ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

- 3.1 Вектори. Операції над ними.
- 3.2 Декартові прямокутні координати вектору. Довжина вектору.
- 3.3 Скалярний добуток векторів.
- 3.4 Векторний добуток двох векторів.
- 3.5 Мішаний добуток трьох векторів. Подвійний векторний добуток

3.1 Вектори. Операції над ними.

Вектором називається спрямований відрізок. Вектор з початком в точці A і кінцем у точці B позначається символом $\vec{AB}$ (або однією буквою $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...).

Модулем (довжиною) вектора $\vec{AB}$ називається довжина відрізка AB і позначається, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Одиничним називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор позначають $\vec{e}$.

Нульовим називається вектор, довжина якого дорівнює нулю. Нульовий вектор позначається $\vec{0}$.

3.1 Вектори. Операції над ними.

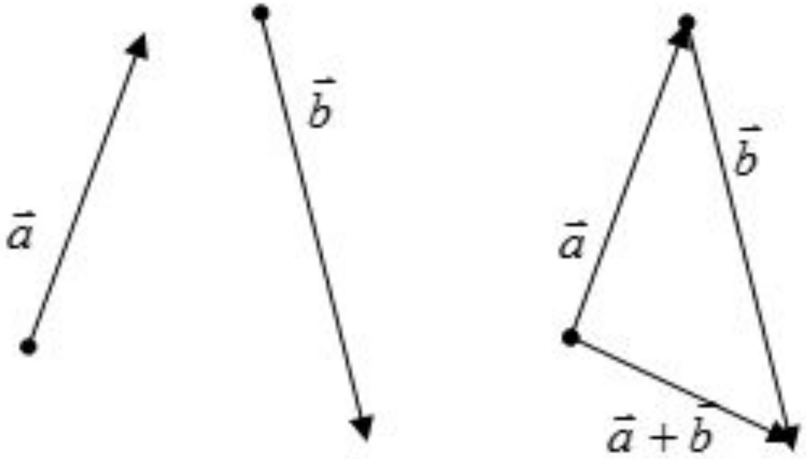
Колінеарними називаються вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих; записують $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Компланарними називаються три (і більше) вектора, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Рівними називаються два колінеарних вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони однаково спрямовані і мають рівні довжини.

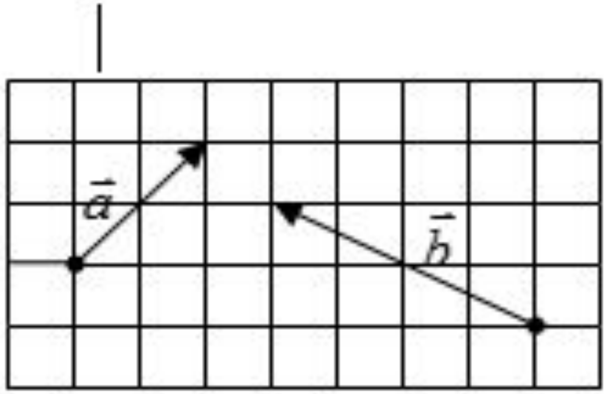
Додавання векторів. Добуток вектору на число

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$, відкладеного від кінця вектора $\vec{a}$.

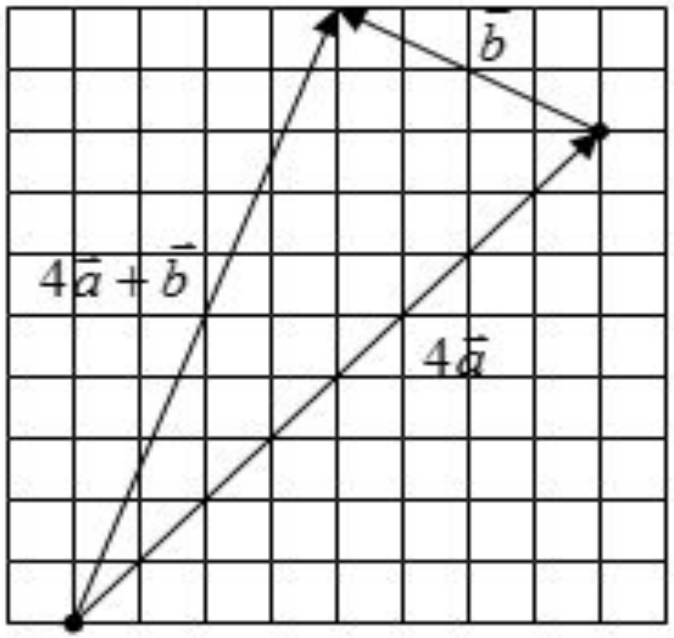


Добутком вектору $\vec{a} \neq 0$ на число $\lambda \neq 0$ називається вектор, якій має довжину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ і якій має напрям вектора $\vec{a}$ в разі $\lambda > 0$ та протилежній напрямок у разі $\lambda < 0$.

