МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

§ 1. Основные понятия

Под *оптимизацией* понимают
процесс выбора наилучшего варианта
из всех возможных

В процессе решения задачи оптимизации
обычно необходимо найти оптимальные значения
некоторых параметров, определяющих данную задачу.
При решении инженерных задач их принято называть
проектными параметрами,
а в экономических задачах их обычно называют
параметрами плана.

Выбор оптимального решения или
сравнение двух альтернативных решений
проводится с помощью
некоторой зависимой величины (функции),
определяемой проектными параметрами.
Эта величина называется <u>целевой функцией</u>
(или <u>критерием качества</u>).

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

В процессе решения задачи оптимизации
должны быть найдены такие значения
проектных параметров, при которых
целевая функция имеет минимум (или максимум).

Задачи оптимизации.

- *Безусловная задача* оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума действительной функции от n действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов
- *Условные задачи* оптимизации, или *задачи с ограничениями*, — это такие, при формулировке которых задаются некоторые условия (ограничения) на множестве.

Теория и методы решения задач оптимизации
при наличии ограничений
составляют предмет исследования
одного из важных разделов прикладной математики —
математического программирования.

§ 2. Одномерная оптимизация

Одномерная задача оптимизации в общем случае
формулируется следующим образом:
Найти наименьшее (или наибольшее) значение целевой функции y = f(x),
заданной на множестве σ
и определить значение проектного параметра

$$x \in \sigma$$

при котором целевая функция принимает экстремальное значение.
Существование решения поставленной задачи
вытекает из следующей теоремы:

Теорема Вейерштрасса.

Всякая функция f(x), непрерывная на $[a,b]$
принимает на этом отрезке наименьшее и
отрезке
наибольшее
$[a,b]$
значения, т. е. на отрезке
существуют такие точки

x_1 и x_2

что для любого $x \in [a,b]$
имеют место
неравенства

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

.

Методы поиска.

Численные методы поиска экстремальных значений
функции рассмотрим на примере нахождения минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$

Будем предполагать, что целевая функция *унимодальна*,
т. е. на данном отрезке она имеет только один минимум.

Погрешность приближенного решения задачи определяется

разностью между оптимальным значением x x_*

проектного параметра и приближением к нему

Потребуем, чтобы эта погрешность была

по модулю меньше заданного допустимого значения ε

$$|x - x_*| < \varepsilon$$

Процесс решения задачи методом поиска состоит в последовательном сужении интервала изменения проектного параметра, называемого ***интервалом неопределенности***

В начале процесса оптимизации его длина равна

b – a,

а к концу она должна стать меньше ε

т. е. оптимальное значение проектного параметра должно находиться в интервале неопределенности — отрезке $[x_n, x_{n+1}]$

причем $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$

Тогда для выполнения условия

$$\left| x - x_* \right| < \varepsilon$$

в качестве приближения к оптимальному значению

можно принять любое

$$x_* \in \left[x_n , x_{n+1} \right]$$

Например,

$$x_* = x_n \quad \text{или} \quad x_* = x_{n+1}, \text{ или } \quad x_* = \left(x_n + x_{n+1} \right) / 2$$

В последнем случае достаточно выполнения неравенства

$$x_{n+1} - x_n < 2\varepsilon$$

Метод золотого сечения.

Метод состоит в построении последовательности отрезков

$[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, …, стягивающихся к точке минимума функции $f(x)$.

На каждом шаге, за исключением первого, вычисление значения функции $f(x)$ проводится лишь в одной точке.

Эта точка, называемая *золотым сечением*, выбирается специальным образом.

