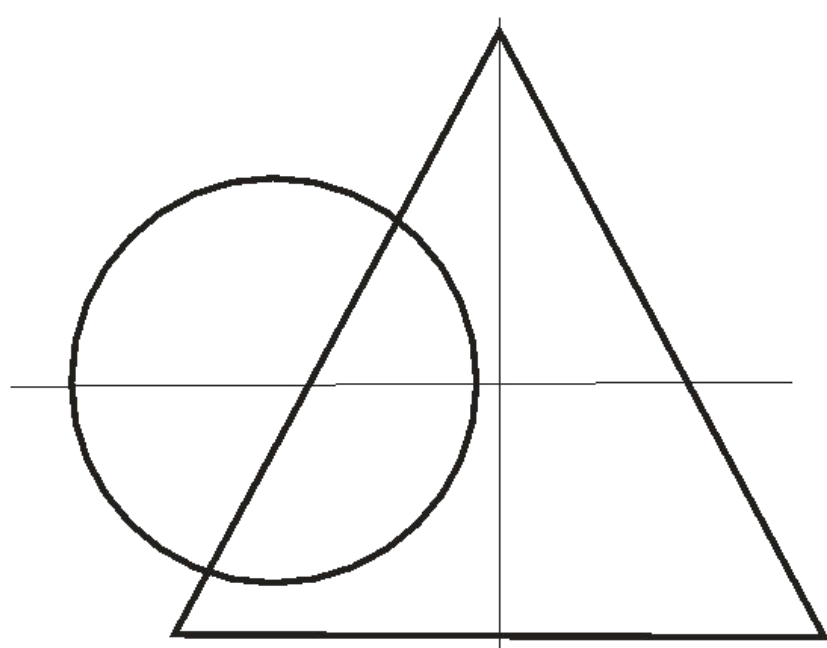


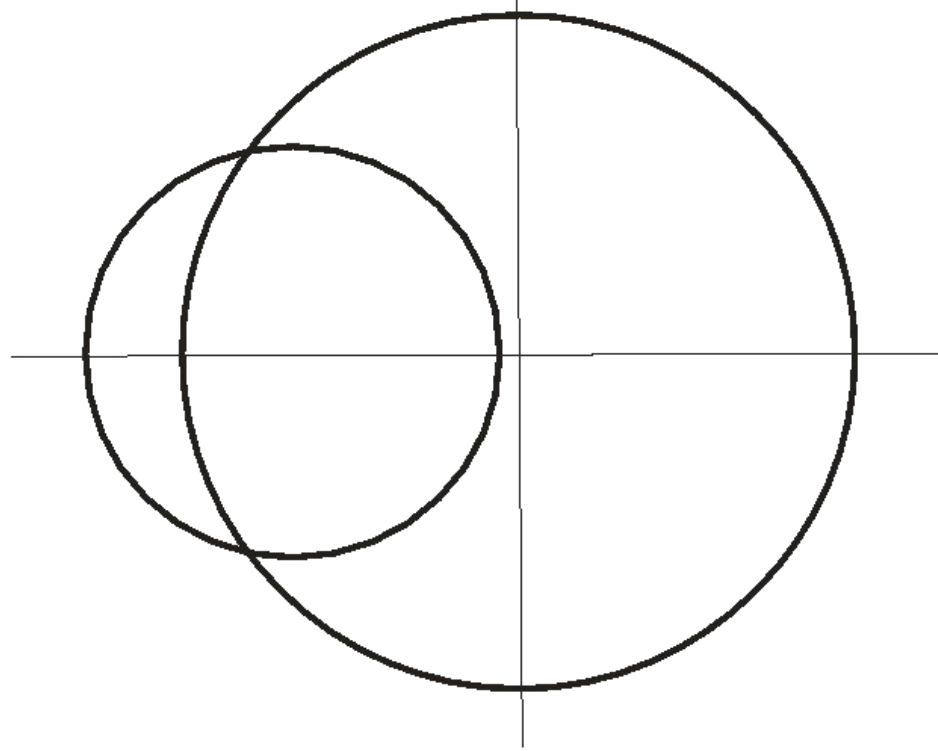
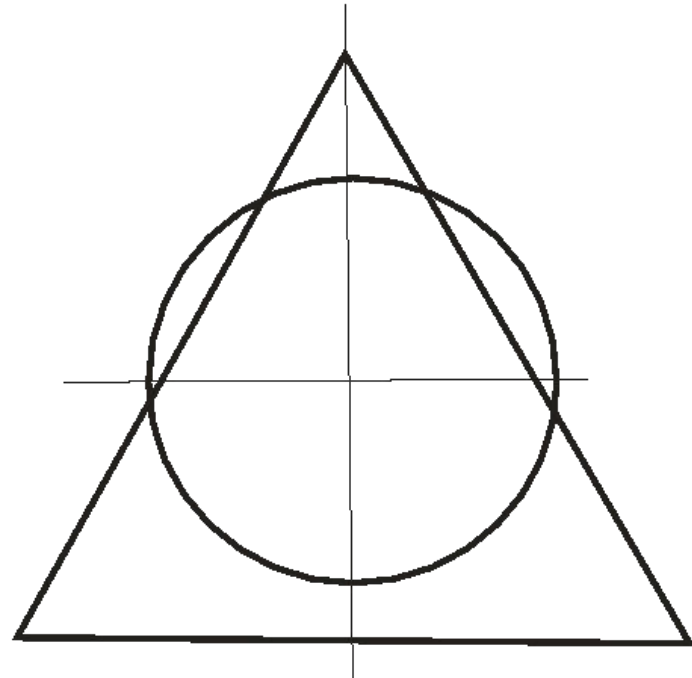
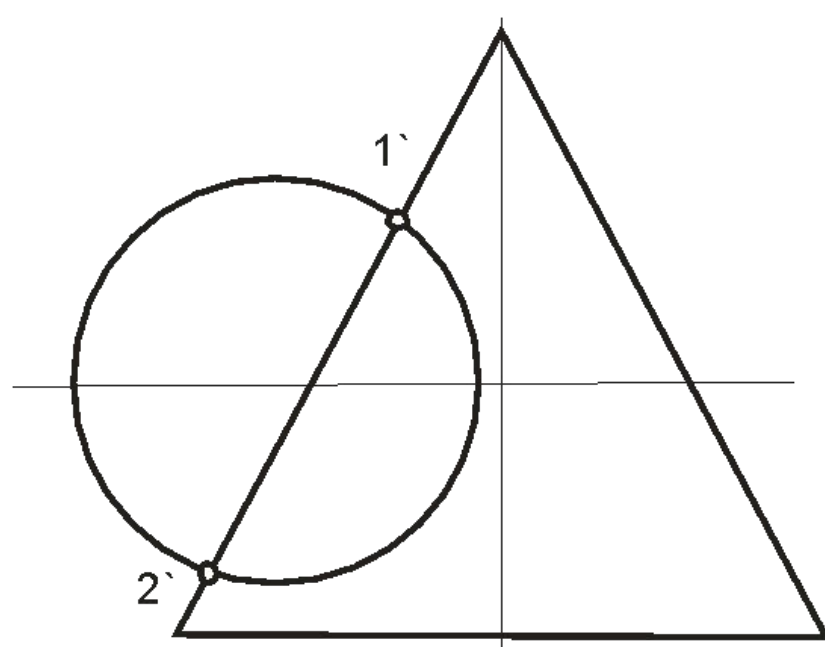