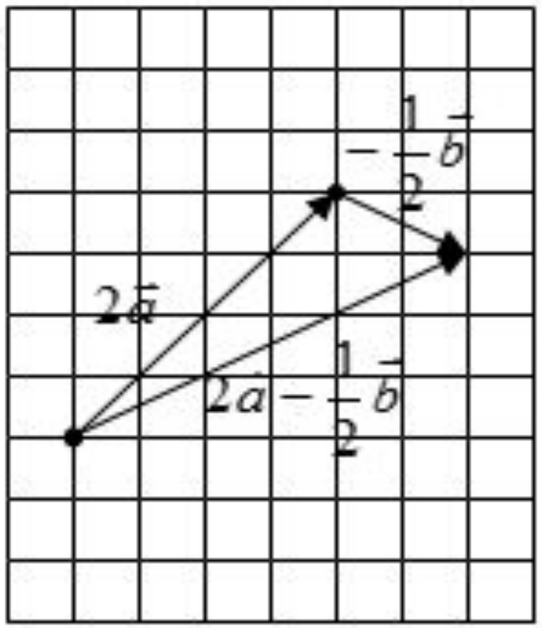
Приклад .1. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектори: 1) 1) $4\vec{a}+\vec{b}$; 2) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.



1)



2)



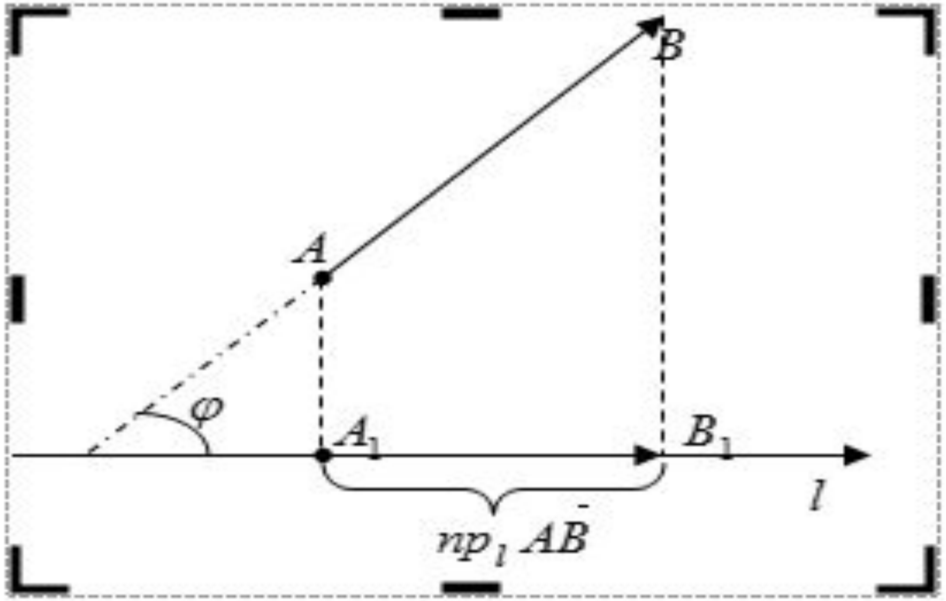
3.2 Декартові прямокутні координати вектору.

Нехай вектор $\vec{AB}$ складає кут φ з віссю l.

Проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь l називається число, рівне довжині вектора $\overline{A_1B_1}$ (рис.1), взятої зі знаком «плюс», якщо напрям вектора $\overline{A_1B_1}$ збігається з напрямком осі і зі знаком «мінус» у противному випадку.

