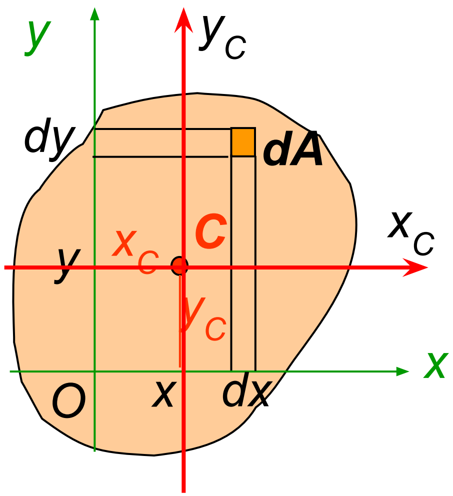
ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ

Величина нормальних напружень у поперечному перерізі розтягнутого (стиснутого) стержня залежить від площі цього перерізу. Таким чином, ***площа поперечного перерізу є геометричною характеристикою, що визначає напруження при розтягуванні (стисканні)***. У випадку інших видів напружено-деформованого стану (згин, кручення), напруження залежать не від площі, а від деяких інших геометричних характеристик поперечного перерізу.



Площа поперечного перерізу:

$$\boxed{A = \int_A dA.}$$

Статичні моменти площі поперечного перерізу:

$$\boxed{S_x = \int_A y dA; S_y = \int_A x dA.}$$

Статичні моменти використовуються при визначенні положення центру ваги:

$$\boxed{x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.}$$

Визначення координат центру ваги. Використаємо, наприклад, метод розбиття на декілька елементарних елементів:

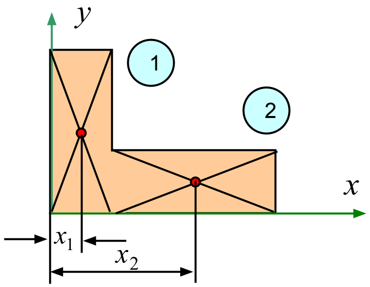
$$\boxed{x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.}$$

Тут x_i, y_i - координати центрів ваги простих фігур, для яких вони відомі або легко знаходяться.

Осі, що проходять через центр ваги фігури, називаються **центральними**. Слід відмітити, що відносно центральних осей, статичні моменти площі перетворюються в нуль.

Методи визначення центра ваги складних фігур

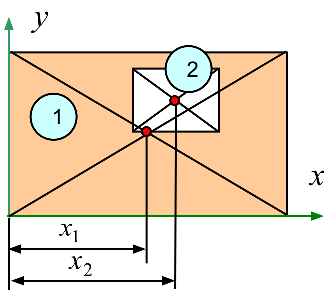
1. **Метод розбиття** – складна фігура розбивається на сукупність простих фігур, для яких відомі положення центра ваги або вони легко визначаються:



$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

2. **Метод від'ємних площ** – так само, як і в методі розбиття, складна фігура розбивається на сукупність простих фігур, для яких відомі положення центра ваги або вони легко визначаються, але при наявності отворів або пустот зручно їх представлення у вигляді «від'ємних» областей.

Наприклад, дану фігуру замість розбиття на 4 звичайних прямокутника, можна представити як сукупність двох прямокутників, один з яких має негативну площу:

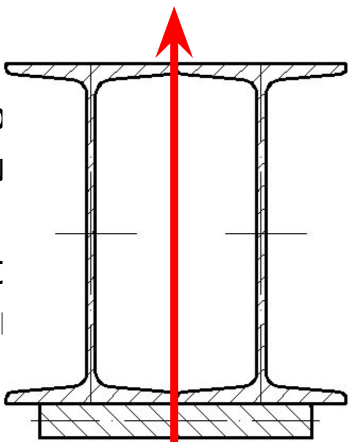


$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 (-A_2)}{A_1 + (-A_2)}$$

Примітка. Оскільки координата, наприклад, x_2, може бути негативна, то не слід представляти цей вираз з використанням різниць:

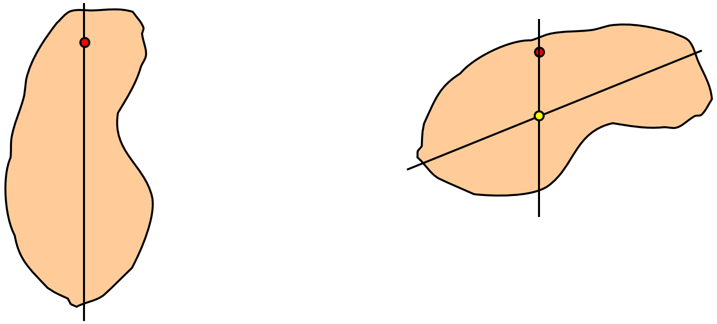
$$x_C = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

3. **Метод симетрії** – за наявності у фігури осі або площини симетрії, центр ваги лежить на цій осі або в цій площині. З урахуванням цієї властивості зменшується кількість координат центру ваги, що підлягають визначенню.



4. **Метод інтегрування** – за наявності у фігури досить просто ... ісується відомим рівнянням (коло, парабола тощо), вибирається е... адка або смужка і виконується аналітичне інтегрування. При більш ... і, який може бути розбитий на більш прості граничні відрізки вик... ередньо метод розбиття. При складнощах з аналітичним інтегрува... ються чисельні методи інтегрування.

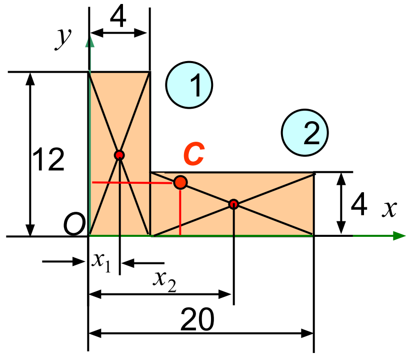
5. **Метод підвішування** – експериментальний метод, заснований на тому, що при підвішуванні тіла або фігури за яку-небудь довільну точку центр ваги знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу. Для визначення положення центра ваги плоскої фігури достатньо її підвісити по черзі за дві будь-які точки і прокреслити відповідні вертикалі, наприклад, за допомогою виска. Тоді точка на перетині цих прямих відповідає положенню центру ваги фігури.



Порядок вирішення задач на визначення центра ваги:

1. Розбити тіло на складові елементарні частини, положення центра ваги яких відомо;
2. Визначити довжину, площу, об'єм цих тіл;
3. Вибрати розташування допоміжних осей координат;
4. Визначити координати центру ваги елементарних частин;
5. Визначити координати центру ваги за формулами, наведеними вище;
6. Вказати центр ваги на малюнку.

Приклад 1 - Визначити положення центру ваги куткового поперечного перерізу.



1. Вибираємо систему координат *x*, *y* з початком в нижньому лівому куті перерізу.

2. Розбиваємо фігуру на два прямокутники, обчислюємо площі і координати центрів ваги кожного:

$$A_1 = 4 \cdot 12 = 48; \quad x_1 = 2; \quad y_1 = 6;$$

$$A_2 = (20-4) \cdot 4 = 64; \quad x_2 = \frac{20-4}{2} + 4 = 12; \quad y_2 = 2;$$

3. Обчислюємо статичні моменти і координати центру ваги всього перерізу:

$$S_{x1} = y_1 A_1 = 6 \cdot 48 = 288; \qquad S_{y1} = x_1 A_1 = 2 \cdot 48 = 96;$$