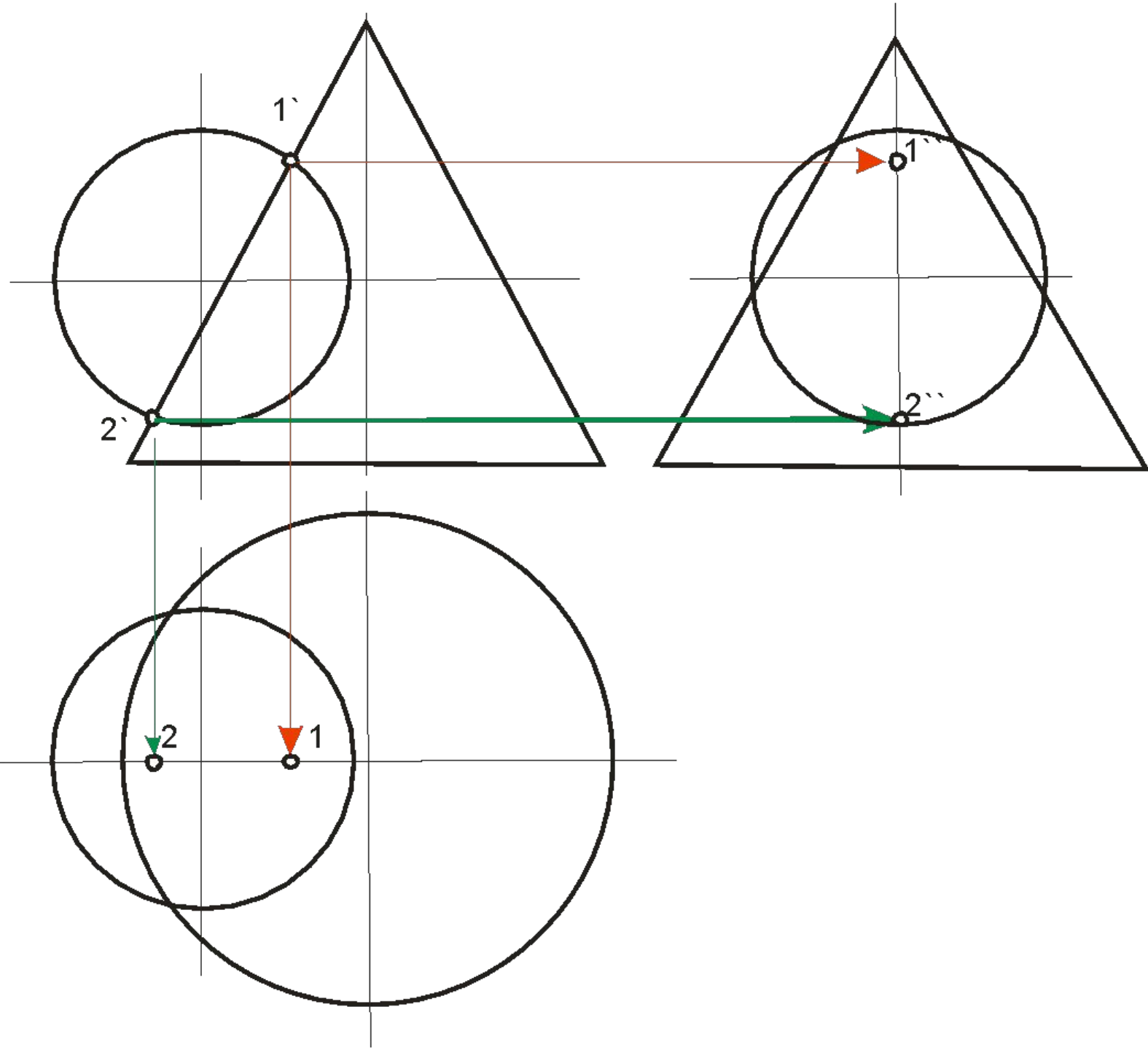
- Каждая из этих поверхностей имеет семейство окружностей, являющихся линиями сечения их концентрическими сферами. Применению метода концентрических сфер должно предшествовать такое преобразование чертежа в результате которого оси обеих поверхностей должны быть расположены параллельно одной и той же плоскости проекций

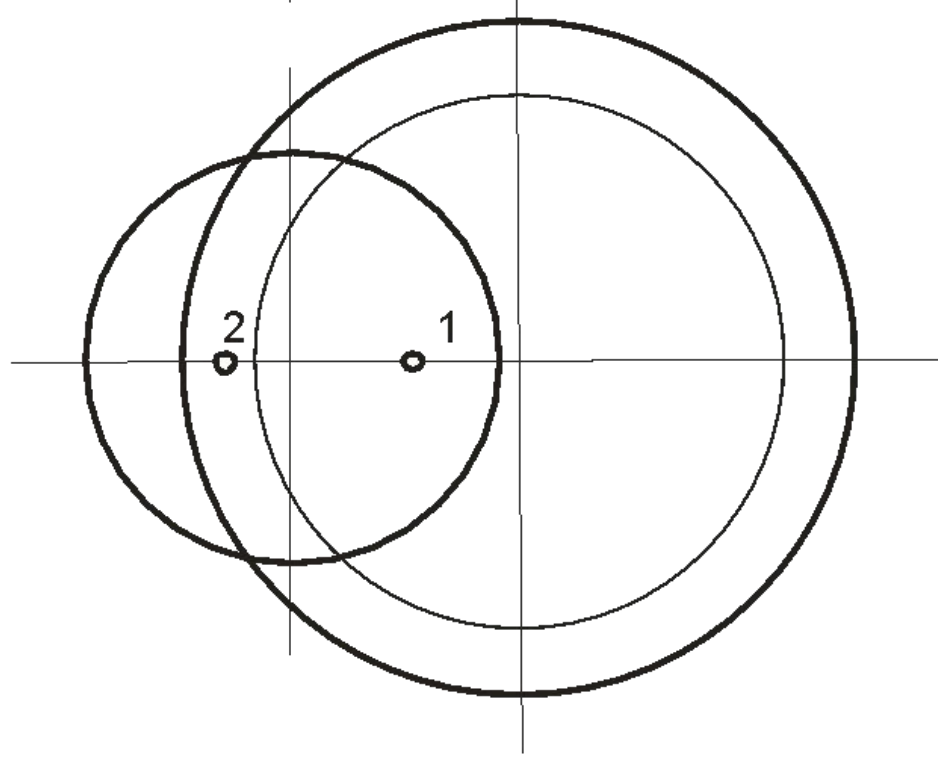
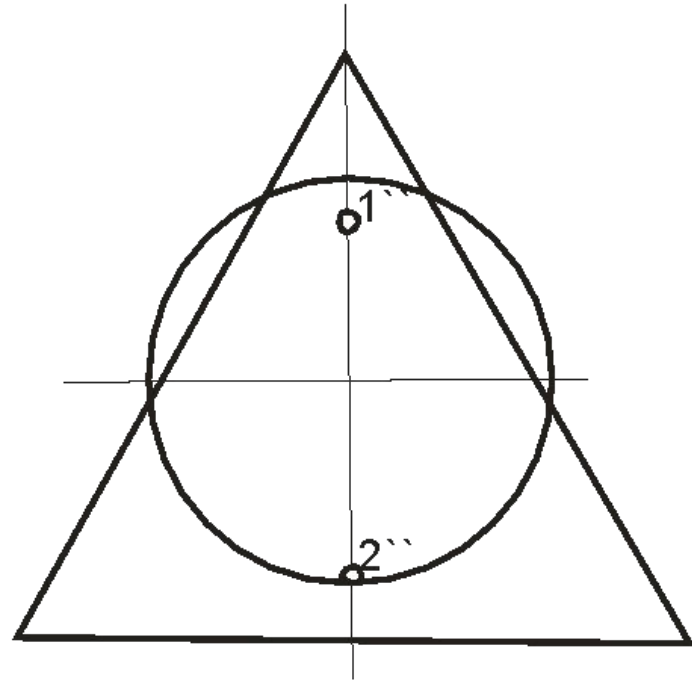
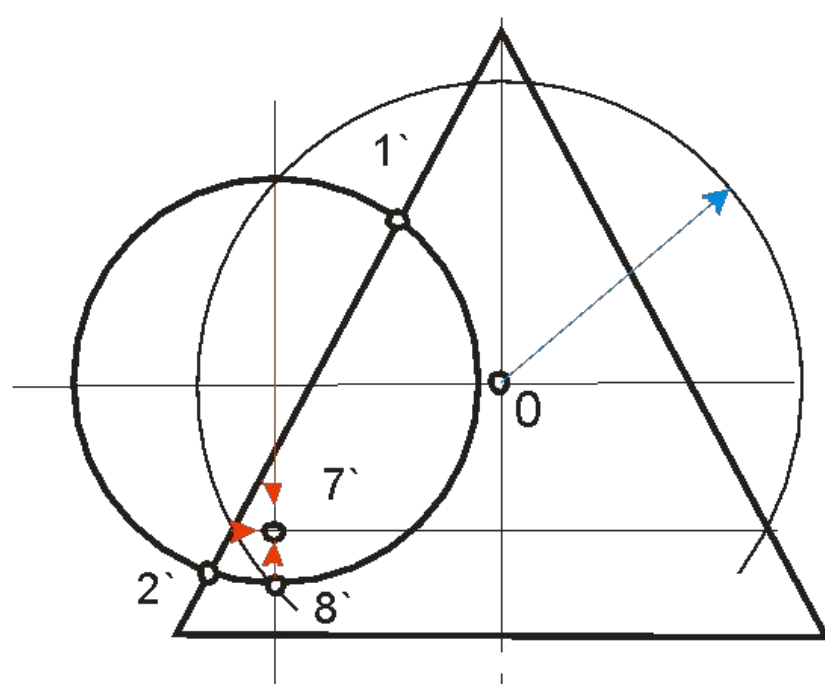
- Оси поверхностей **G** и **Q** параллельны фронтальной плоскости проекций и пересекаются в точке **A**. Эта точка принимается за центр всех вспомогательных концентрических сфер. Каждая из концентрических сфер пересекает поверхности по окружностям - параллелям (**a**, **b**, **c**, **d**, **n**), фронтальные проекции которых являются прямыми линиями (**a**₂, **b**₂, **c**₂, **d**₂, **n**₂). Проекции точек **1**₂, **2**₂, **3**₂, **4**₂, **5**₂ и **6**₂ пересечения проекций параллелей принадлежат проекции искомой линии пересечения поверхностей. Пересечение главных меридианов определяет крайние точки **7** и **8**.