Проекцію вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на вісь l можна обчислити за формулою:

$$пр_l\vec{a} = |\vec{a}| cos\varphi .$$



Довжина вектору

Декартовими прямокутними координатами x, y, z вектору $\vec{a}$ називаються його проекції на відповідні координатні осі Ox, Oy, Oz.

Вектор $\vec{a}$ з координатами x, y, z записують у вигляді $\vec{a} = (x; y; z)$ або, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно.

Довжина вектору $|\vec{a}$ визначається за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Якщо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ заданий точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то його координати обчислюються за формулами:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Приклад 2. Дано дві точки $A_1(3;-4;1)$ і $A_2(4;6;-3)$. Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{a}=\overline{A_1A_2}$.

За умовою задачі, $x_1=3$, $y_1=-4$, $z_1=1$, $x_2=4$, $y_2=6$, $z_2=-3$. Значить, $\vec{a}=\overline{A_1A_2}=(4-3;6-(-4);-3-1)=(1;10;-4)$.

$$|\vec{a}|=\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{1^2+10^2+(-4)^2}=\sqrt{1+100+16}=\sqrt{117}.$$

Приклад 3. Дано два вектори $\vec{a}=(2;-1;4)$ и $\vec{b}=(0;-1;2)$. Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

$$2\vec{a}=(4;-2;8);\ -3\vec{b}=(0;3;-6);$$

$$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}=(4+0;-2+3;8-6)=(4;1;2);$$

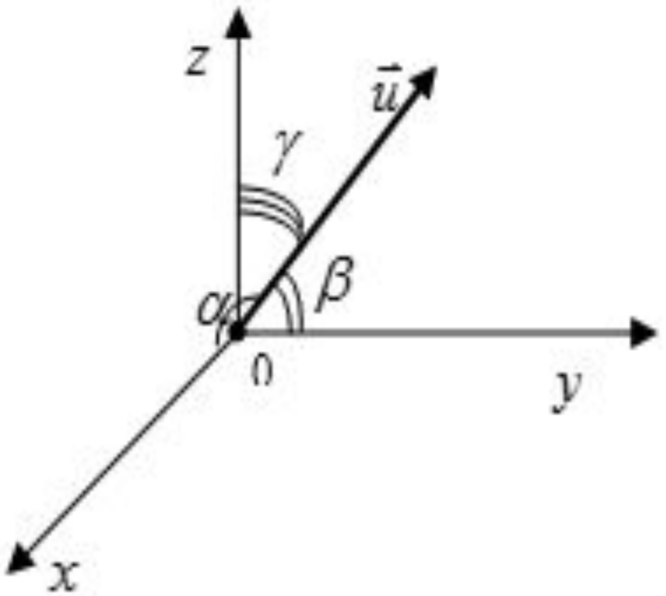
$$|\vec{c}|=\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}.$$

Поєднаємо паралельним переносом початок деякого вектора $\vec{u}$ з початком координат прямокутної системи координат $Oxyz$. Нехай α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{u}=(x, y, z)$ з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно (рис.2).

Напрям вектору $\vec{u}$ визначається за допомогою *направляючих косинусів* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, для яких справедливі рівності:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{u}|};\cos\beta=\frac{y}{|\vec{u}|};\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{u}|}},$$

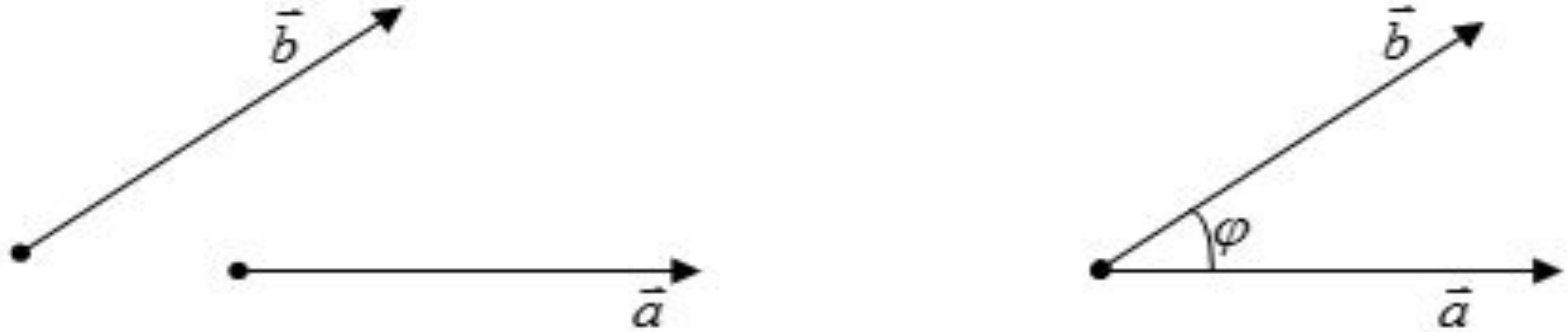
$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}.$$



