Комплексные числа.

Панарад А.Ю.
Кафедра Алгебры, Геометрии и Анализа.
ДВФУ

ПЛАН:

1. Основные понятия. Формы записи.
2. Действия над комплексными числами:
   a) Сложение комплексных чисел;
   b) Вычитание комплексных чисел;
   c) Умножение комплексных чисел;
   d) Деление комплексных чисел ;
   e) Возведение в n-степень;
   f) Извлечение корней из комплексных чисел.

Основные понятия.

Определение.

<u>*Комплексным числом*</u> Z называется выражение вида $\boxed{z = \alpha + \beta i}$,

где α и β- действительные числа, а i - мнимая единица, и $\boxed{i^2 = -1}$

Например, Z_1 = 6+2i или Z_2 = 1-5i .

Число α называется *действительной* частью комплексного числа и обозначается α=Re z,

а β – *мнимой* частью и обозначается β=Im z.

Основные понятия.

Два комплексных числа называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i\ ;$$

$$z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2\ ; \beta_1 = \beta_2$$

Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$z_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$$

Примеры.

Пример 1.

$z_1 = 5 + 3i$;

$z_2 = 25/5 + 15/5i$

$\alpha = 5 = 25/5$

$\beta = 3 = 15/5$

$\text{Вывод}: z_1 = z_2$

Пример 2.

$z_1 = 5 + 3i$;

$z_2 = 5 - 3i$

$\text{Вывод}: z_1 \ \text{и} \ z_2$

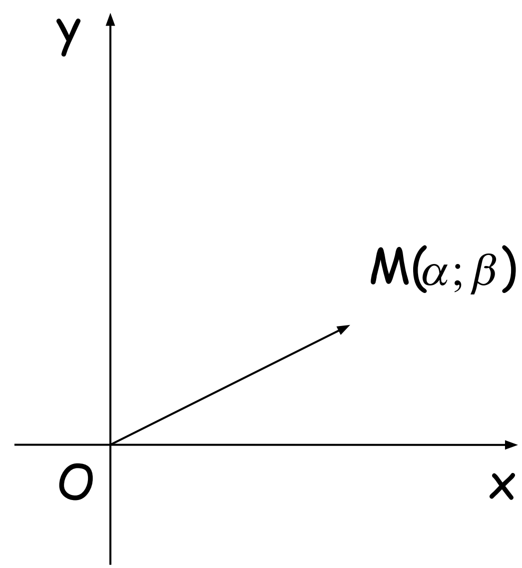
комплексно - сопряженные числа.

Геометрическое изображение комплексных чисел.

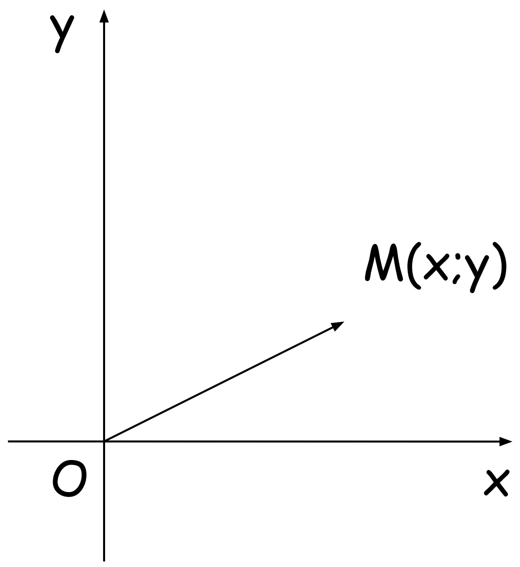
Всякое комплексное число можно изобразить точкой плоскости xOy такой, что $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

И, наоборот, каждую точку координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа.

$$Z = \alpha + \beta i,\ M(\alpha, \beta)$$



Геометрическое изображение комплексных чисел.

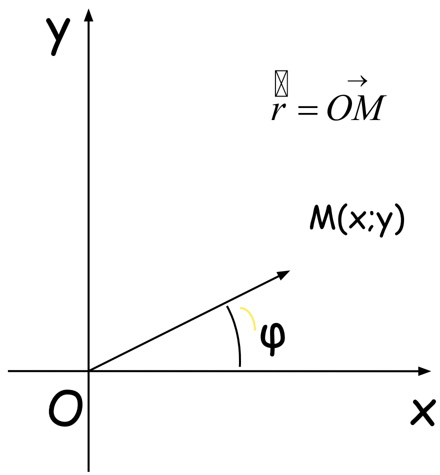


Плоскость, на которой изображается комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Ось абсцисс Ох называется *действительной осью*.

Ось ординат Оу называется *мнимой осью*.

Геометрическое изображение комплексных чисел.



Комплексное число можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$.

Длина вектора называется <u>*модулем*</u> этого числа и обозначается ϕZ ϕили r .

Величина угла между положительным направлением оси Ох и вектором $\vec{r}$

называется <u>*аргументом*</u> этого комплексного числа и обозначается *Arg* Z или ϕ.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого 2πк.

Формы записи комплексных чисел.

1. Алгебраическая.
2. Тригонометрическая.
3. Показательная.

Любое комплексное число можно записать в любой форме.

Формы записи комплексных чисел.

Модуль r и аргумент ϕ можно рассматривать как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Тогда получаем

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

Комплексное число z=$\alpha+\beta$i можно записать в виде

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

Или $$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Запись числа

z=$\alpha+\beta$i

называется

__*алгебраической формой*__

комплексного числа.