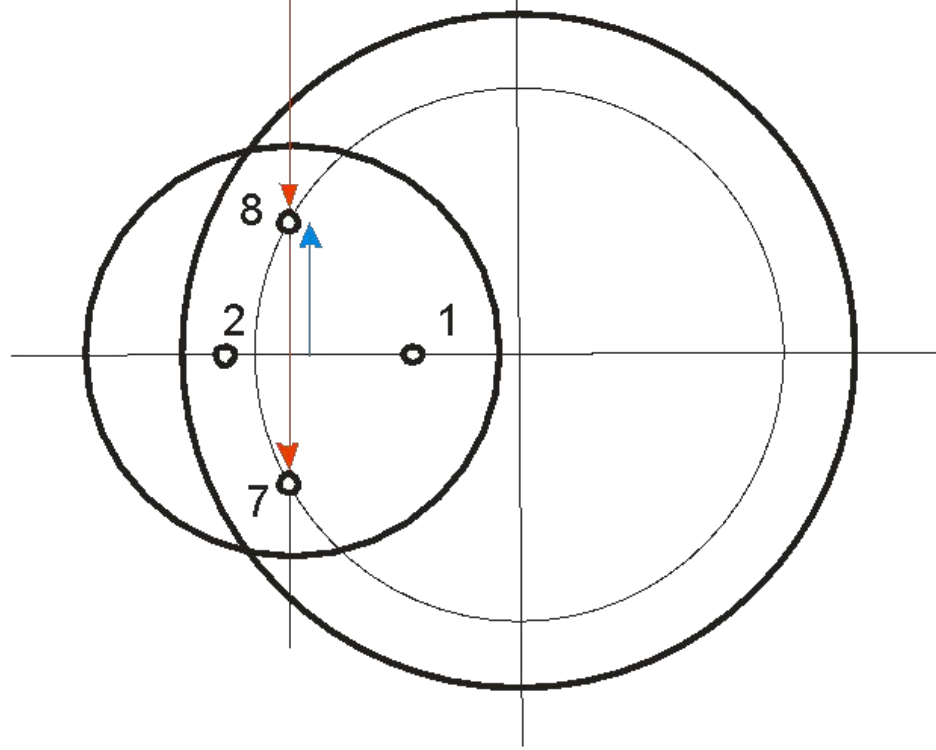
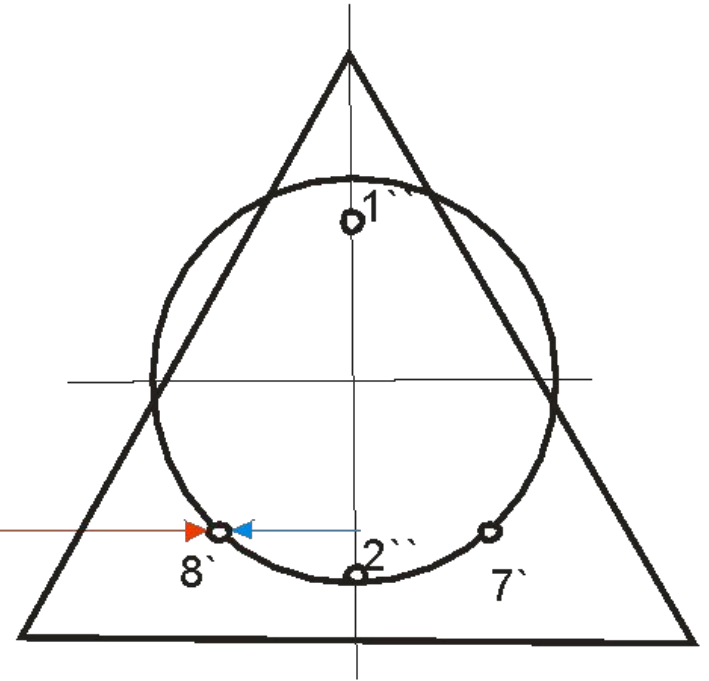
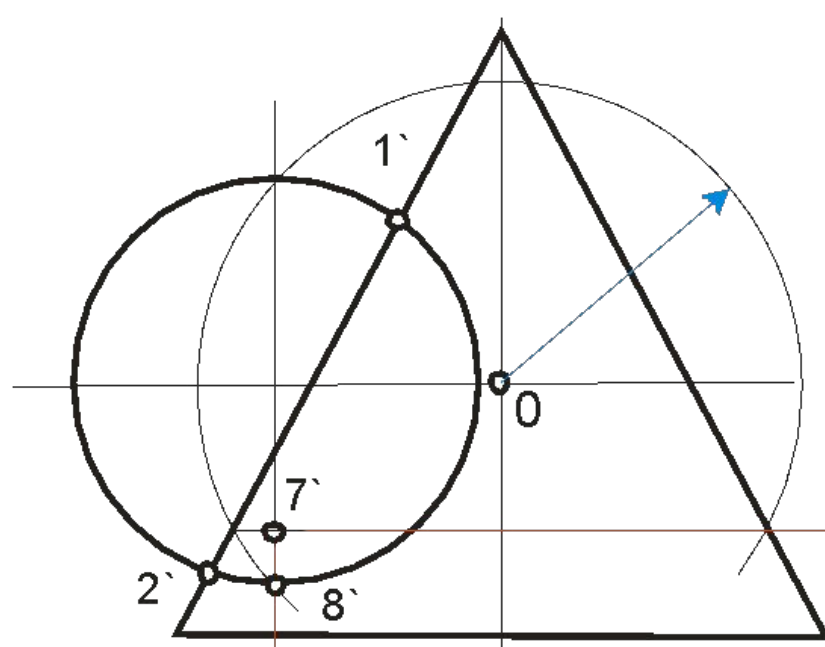
- Для точного построения линии пересечения поверхностей необходимо найти точки **9** и **10**, которые определяют границу зоны видимости линии пересечения поверхностей на горизонтальной проекции. Для этой цели использовалась вспомогательная секущая плоскость **b**, которая пересекает поверхность **Q** по линии **m**, а поверхность **G** по образующим, горизонтальные проекции которых пересекаясь определяют положение искомых точек.
- Соединив найденные точки **1...10** с учетом видимости получим линию пересечения поверхностей.