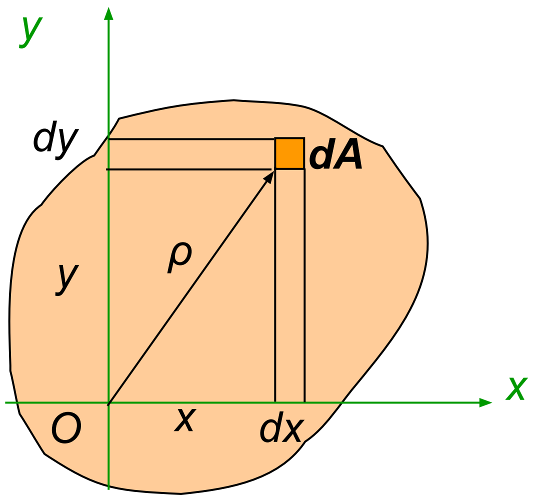
$$S_{x2} = y_2 A_2 = 2 \cdot 64 = 128; \qquad S_{y2} = x_2 A_2 = 12 \cdot 64 = 768;$$

4. Обчислюємо координати центру ваги всього перерізу:

$$\boxed{x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{96+768}{48+64} = \frac{864}{112} = 7,71.}$$

$$\boxed{y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{288+128}{48+64} = \frac{416}{112} = 3,71.}$$

Момент інерції площі поперечного перерізу – це інтеграл (сума) добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цих площадок до розглядуваної осі (точки).



$$\boxed{I_x = \int_A y^2 dA; \qquad I_y = \int_A x^2 dA}$$ - осьові моменти інерції площі.

$$\boxed{I_{xy} = \int_A xy dA}$$ - відцентровий момент інерції площі.

$$\boxed{I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA}$$ - полярний момент інерції площі.

Моменти інерції площі використовуються при визначенні напружень при згині і крученні.

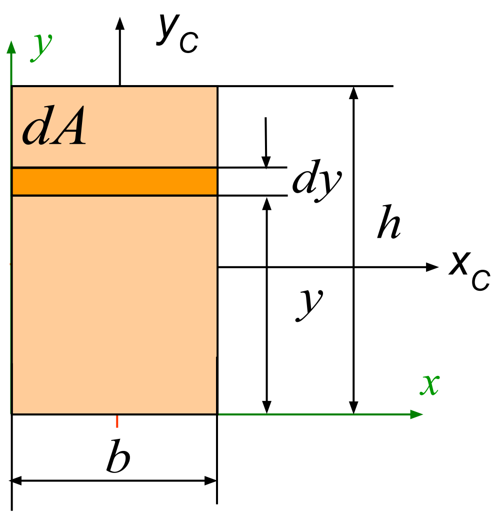
Відцентровий момент інерції щодо осей, одна з яких збігається з віссю симетрії, дорівнює нулю. Це твердження базується на тому, що в цьому випадку елементарній площі *dA* з координатами (*x, y*) завжди буде відповідати така ж площа з координатами (*-x, y*) або (*x, -y*). Підсумовування (інтегрування) похідних *xydA* дасть нуль. Далі буде доведено, що для будь-якої, в тому числі несиметричної, фігури можна знайти таке положення осей, при якому відцентровий момент інерції перетворюється в нуль.

Полярний момент інерції не залежить від орієнтації координатних осей *x, y* та завжди **дорівнює сумі осьових моментів інерції**:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x.$$

Моменти інерції площі найпростіших перерізів

Прямокутник



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b\int_0^h y^2 dy = b\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Відомо, що центр ваги прямокутника знаходиться на перетині осей симетрії ($x_C = b / 2$, $y_C = h / 2$).
Для обчислення моментів інерції відносно центральних осей слід врахувати, що координата y вимірюється від центральної осі x_c. Тобто необхідно змінити межі інтегрування:

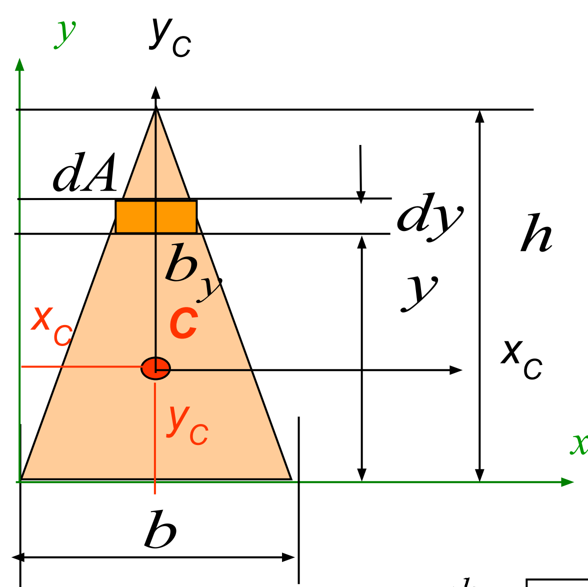
$$I_{Xc} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогічно одержимо для інших осей: $I_y = \dfrac{hb^3}{3};$ $I_{Yc} = \dfrac{hb^3}{12}.$

Відцентровий момент інерції (за рахунок симетрії): $I_{XcYc} = 0.$

Трикутник

Елементарна площа має змінну ширину і залежить від її координати по осі *y*:



$$\frac{b_y}{b}=\frac{h-y}{h};\quad b_y=\frac{h-y}{h}b;$$

$$dA=b_y dy=\frac{h-y}{h}bdy.$$

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2\frac{h-y}{h}bdy=\frac{b}{h}\int_0^h (hy^2-y^3)dy=\frac{b}{h}\left(h\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^h=\boxed{\frac{bh^3}{12}}.$$

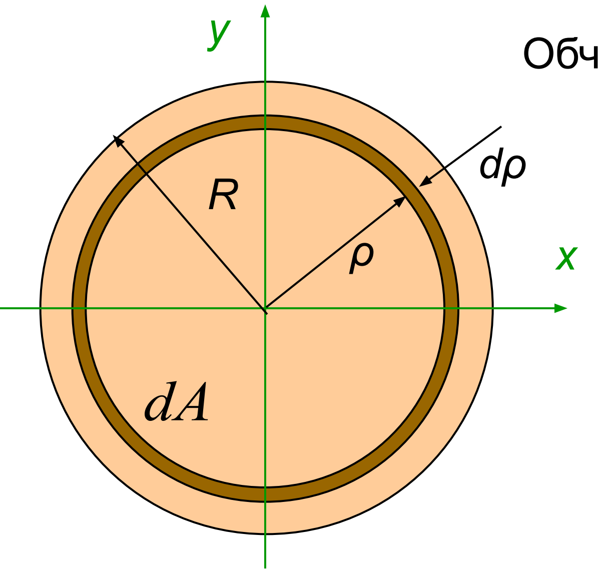
Момент інерції відносно центральної осі x_C:

$$I_{Xc}=\frac{b}{h}\int_{-h/3}^{2h/3}(hy^2-y^3)dy=\frac{b}{h}\left(h\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-h/3}^{2h/3}=\boxed{\frac{bh^3}{36}}.$$

Момент інерції щодо центральної осі y_C:

$$I_{Yc}=2I_{Yc(b/2)}=2\frac{h(b/2)^3}{12}=\boxed{\frac{hb^3}{48}}.$$

Круглий переріз



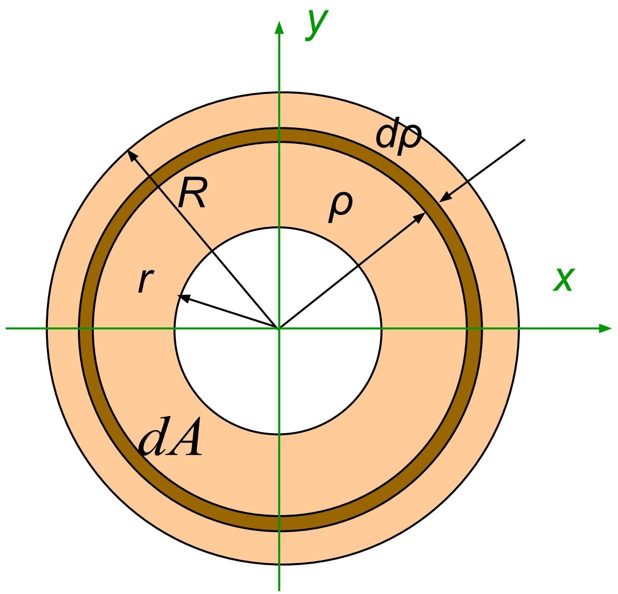
Обчислимо спочатку полярний момент інерції:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \boxed{\frac{\pi D^4}{32}}.$$

