

Численное решение

систем нелинейных

уравнений

С Н У

Общий вид СНУ

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

где F – функции нескольких переменных,

x – неизвестные

n – порядок системы

Методы решения СЛУ:

1. Прямых методов

для решения СЛУ не существует.

2. Итерационные методы.

Методы являются неустойчивыми, однако точность полученного решения определяется пользователем.

Метод Зейделя (метод простых итераций)

Ограниченный круг СЛУ

Исходные данные:

1. $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. $X^{(0)}$
3. E

Требование

Функции $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ должны быть непрерывны в окрестности точки истинного решения X и точки начального приближения $X^{(0)}$

Метод Зейделя на примере СЛУ 3-го порядка

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

1. Из 1-го уравнения выражаем неизвестное x_1 .
2. Из 2-го уравнения выражаем неизвестное x_2 .
3. Из 3-го уравнения выражаем неизвестное x_3 .

Получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_2, x_3) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_3) \\ x_3 = \varphi_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

2. В правую часть 1-го уравнения подставляем начальные приближения неизвестных $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_1^{(1)}$.
3. В правую часть 2-го уравнения подставляем начальное приближение неизвестного $x_3^{(0)}$ и уточненное значение $x_1^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_2^{(1)}$.
4. В правую часть 3-го уравнения подставляем уточненные значения неизвестных $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_3^{(1)}$.

5. Далее рассчитывается разность между значениями начальных приближений и уточненными значениями неизвестных.

Если $|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| < E$ и $|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| < E$ и $|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| < E$ то считается, что значения $x_1^{(1)}$., $x_2^{(1)}$., $x_3^{(1)}$ являются решением данной системы. В противном случае эти значения принимаются за начальное приближение и процесс повторяется.

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| < E$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Метод Зейделя применим, если

неизвестные из соответствующих уравнений
можно выразить в **явном виде**.

Метод Зейделя для решения СЛУ не является
универсальным.

Примеры:

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^3 - 1 = 0 \\ \ln x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{1 - 4x_2^3} \\ x_2 = -0,5 - 0,5 \ln x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^3 - \sin 10x_1 + \cos x_2 = 0 \\ \ln x_1 + 2x_2 - 4 \ln x_2 - x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \end{cases}$$

Метод Ньютона для решения СЛУ

Основа: разложение функций в ряд Тейлора относительно значений начальных приближений неизвестных.

Затем применяется линеаризация системы.

Для реализации метода Ньютона необходимо задать следующие данные:

1. Выражения для функций F_1, F_2, \dots, F_n в аналитическом виде.
2. Выражения для частных производных функций F_1, F_2, \dots, F_n по каждому аргументу в аналитическом виде.
3. $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.
4. ϵ .

Требование

Функции $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ должны
быть непрерывными и
дифференцируемы в окрестности
точки истинного решения X и
точки начального приближения $X^{(0)}$

Метод Ньютона на примере СНУ 3-го порядка

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

Задано: x_1^0 , x_2^0 и x_3^0 .

Истинное решение системы: x_1 , x_2 и x_3 .

Разность:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_2^0, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_3^0$$

F_1 , F_2 и F_3 разлагаются в ряд Тейлора.

Члены, содержащие производные старше первого порядка отбрасываются.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \Delta x_3 = 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = F_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \Delta x_3 = 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = F_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \Delta x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Преобразуем систему.

Получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \Delta x_3 = -F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \Delta x_3 = -F_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \Delta x_3 = -F_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{cases}$$

Неизвестные - Δx_1 , Δx_2 и Δx_3 ,

Вектор-столбец свободных членов – F_1 , F_2 и F_3 в
точке начального приближения,

Коэффициенты - производные функций F_1 , F_2 и F_3
по неизвестным x_1 , x_2 и x_3 в точке начального
приближения.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

Матрица Якоби
(Якобиан)

$$B = \begin{vmatrix} -F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ -F_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ -F_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \end{vmatrix}$$

СЛАУ решается любым известным методом (метод Гаусса, метод Крамера), получаем значения неизвестных Δx_1 , Δx_2 и Δx_3