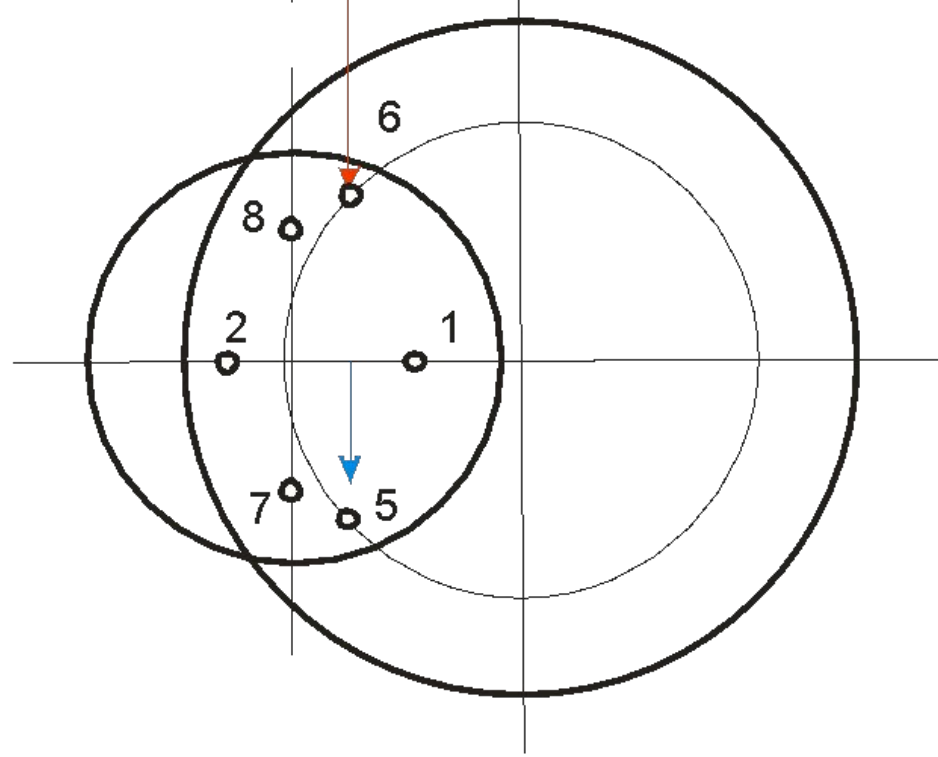
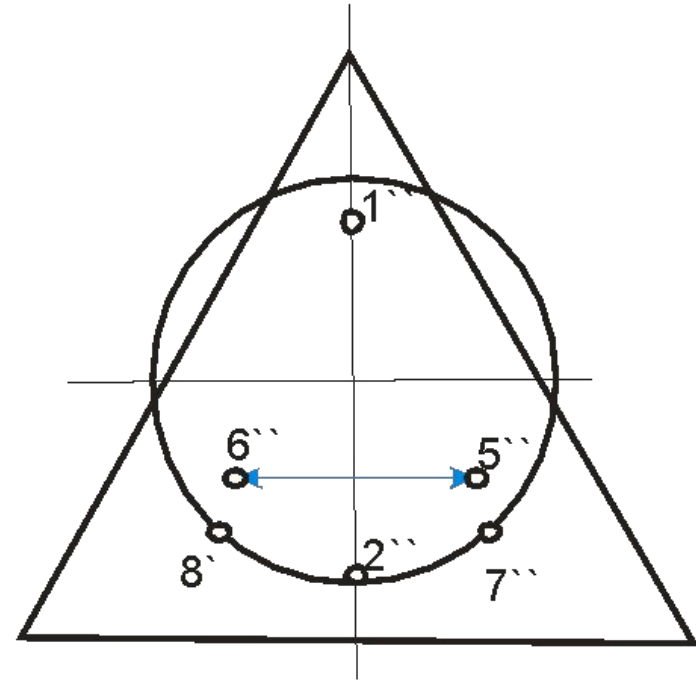
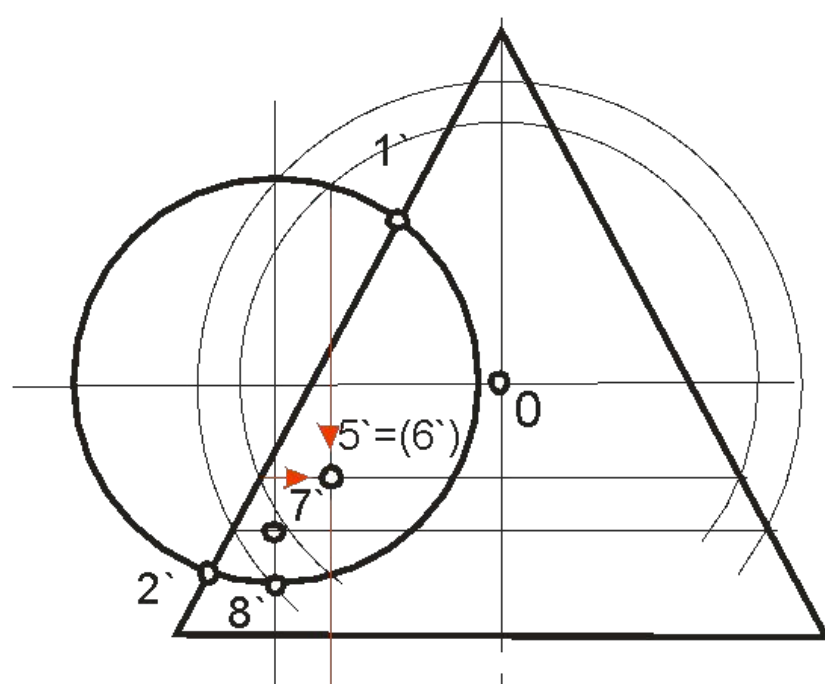


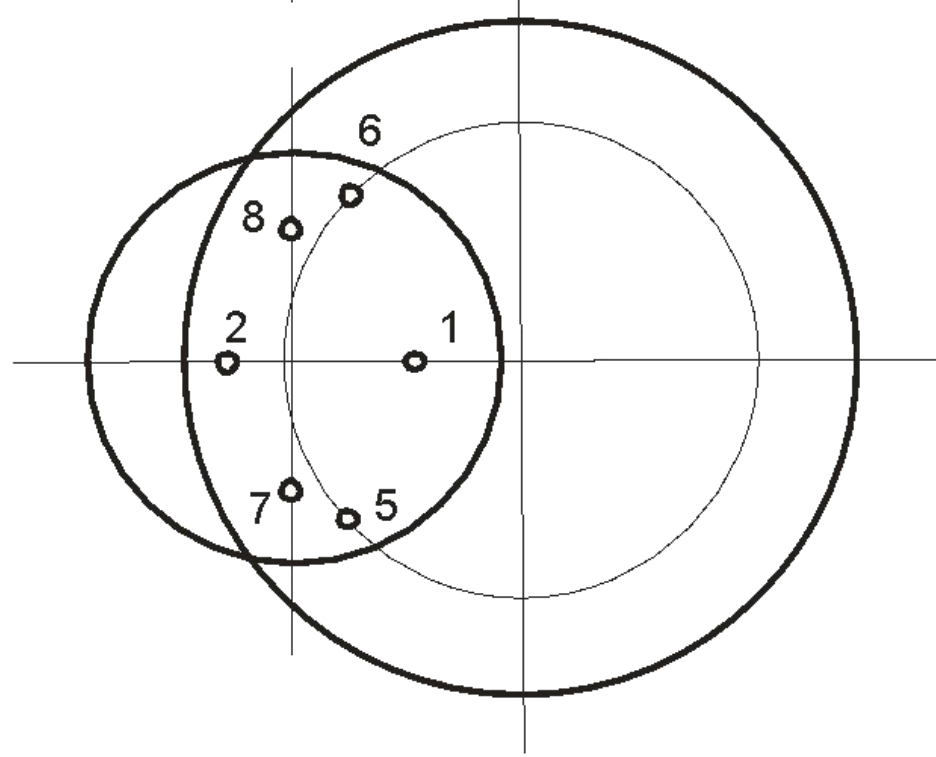
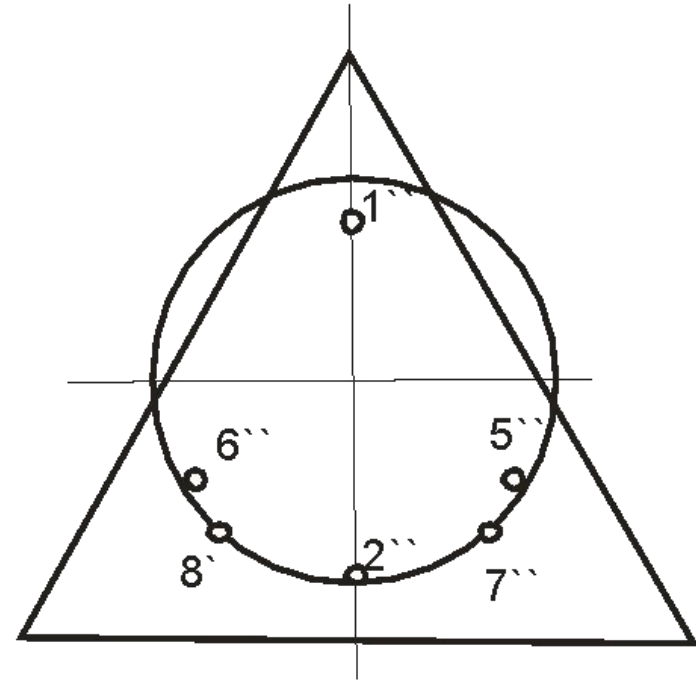
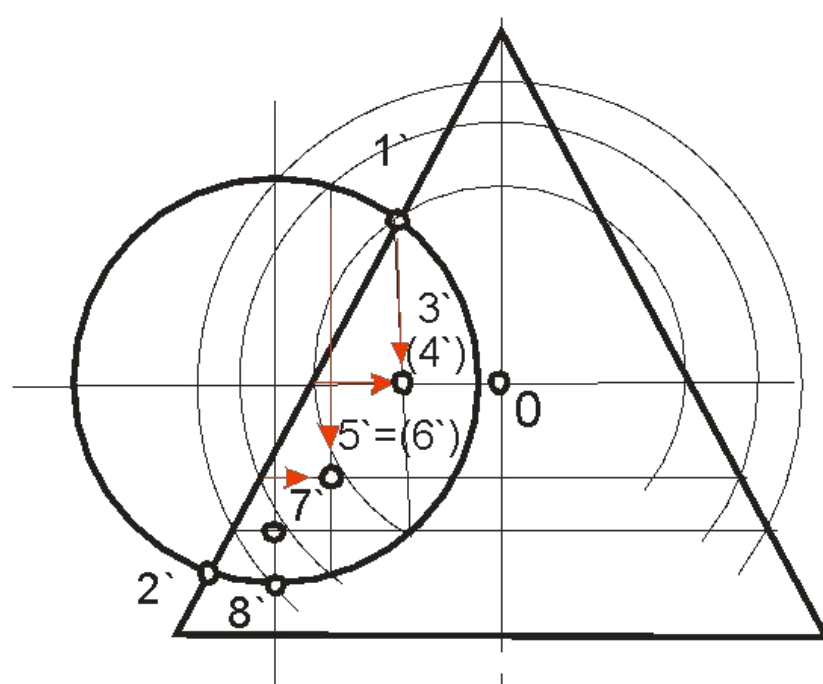