3.3 Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називає
число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними (
рис.3):

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi}.$$



З рис. 3 видно, що $|\vec{a}|\cos\varphi=np_{\vec{b}}\vec{a}$, $\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=np_{\vec{a}}\vec{b}$.

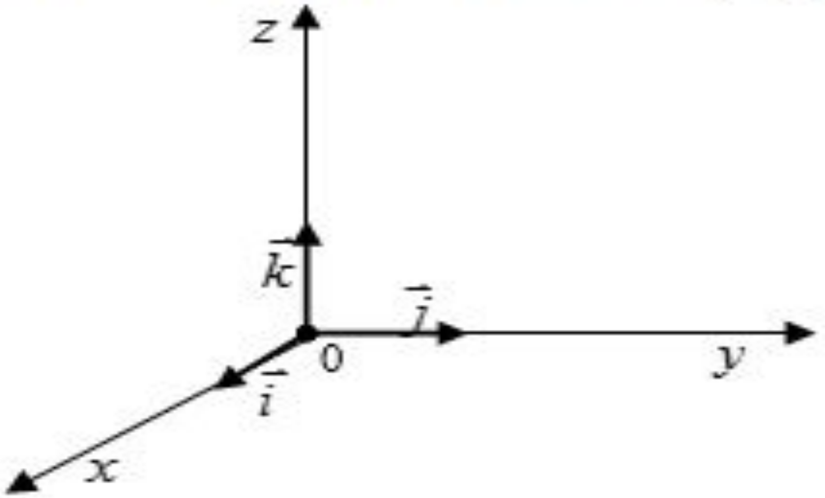
Тому $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}}$ або $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}}$. (*)

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ — переставний (комутативний) закон.
2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ — розподільний закон.
3. Якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}$ то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
4. $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^0=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}}$ (або $\vec{a}=0$, або $\vec{b}=\vec{0}$).

Зокрема, скалярний добуток одиничних векторів (ортів) задовольняє рівностям:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$



1. Якщо вектори задані координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ або $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

2. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається за формулою:

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні, тобто:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

4. Умова перпендикулярності векторів $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$:

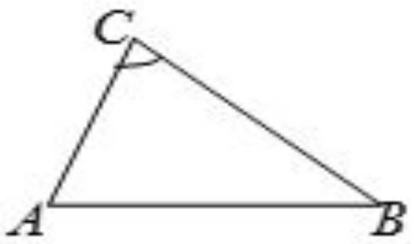
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Приклад 4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 10$ и $|\vec{b}| = 2$, обчисліть $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$.

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi - 2|\vec{b}|^2 =$$

$$= 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 \cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi - 2 \cdot 4 = 300 - 50 - 8 = 242.$$

Приклад 5. Дано вершини трикутника $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ и $C(0;0;5)$. Знайдіть:



1) внутрішній кут при вершині C;

2) $np_{\overline{CA}}\overline{CB}$.

Для знаходження кута C знайдемо вектори $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$.

$\overline{CB} = (1-0;1-0;1-5) = (1;1;-4)$; $\overline{CA} = (2-0;-1-0;3-5) = (2;-1;-2)$.

Тоді

$$\cos\angle C = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CA}|} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{2 - 1 + 8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$, тобто $\angle C = \frac{\pi}{4}$.

Відповідно до формули (*) $\quad np_{\overline{CA}}\overline{CB} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$.