1 шаг

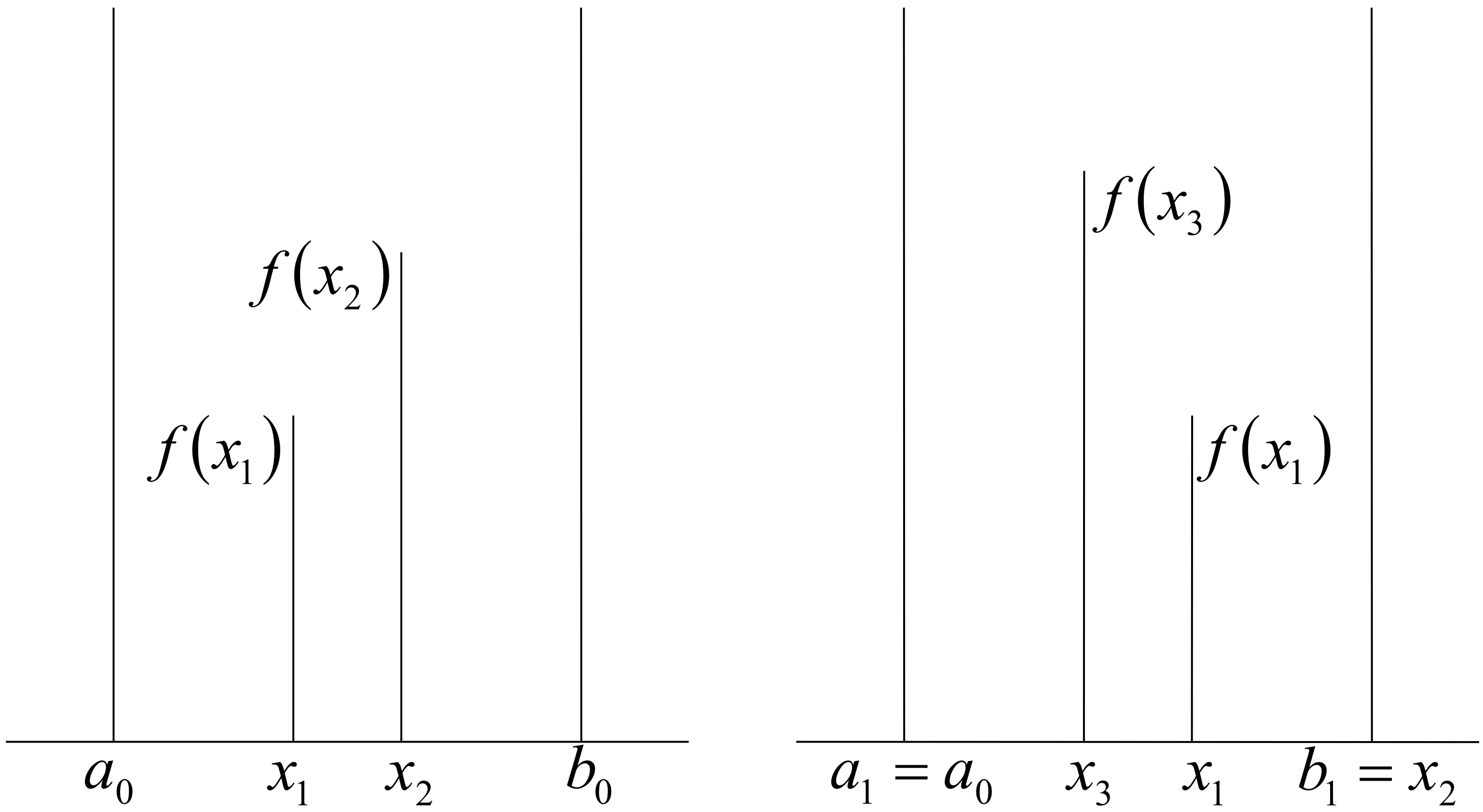
внутри отрезка $[a_0, b_0]$

выбираем некоторые внутренние точки

x_1 и x_2

и вычисляем значения целевой функции

$f(x_1)$ и $f(x_2)$


$f(x_2)$
$f(x_1)$
a_0
x_1
x_2
b_0
$f(x_3)$
$f(x_1)$
$a_1 = a_0$
x_3
x_1
$b_1 = x_2$

Поскольку в данном случае

$$f(x_1) < f(x_2)$$

очевидно, что минимум расположен на одном из прилегающих к x_1 отрезков:

$$[a_0, x_1] \text{ или } [x_1, x_2]$$

Поэтому отрезок $[x_2, b_0]$ можно отбросить, сузив тем самым первоначальный интервал неопределенности.

Второй шаг

проводим на отрезке $[a_1, b_1]$

где $a_1 = a_0$ $b_1 = x_2$

Нужно снова выбрать две внутренние точки,

но одна из них

x_1

осталась из предыдущего шага,

поэтому достаточно выбрать лишь одну точку x_3

вычислить значение $f(x_3)$

и провести сравнение.