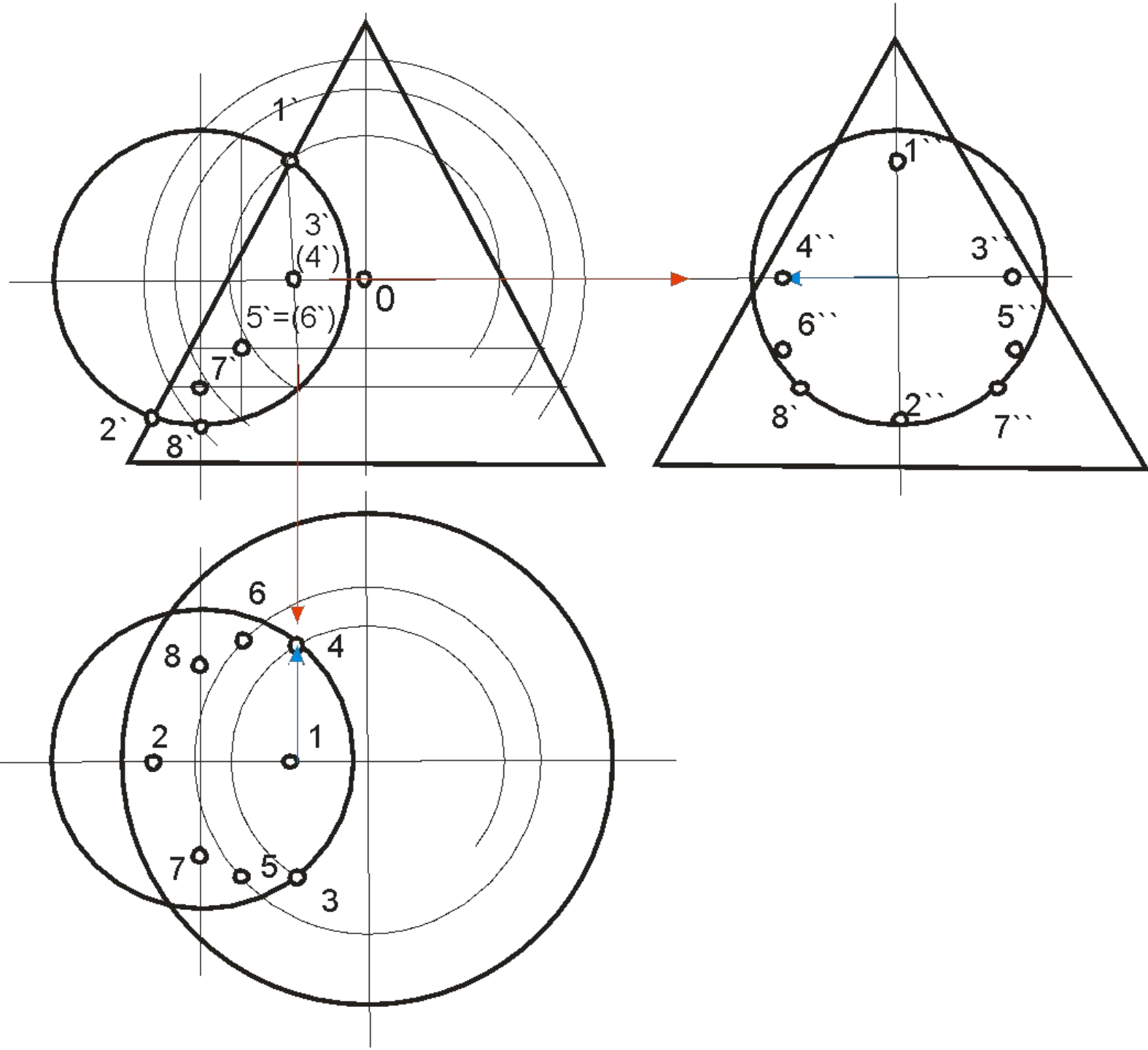


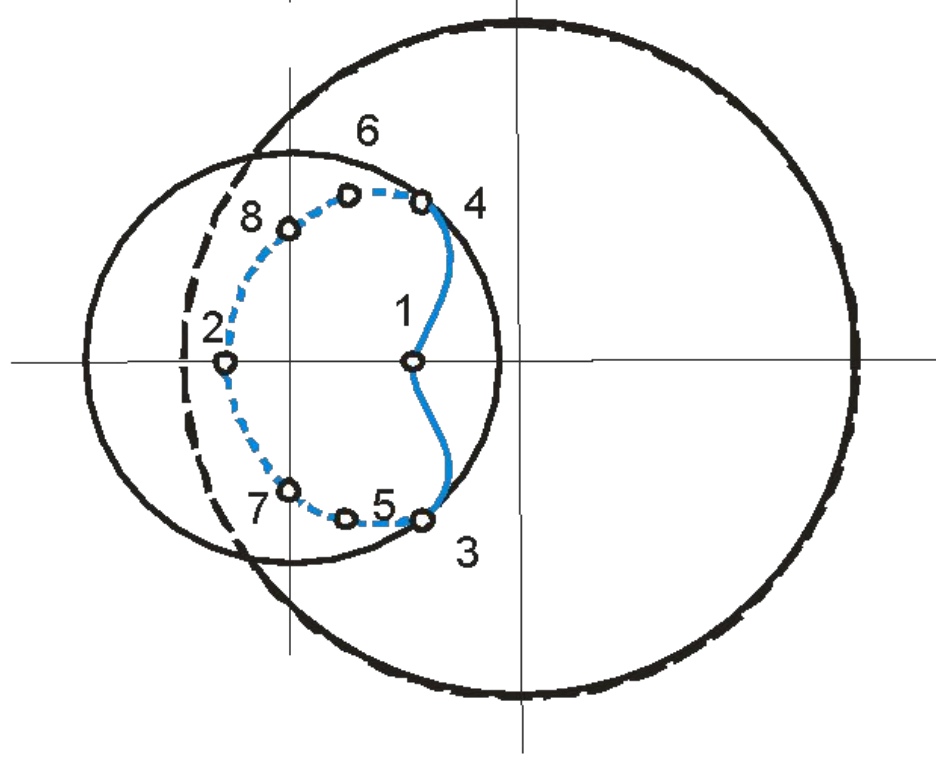
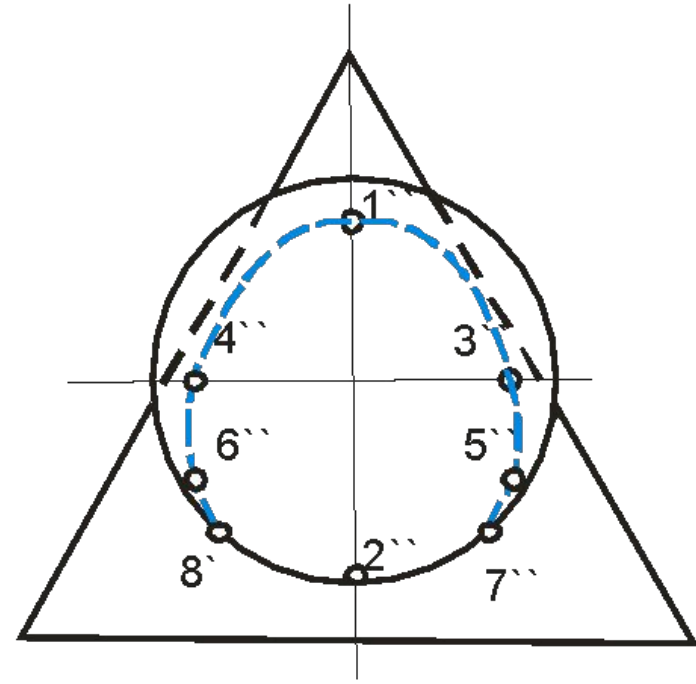
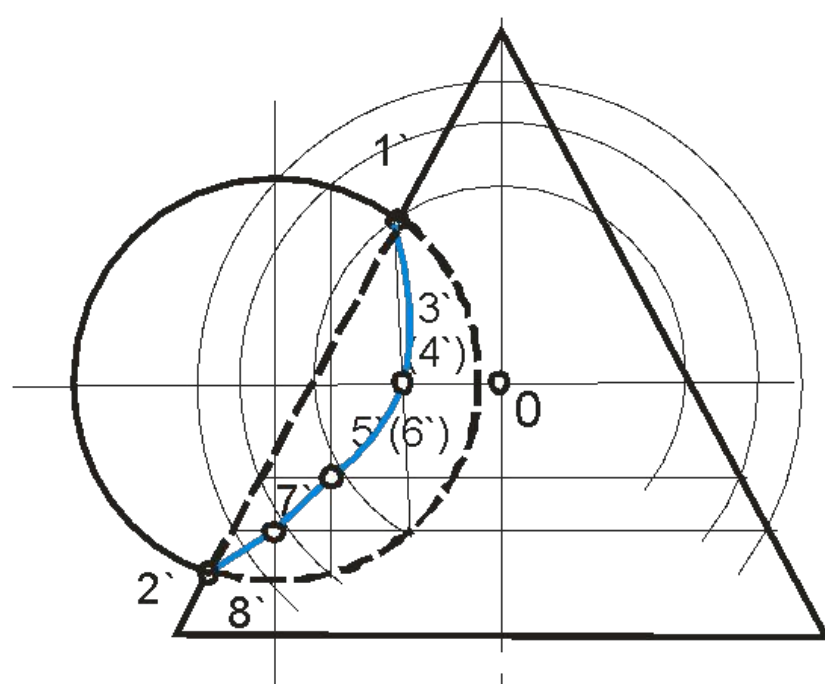