Запись числа z в виде

z=r(cosφ+isinφ)

называется

__*тригонометрической формой*__

комплексного числа.

Переход от одной формы к другой.

От алгебраической формы к тригонометрической

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Т.к. $\varphi = Arg\,z = \arg z + 2\pi k$

То

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k)$$

$$\sin\varphi = \sin(\arg z)$$

От тригонометрической формы к алгебраической

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить главное значение аргумента, т.е. $\varphi = \arg z$

Т.к. $-\pi < \arg z \le \pi$ $\qquad tg\varphi = \dfrac{y}{x}$

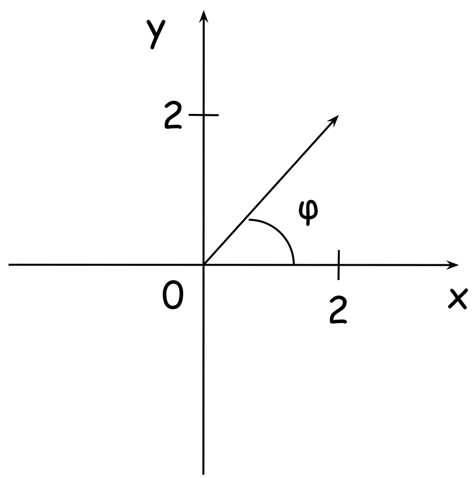
то

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} \;\; \text{для точек I и IV четвертей}; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi \;\; \text{для точек II четверти}; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi \;\; \text{для точек III четверти}. \end{cases}$$

Пример: Комплексное число изобразить на плоскости и записать в тригонометрической форме $z = 2 + 2i$

$x = 2$ $\qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = 2$ $\qquad r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$



Для I четверти

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2}{2} = arctg1$$

$$\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Комплексное число можно записать в показательной (или экспонентной) форме

$$z = re^{i\varphi}$$

Где $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$

В силу формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

функция $e^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π.

Для записи комплексного числа в показательной форме надо определить главное значение аргумента и модуль.

2. Действия над комплексными числами

Суммой двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

Называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

Называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Геометрически комплексные числа складываются и вычитаются, как векторы.

Сложение (вычитание) комплексных чисел

Примеры:

1. $$z_1 = 4 + 2i$$
$$z_2 = -5 + 3i$$
$$z_1 + z_2 = (4 - 5) + (2 + 3)i = -1 + 5i$$

2. $$z_1 = 3 - 5i$$
$$z_2 = 2 - 7i$$
$$z_1 - z_2 = (3 - 2) + (-5 - (-7)i = 1 + 2i$$

Произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме.

Произведением двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

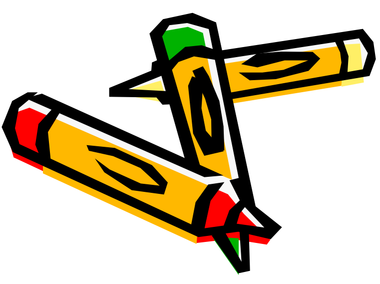
$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

называется комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

Формула получается путем перемножения двучленов!

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$



Частным двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

называется комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

На практике используют умножение числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю!

$$\frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} \frac{(x_2 - y_2 i)}{(x_2 - y_2 i)}$$

Произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме.

Произведение:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$z_1 z_2 = (1+2i)\cdot(3+4i) =$$

$$= 1\cdot 3 + 2i\cdot 3 + 1\cdot 4i + 2i\cdot 4i =$$

$$= 4 + 6i + 4i + 8i^2 = 4 + 10i - 8 =$$

$$= -4 + 10i$$

$$z_1 z_2 = -4 + 10i$$

Частное:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 + i$$

$$\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{1+2i-i+2}{1+1} = \frac{3+i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме.

Произведение чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Находим по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

При умножении модули перемножаются, а аргументы складываются!

Частное чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Находим по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

При делении модули делятся, а аргументы вычитаются!

Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме.

Произведение:

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z_1 z_2 = 3\cdot 5(\cos(\frac{\pi}{3} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \pi))$$

$$z_1 z_2 = 15(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$$

Частное:

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}(\cos(\frac{\pi}{3} - \pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \pi))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$$

Произведение и частное комплексных чисел в показательной форме.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Возведение комплексных чисел в степень.

Правило умножения комплексных чисел позволяет возвести число в n-степень:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots}_{n}$$

Получим Формулу Муавра:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}$$

Для показательной формы используют формулу:

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$$

Возведение комплексных чисел в степень.
Пример.

Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$

Запишем число в тригонометрической форме:

$$r=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\arg z = arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z^9=(1+\sqrt{3}i)^9=2^9(\cos 9\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 9\cdot\frac{\pi}{3})=$$

$$=2^9(\cos 3\pi+\sin 3\pi)=2^9\cdot(-1)=-512.$$

Извлечение корней из комплексных чисел в тригонометрической форме.

Определение.

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число ω, удовлетворяющее равенству:

$$\omega^n = z$$

$$\sqrt[n]{z} = \omega$$

Данное действие выполняется над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Получим *n* различных корней!

Извлечение корней из комплексных чисел. Пример.

Найти $\sqrt[6]{z}$, если $z=-1$

В тригонометрической форме число имеет вид:

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

Используем формулу: $\sqrt[6]{-1}=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{6}$

Найдем 6 возможных корней, придавая *k последовательно значения 0,1,2,3,4,5:*

$$k=0,\ z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=1,\ z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$k=2,\ z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=3,\ z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$k=4,\ z_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$k=5,\ z_1=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$