Моменти інерції щодо центральних осей з урахуванням симетрії:

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \boxed{\frac{\pi D^4}{64}}.$$

Кільцевий переріз



Достатньо змінити межі інтегрування:

$$I_\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_r^R = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \boxed{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}}.$$

Моменти інерції щодо центральних осей з урахуванням симетрії:

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} = \boxed{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}}.$$

Моменти інерції площі складених перерізів обчислюються, так само як і при обчисленні координат центру ваги, методом розбиття на прості фігури, для яких відомі або легко обчислюються координати центрів ваги і моменти інерції.

Наприклад, момент інерції кільцевого перерізу може бути обчислений як різниця моментів інерції круглого суцільного перерізу радіусу *R* і такого ж перерізу, але радіуса *r*.

Зауважимо, що при додаванні моментів інерції по кожній з координатних осей для кожної з фігур моменти інерції повинні обчислюватися відносно осей, які є загальними для розглянутого перерізу і всіх складових фігур. Звідси випливає необхідність оперувати формулами, що дозволяють переходити від одних до інших осей.

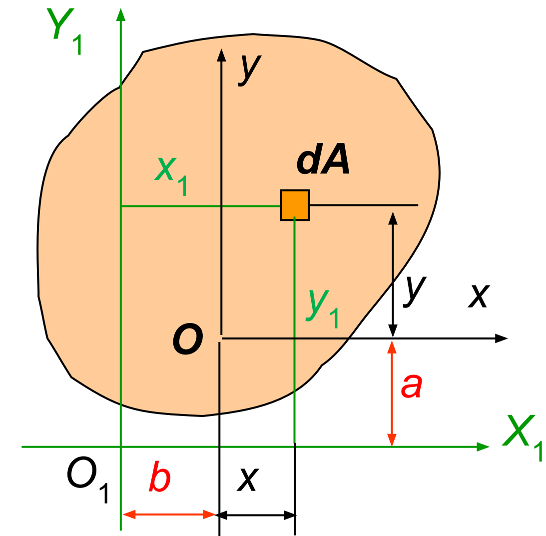
ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ПРИ ПАРАЛЕЛЬНОМУ ПЕРЕНОСІ ОСЕЙ

$$I_{X_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} + 2a\underbrace{\int_A y dA}_{S_x} + a^2 \underbrace{\int_A dA}_{A}.$$

$x_1 = b + x;$

$y_1 = a + y$

$$\boxed{I_{X_1} = I_x + 2aS_x + a^2 A.}$$



Аналогічно для осі Y_1 і X_1Y_1:

$$\boxed{I_{Y_1} = I_y + 2aS_y + b^2 A.}$$

$$I_{X_1Y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (y+a)(x+b) dA = \boxed{I_{xy} + aS_y + bS_x + abA.}$$

Формули спрощуються, якщо вихідні осі є центральними, т.я. $S_{xC} = S_{yC} = 0$:

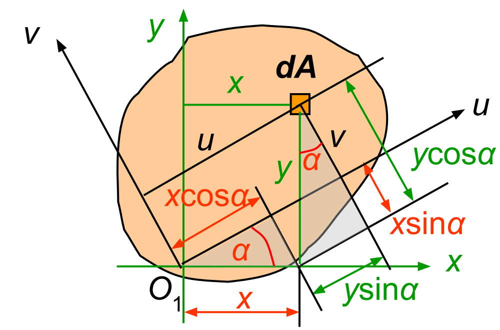
$$\boxed{I_{X_1} = I_{x_C} + a^2 A.} \qquad \boxed{I_{Y_1} = I_{y_C} + b^2 A.} \qquad \boxed{I_{X_1Y_1} = I_{x_C y_C} + abA.}$$

ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ПРИ ПОВОРОТІ ОСЕЙ

Координати елементарної площадки *dA* в системі координат *u*, *v* виражаються через вихідні координати *x*, *y* лінійними залежностями:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha;$$

$$v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$



Осьові моменти інерції щодо осей *u* і *v*:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA = \cos^2\alpha \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} - \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} \underbrace{\int_A xy dA}_{I_{xy}} + \sin^2\alpha \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y}.$$

$$\boxed{I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha.}$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y\sin\alpha + x\cos\alpha)^2 dA = \sin^2\alpha \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} + \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} \underbrace{\int_A xy dA}_{I_{xy}} + \cos^2\alpha \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y}.$$

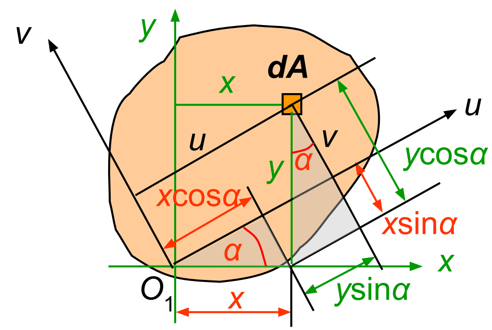
$$\boxed{I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const}}$$

Сума осьових моментів інерції щодо двох перпендикулярних осей не залежить від кута α і при повороті осей зберігає постійне значення.

$$\boxed{I_v = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha.}$$

ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОМЕНТАМИ ІНЕРЦІЇ ПРИ ПОВОРОТІ ОСЕЙ

Координати елементарної площадки *dA* в системі координат *u*, *v* виражаються через вихідні координати *x*, *y* лінійними залежностями:



$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha;$$

$$v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Відцентровий момент інерції щодо осей *u* і *v*:

$$I_{uv} = \int_A uv\,dA = \int_A (y\sin\alpha + x\cos\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\,dA =$$

$$= \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\Big(\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} - \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y}\Big) + \underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha}\underbrace{\int_A xy\,dA}_{I_{xy}}.$$

$$\boxed{I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha.}$$

ГОЛОВНІ ОСІ ТА ГОЛОВНІ МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ

Отримані залежності показують, що при зміні кута повороту осей значення моментів інерції змінюються, при цьому сума осьових моментів інерції залишається постійною.

Це означає, що можна визначити таке положення осей, при якому один з осьових моментів досягає максимального значення, а інший - відповідно мінімального значення.

Максимальні та мінімальні осьові моменти інерції називаються **головними моментами інерції**, а осі, щодо яких вони обчислюються, - **головними осями**.

Для визначення положення головних осей досить прирівняти до нуля першу похідну осьового моменту інерції по куту повороту:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$\frac{\partial I_u}{\partial \alpha} = I_x \underbrace{(-2\cos\alpha)\sin\alpha}_{\sin 2\alpha} + I_y \underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} - I_{yx} 2\cos 2\alpha = -(I_x - I_y)\sin 2\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha = 0.$$

Отриманий результат показує, що для шуканого положення осей відцентровий момент перетворюється в нуль.

Звідси можна знайти положення головних осей: $\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.}$

Оскільки тангенс має однакові значення для кутів, що відрізняються один від одного на 180^0, отриманий вираз визначає два положення осей, що відрізняються один від одного на 90^0.

Таким чином, обидві **головні осі** **взаємно перпендикулярні**.