Поскольку здесь

$$f(x_3) < f(x_1)$$

ясно, что минимум находится на отрезке

$[x_3, b_1]$

Обозначим этот отрезок $[a_2, b_2]$

снова выберем одну внутреннюю точку

и повторим процедуру сужения

интервала неопределенности.

Процесс оптимизации повторяется до тех пор,

пока длина очередного отрезка $[a_k, b_k]$

не станет меньше заданной величины ε

Теперь рассмотрим способ размещения внутренних точек
на каждом отрезке
$[a_k, b_k]$

Пусть длина интервала неопределенности равна l,
а точка деления разбивает его на части
l_1 , l_2

$l_2 >$ l_1 $l = l_1 + l_2$

Золотое сечение интервала неопределенности
выбирается так, чтобы отношение длины большего отрезка к длине всего интервала равнялось отношению длины меньшего отрезка
к длине большего отрезка:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1}$$

Из этого соотношения можно найти точку деления,
вычислив отношения

$$\alpha = \frac{l_1}{l} \qquad \beta = \frac{l_2}{l}$$

Преобразуем выражение и найдем значения

α и β

$$l_1^2 = l_2 l \qquad l_1^2 = l(l - l_1) \qquad l_1^2 + l_1 l - l^2 = 0$$

$$\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \frac{l_1}{l} - 1 = 0 \qquad \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \qquad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Поскольку нас интересует только положительное решение, то

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \qquad \beta = 1-\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

Очевидно, что интервал неопределенности можно разделить в соотношении золотого сечения двояко: в пропорциях

$l_2 \;:\; l_1$ и $l_1 \;:\; l_2$

В данном случае имеем

$$\frac{x_1 - a_0}{b_0 - a_0} = \frac{l_2}{l} = \beta$$

$$x_1 - a_0 = \beta(b_0 - a_0) \qquad x_1 = (1-\beta)a_0 + \beta b_0$$

$$x_1 = \alpha a_0 + \beta b_0$$

Аналогично

$$x_2 = \beta a_0 + \alpha b_0$$

,

Начальная длина интервала неопределенности составляет

$$d_0 = b_0 - a_0$$

После первого шага оптимизации получается
новый интервал неопределенности —
отрезок $[a_1, b_1]$

Его длина равна

$$d_1 = b_1 - a_1 = x_2 - a_0 = \beta a_0 + \alpha b_0 - a_0 = \alpha\left(b_0 - a_0\right) = \alpha d_0 \approx 0.618 d_0$$

На втором шаге отрезок

$$[a_1, b_1]$$

также делится в соотношении золотого сечения.

При этом одной из точек деления будет точка x_1

Покажем это:

$$\frac{x_1 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{\beta(b_0 - a_0)}{\alpha(b_0 - a_0)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \alpha$$

Последнее равенство следует из соотношения

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Вторая точка деления x_3

выбирается так же, как выбирается точка x_1

при делении отрезка $[a_0, b_0]$

т. е. $x_3 = \alpha a_1 + \beta b_1$

И снова интервал неопределенности уменьшается до размера

$$d_2 = b_2 - a_2 = b_1 - x_3 = b_1 - \alpha a_1 - \beta b_1 = \alpha(b_1 - a_1) = \alpha d_1 = \alpha^2 d_0$$

По аналогии можно записать координаты
точек деления y и z отрезка

$$\left[a_{k-1}, b_{k-1}\right]$$

на к-м шаге оптимизации (y < z):

$$y = \alpha a_{k-1} + \beta b_{k-1}$$

$$z = \beta a_{k-1} + \alpha b_{k-1}$$

Вычислению, естественно,
подлежит только одна из координат y, z
другая координата берется с предыдущего шага.
При этом длина интервала неопределенности равна

$$d_k = b_k - a_k = \alpha^k d_0 \approx 0.618^k d_0$$

Как и в общем случае метода поиска, процесс оптимизации заканчивается при выполнении условия

$$d_k < \varepsilon$$

Тогда проектный параметр оптимизации

$$x \in [a_k, b_k]$$

В качестве приближения к оптимальному значению

можно принять

$x_* = a_k$ или $x_* = b_k$, или $x_* = \dfrac{(a_k + b_k)}{2}$

В последнем случае для достижения требуемой точности достаточно, чтобы

$$d_k < 2\varepsilon$$