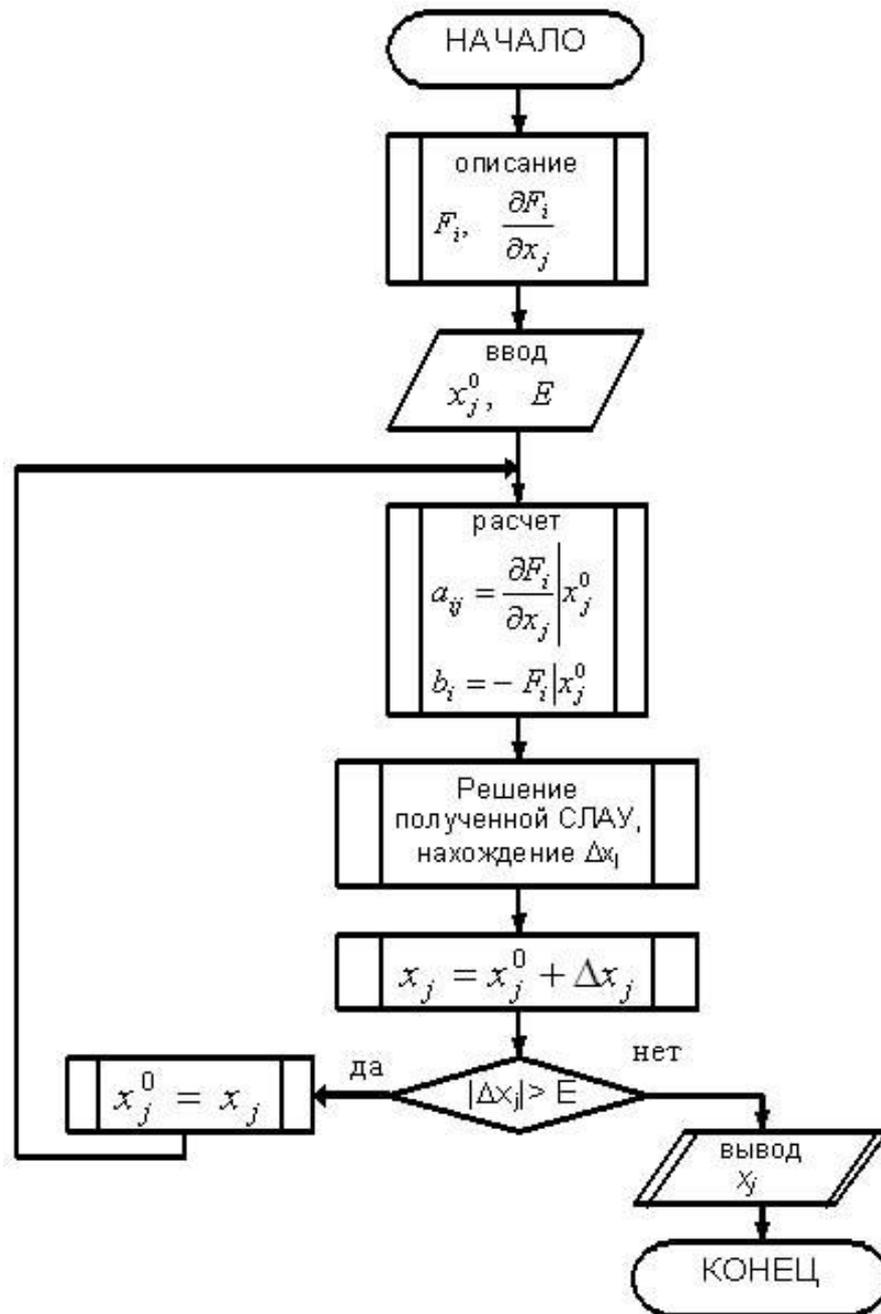
x_1 , x_2 и x_3 рассчитываются по формулам:

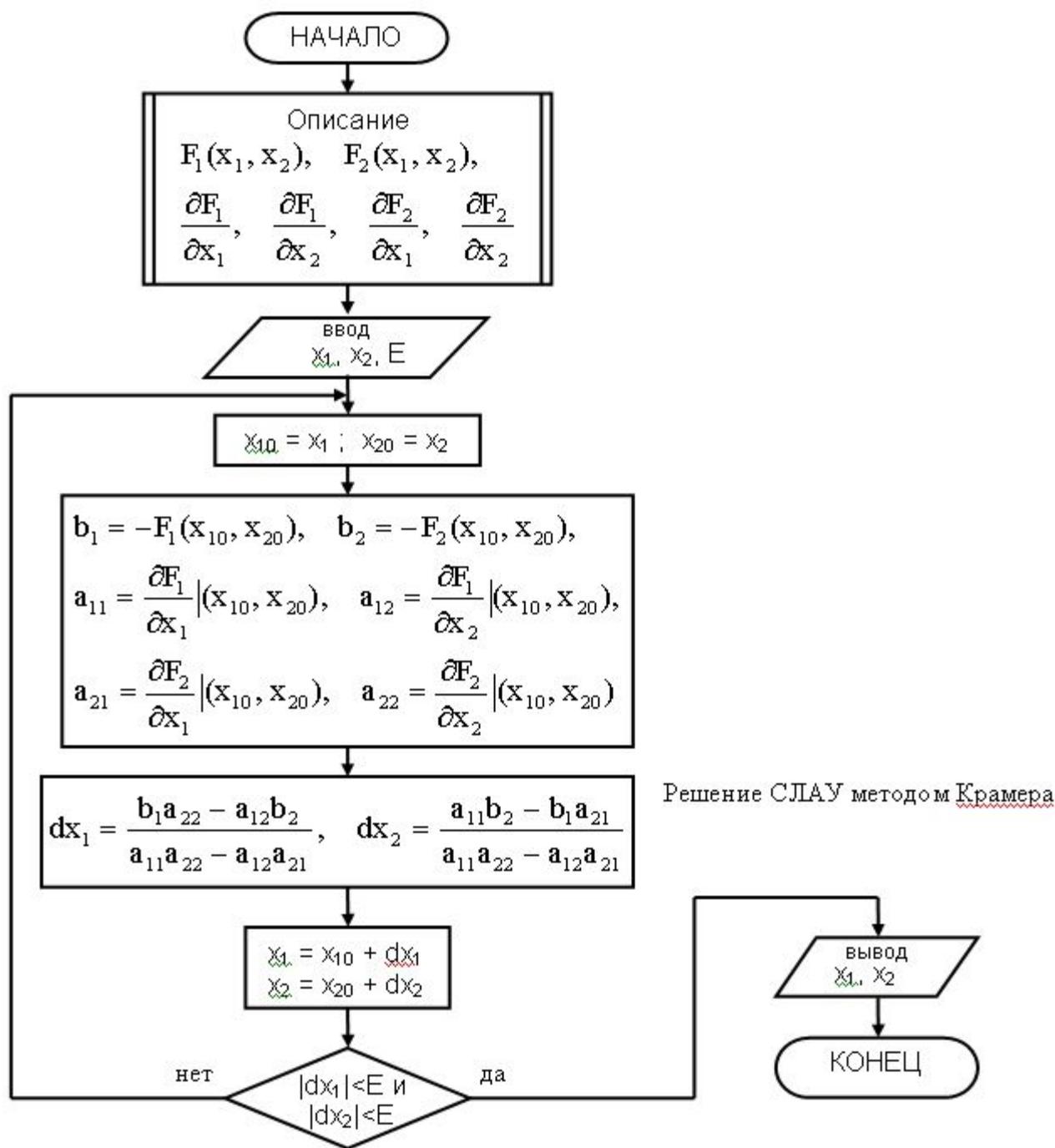
$$x_1 = x_1^0 + \Delta x_1, \quad x_2 = x_2^0 + \Delta x_2, \quad x_3 = x_3^0 + \Delta x_3$$

Если полученные значения Δx_1 и Δx_2 и Δx_3 по модулю оказались менее заданной точности ϵ , то считается, что рассчитанные значения x_1 , x_2 и x_3 являются решением данной системы нелинейных уравнений.

Если хотя бы одно из значений Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 по модулю оказалось выше заданной точности ϵ , то рассчитанные значения x_1 , x_2 и x_3 принимаются в качестве нового начального приближения и процесс повторяется.

- Блок-схема метода Ньютона в общем виде





- Блок-схема метода Ньютона для частного случая - системы 2 порядка

Замечание

Метод Ньютона является **неустойчивым**,
прогнозировать сходимость **невозможно**.

Сходимость метода зависит от порядка системы и от удачного выбора начального приближения решения.