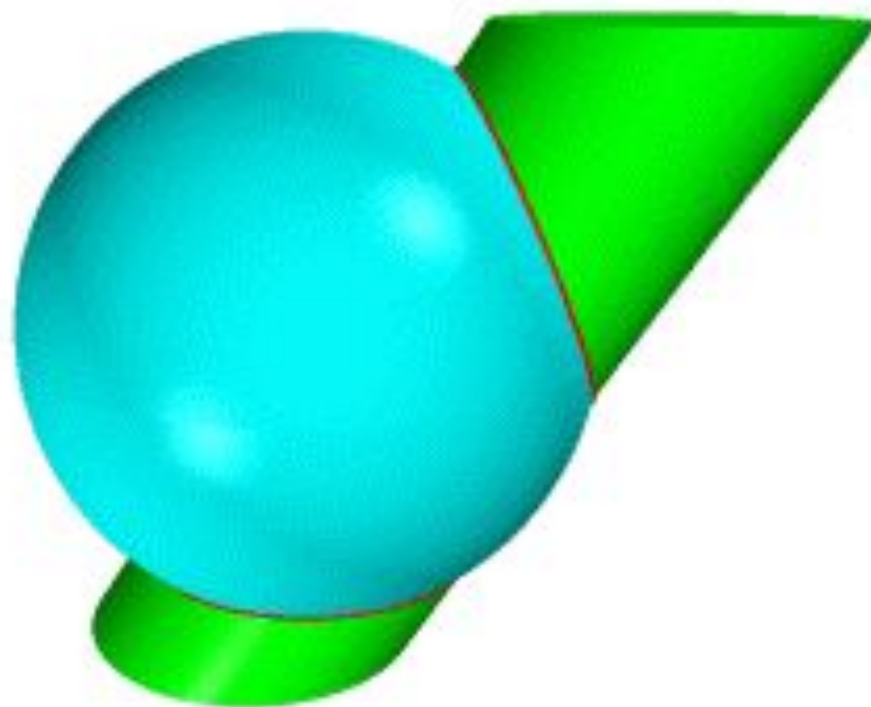


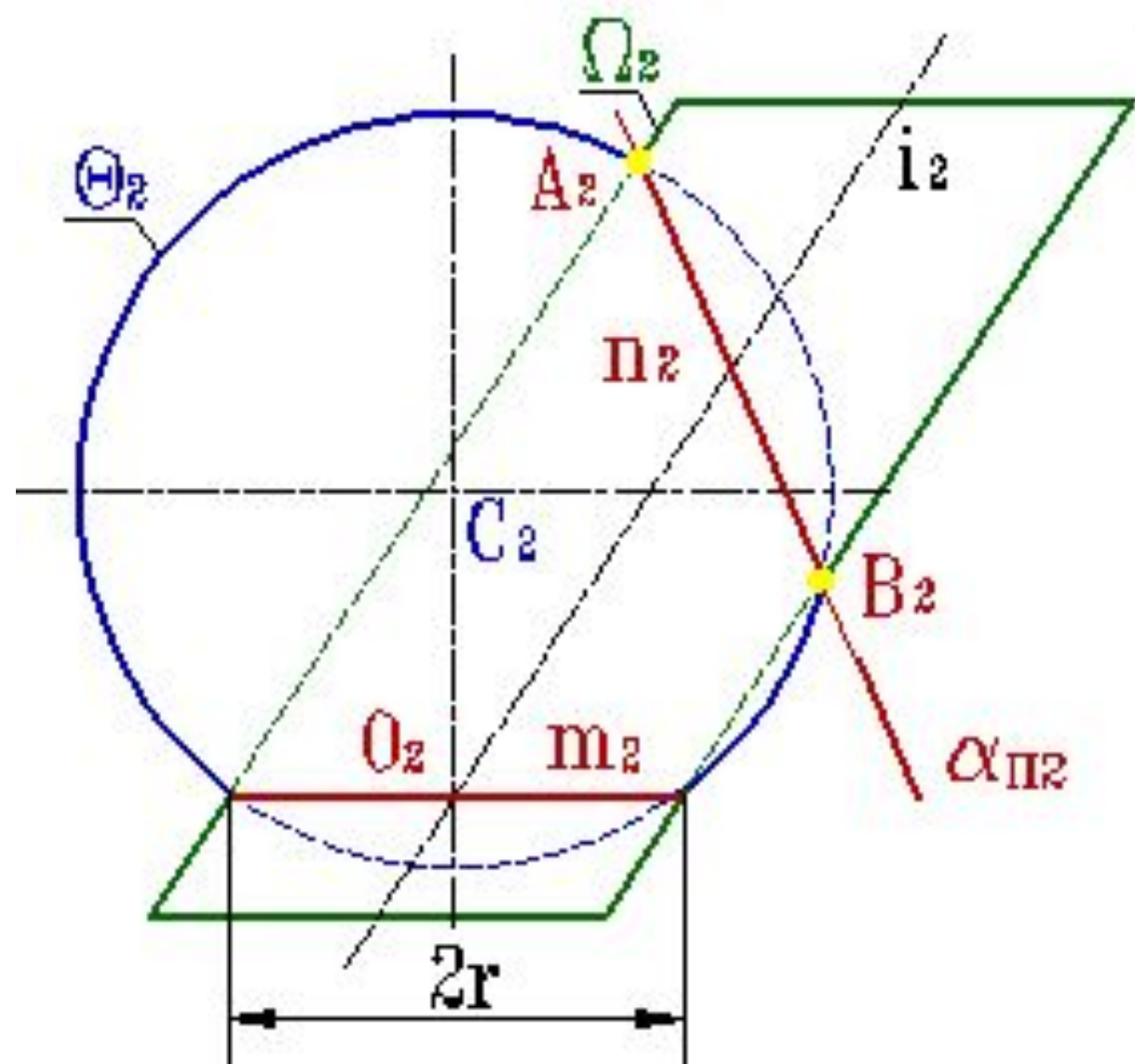
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- *Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты, которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени.*
- Две поверхности второго порядка в общем случае пересекаются по пространственной линии четвертого порядка, которую называют *биквадратной кривой*.

- ***Теорема 1. Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то существует и другая плоская кривая, по которой они пересекаются.***

Теорема 1





Теорема 1

- Фронтальные проекции q_2 сферы Q и W_2 эллиптического цилиндра W , имеющих общую окружность $m(m_2)$ с центром $O(O_2)$

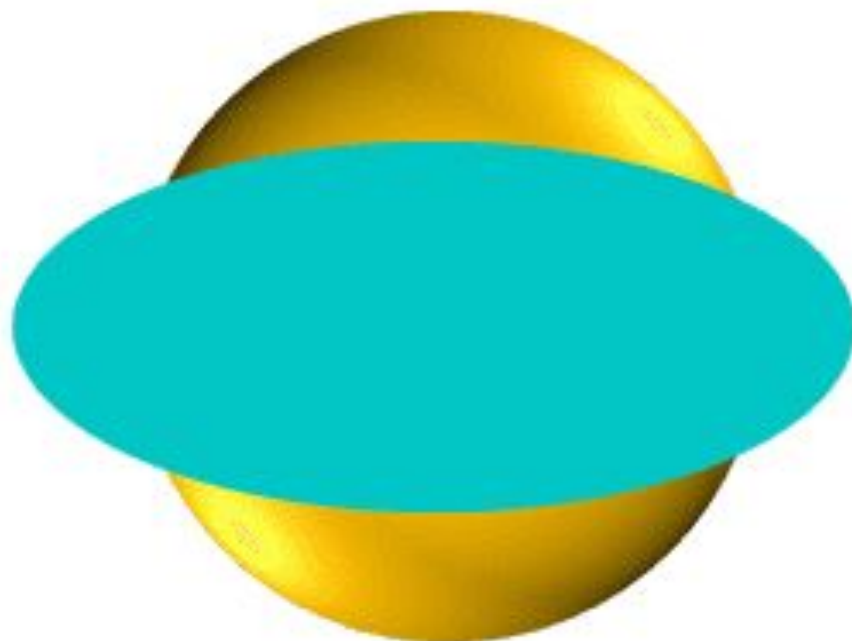
Теорема 1

- Плоскость σ , определяемая центром сферы C и осью i цилиндра, является плоскостью симметрии заданных поверхностей, и параллельна фронтальной плоскости проекций.
- Общая окружность радиуса r – это одна из плоских кривых второго порядка распавшейся линии пересечения. Остается построить вторую кривую, плоскость α которой должна быть в условиях данного примера перпендикулярна плоскости симметрии σ , а следовательно и Π_2 . Вторая линия пересечения (окружность) проецируется на Π_2 в виде отрезка прямой n_2 . Для ее построения следует воспользоваться точками A_2 и B_2 , принадлежащими очеркам заданных поверхностей.