Для довідки. **Визначення головних моментів інерції без тригонометричних формул**

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha.$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow I_{xy} = -\frac{I_x - I_y}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \pm\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos 2\alpha} = \pm\frac{1}{I_x - I_y}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.}$$

Підставляючи останній вираз і скорочуючи різницю моментів інерції отримуємо остаточно:

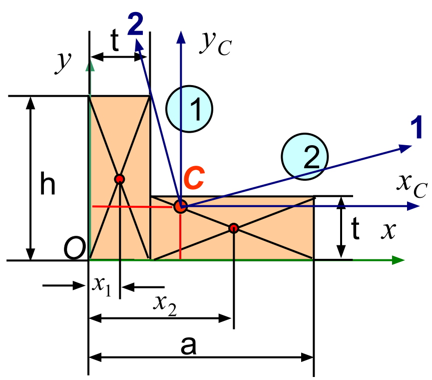
$$\boxed{I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}.}$$

Знак плюс перед другим доданком відноситься до максимального моменту, знак мінус - до мінімального.

Обчислення моментів інерції складних фігур - виконується в наступному порядку:

1. Переріз розбивається на частини, для яких відомі координати центрів ваги і моменти інерції або легко знаходяться.
2. Вибираються початкові осі, щодо яких обчислюються координати центру ваги перерізу.
3. Обчислюються координати центра ваги перерізу.
4. Проводяться центральні осі (що проходять через центр ваги перерізу), щодо яких обчислюються моменти інерції.
5. Обчислюються осьові і відцентрові моменти інерції всього перерізу щодо центральних осей.
6. Обчислюються головні центральні моменти і визначається положення головних осей.

***Приклад 1* -** Визначити головні центральні моменти інерції і положення головних осей кутикового поперечного перерізу.



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{t}{2}, \quad y_1 = \dfrac{h}{2}, \quad A_1 = h \cdot t \\ x_2 = \dfrac{a+t}{2}, \quad y_2 = \dfrac{t}{2}, \quad A_2 = (a-t)\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_c = \dfrac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} \\ y_c = \dfrac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} \end{array};$$

$$a_1 = y_1 - y_c \qquad a_2 = y_2 - y_c \qquad b_1 = x_1 - x_c \qquad b_2 = x_2 - x_c$$

$$I_{x_C} = \sum\left(I_{x_{ВЛ}} + A \cdot a^2\right) = \frac{t \cdot h^3}{12} + A_1 \cdot a_1^2 + \frac{(a-t)\cdot t^3}{12} + A_2 \cdot a_2^2,$$

$$I_{y_C} = \sum\left(I_{y_{ВЛ}} + A \cdot b^2\right) = \frac{h \cdot t^3}{12} + A_1 \cdot b_1^2 + \frac{t \cdot (a-t)^3}{12} + A_2 \cdot b_2^2,$$

$$I_{xy_C} = \sum\left(I_{xy_{ВЛ}} + A \cdot a \cdot b\right) = 0 + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + 0 + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2.$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha.$$

$$I_u = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha.$$

РАДІУС ІНЕРЦІЇ - є величина, що зв'язує момент інерції з площею поперечного перерізу і визначається з рівності:

$$\boxed{I_x = i_x^2 A;} \qquad \boxed{I_y = i_y^2 A.}$$

Радіус інерції являє собою відстань від розглянутої осі до тієї точки, в якій умовно можна зосередити всю площу поперечного перерізу. Ця величина характеризує наскільки добре "розвинений" переріз, як далеко знаходяться від осі окремі області перерізу, що в свою чергу характеризує економічність перерізу при згині і стиску із згином.

Радіусом інерції зручно користуватися при оцінці гнучкості стиснутих стержнів.

Звичайно для цього радіуси інерції попередньо обчислюються для типових і прокатних перерізів за формулами:

$$\boxed{i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}};} \qquad \boxed{i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.}$$

Радіуси інерції, відповідні головним осях, називаються головними радіусами інерції і визначаються за формулами:

$$\boxed{i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}};} \qquad \boxed{i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.}$$

МОМЕНТ ОПОРУ – це відношення моменту інерції до відстані від найвіддаленішої точки від осі (полюсу) поперечного перерізу до центра ваги перерізу:

$$\boxed{W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|};} \qquad \boxed{W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|};} \qquad \boxed{W_\rho = \frac{I_\rho}{|\rho_{\max}|}.}$$