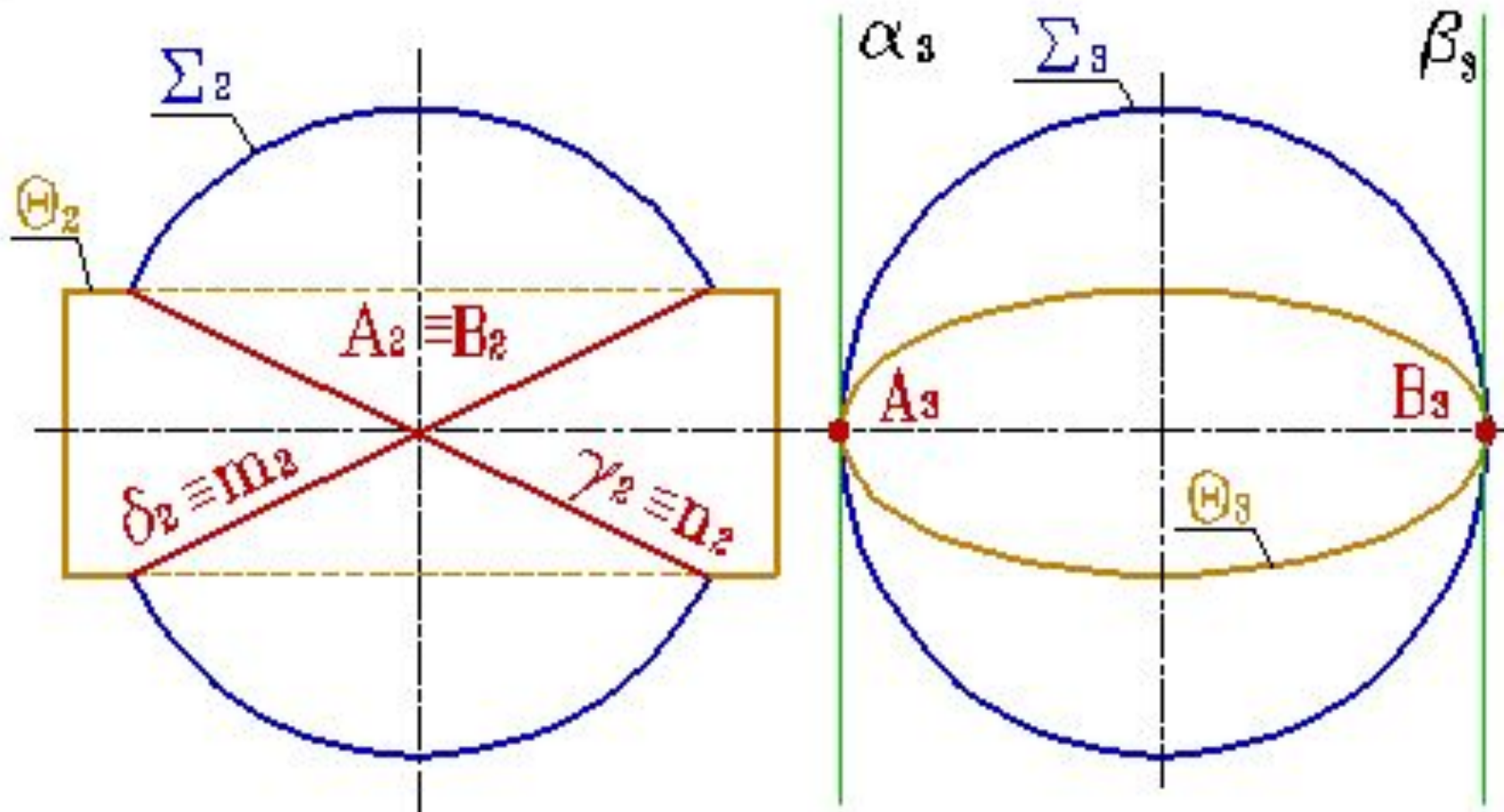
Теорема 2

- **Теорема 2.**(о двойном касании). **Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках A и B , то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскость которых проходит через отрезок AB , соединяющий точки касания.**

Теорема 2



Теорема 2



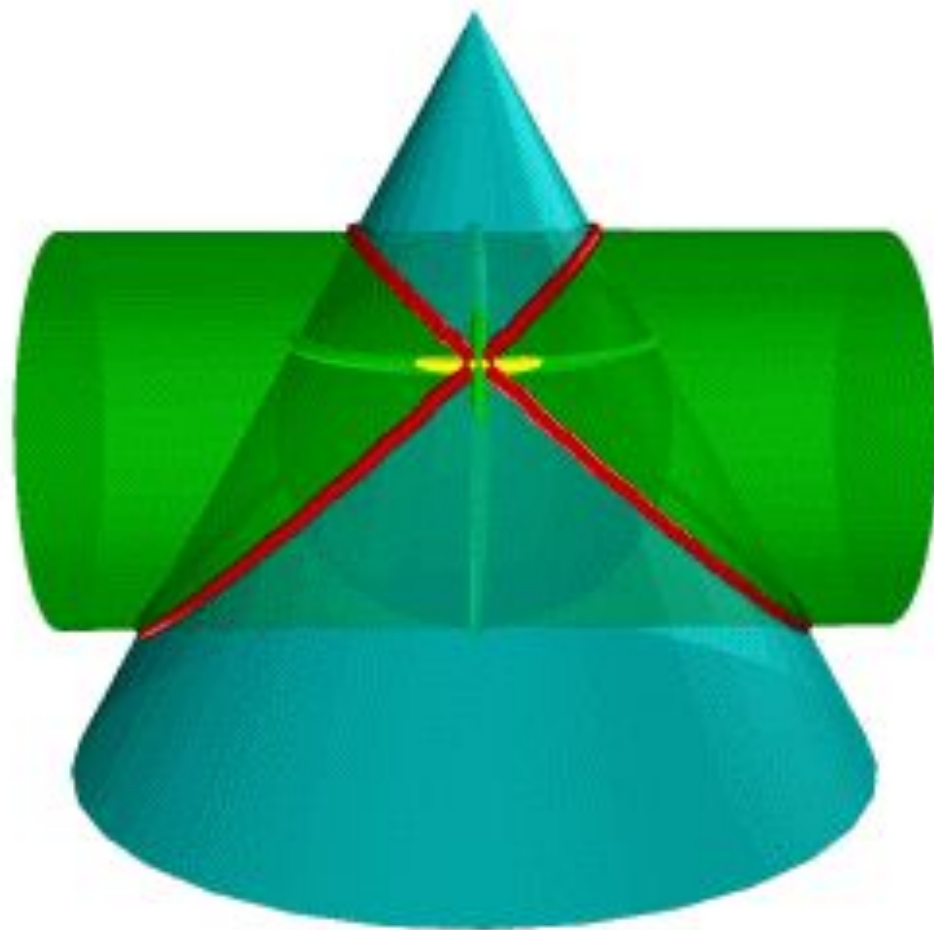
Теорема 2

- Например, по двум окружностям m и n пересекается сфера S и эллиптический цилиндр Q . Точки касания и касательные плоскости обозначены соответственно через A, B, α, β . Окружности, на которые распалась линия пересечения поверхностей, расположены во фронтально-проецирующих плоскостях γ и δ .

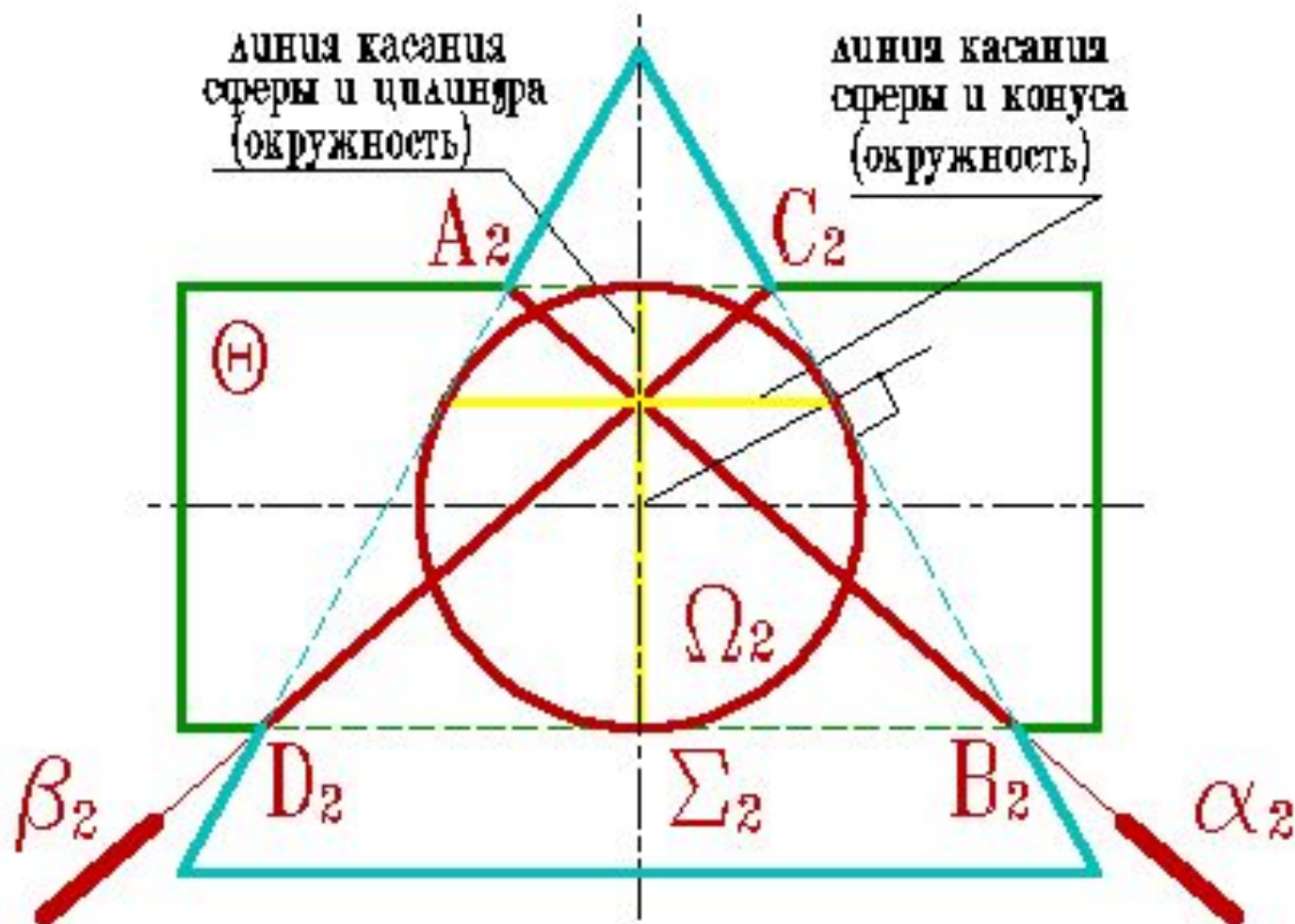
Теорема Монжа

- **Теорема 3.** (теорема Г. Монжа). **Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки линий касания.**

Теорема Монжа



Теорема Монжа

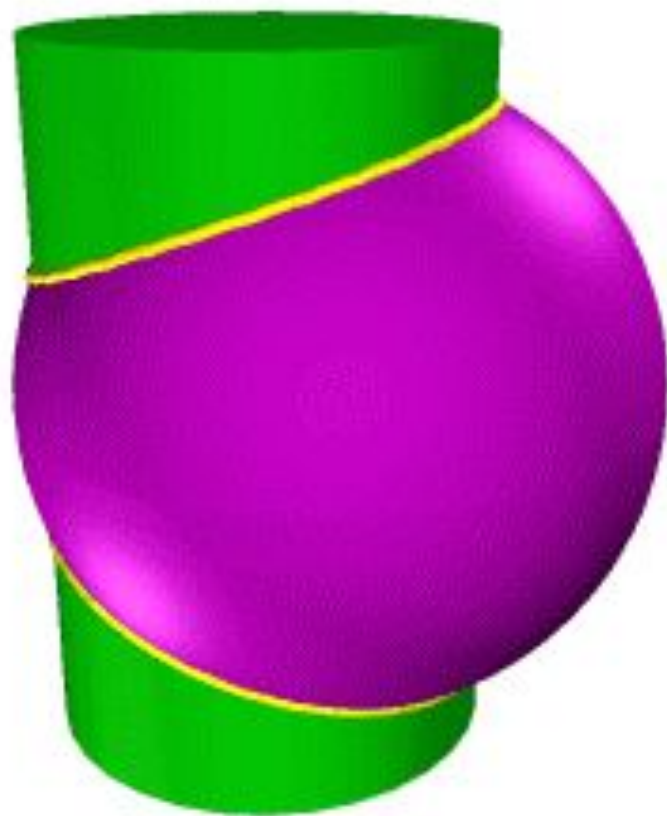


- В соответствии с этой теоремой линия пересечения конуса Σ и цилиндра Q , описанных около сферы W , будут плоскими кривыми – эллипсами (расположенными в плоскостях a и b), фронтальные проекции которых изображаются прямыми A_2B_2 и C_2D_2 ,

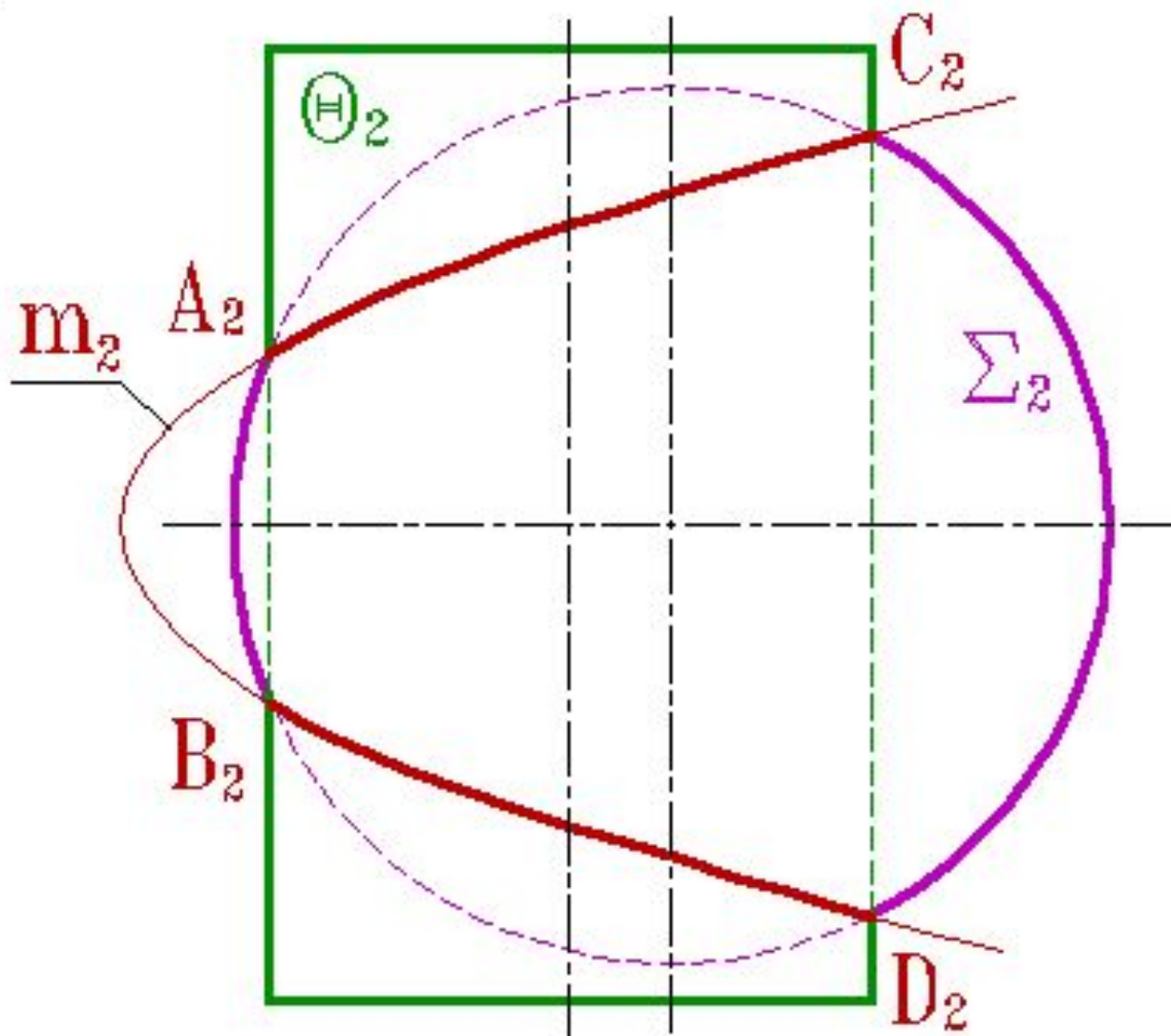
Теорема 4

- ***Теорема 4. Если две поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде кривой второго порядка.***

Теорема 4



Теорема 4



Теорема 4

- Плоскость симметрии определена осью симметрии цилиндра **Q** и центром сферы **S**. Плоскости принадлежат и симметричные сами себе точки **A**, **B**, **C** и **D** линий пересечения. Проекция же линий на фронтальную плоскость имеет форму параболы ***m*₂** и аналитически описывается формулой параболы