3.4 Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, якій задовольняє таким умовам:

1) Довжина вектору $\bar{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$$

2) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до площини цього паралелограма, тобто перпендикулярний і до вектора $\bar{a}$, і до вектора $\bar{b}$:

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 0 \quad \text{та} \quad \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$$

3) Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, взяті у такому порядку, утворюють праву трійку векторів. Упорядкована трійка некомпланарних векторів називається правою, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Для векторного добутку $\bar{c}$ вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ вводиться позначення:

$$\bar{c} = \left[\bar{a}\,\bar{b}\right] \quad \text{або} \quad \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$$

Якщо **вектори-множники взаємно перпендикулярні**, то модуль векторного добутку дорівнює добутку модулів співмножників:

$$\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|, \quad \text{якщо} \quad \bar{a} \perp \bar{b}$$

Якщо **вектори-множники колінеарні**, то $\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 0$ і векторний добуток їх дорівнює нуль-вектору, тобто

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = \bar{0}$$

Властивості векторного добутку

Закон комутативності для векторного добутку $\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]$ не виконується, або точніше вектор $\left[\bar{b}\,\bar{a}\right]$ має напрям, протилежний до $\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]$:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = -\left[\bar{b}\,\bar{a}\right]$$

Властивість асоціативності відносно скалярного множника зберігається:

$$\alpha\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = \left[\left(\alpha\bar{a}\right)\bar{b}\right] = \left[\bar{a}\left(\alpha\bar{b}\right)\right]$$

Властивість дистрибутивності для векторного добутку також зберігається:

$$\left[\bar{a}\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\right] = \left[\bar{a}\,\bar{b}\right] + \left[\bar{a}\,\bar{c}\right]$$

Якщо **векторний добуток** двох векторів записати у **координатній формі,** то маємо:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

Якщо $\overline{F}$ є вектор сили, прикладеної до деякої точки B, а вектор $\overline{AB}$, спрямований з точки A в точку B, то векторний добуток $\left[\overline{AB}, \overline{F}\right]$ буде **моментом** $\overline{M}$ **сили** $\overline{F}$ відносно точки A.

Приклад 6. Дано: $|\bar{a}|=10,\ |\bar{b}|=2$ і $(\bar{a}\bar{b})=12$. Обчислити $\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right|$.

Розв'язання:

Відомо, що $\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$.

Для того, щоб розв'язати задачу, нам потрібно знайти $\sin(\bar{a},\bar{b})$.

З умови $(\bar{a}\,\bar{b})=12$ маємо: $(\bar{a}\,\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$, звідки $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{12}{10\cdot 2}=\dfrac{3}{5}$.

Оскільки $\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)>0$, то $0<\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)<\dfrac{\pi}{2}$.

З основної тригонометричної тотожності знаходимо $\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$:

$$\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\bar{a}\,\bar{b}\right)}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}.$$

Отже, $\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=10\cdot 2\cdot\dfrac{4}{5}=16$.

Приклад 8. Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, щоб вектори $3\bar{a}+\bar{b}$ та $\bar{a}-3\bar{b}$ були колінеарними?

Розв'язання:

Щоб ненульові вектори $3\bar{a}+\bar{b}$ та $\bar{a}-3\bar{b}$ були колінеарні, необхідно, щоб модуль їх векторного добутку дорівнював нулю, тобто

$$\left|\left[\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)\right]\right|=0,$$

$$\left[\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)\right]=3\left[\bar{a}\cdot\bar{a}\right]-9\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]+\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]-3\left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]=-10\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right],$$

$$\left|-10\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\right|=10\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=0.$$

Але $\left|\bar{a}\right|\neq 0$ і $\left|\bar{b}\right|\neq 0$, отже $\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=0$, звідки $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=0$ або $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\pi$, тобто вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ повинні бути колінеарними.

3.5 Мішаний добуток трьох векторів.

Якщо векторний добуток двох векторів $\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]$ помножити скалярно на третій вектор $\bar{c}$, то такий **добуток трьох векторів називається мішаним** (векторно-скалярним) і позначається так:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c} = \bar{a}\left[\bar{b}\,\bar{c}\right] = \left(\overline{abc}\right)$$

Мішаний добуток має просте геометричне тлумачення – це скаляр, який за абсолютною величиною дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних трьох векторах.

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку, то мішаний добуток є число додатне, що дорівнює зазначеному об'єму, а якщо трійка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - ліва, то мішаний добуток – число від'ємне, яке за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах.

Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю тоді, коли ці вектори компланарні, тобто **умова компланарності** трьох векторів має вигляд:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c} = 0$$

Мішаний добуток не змінюється, якщо має місце переставлення співмножників за колом і змінює знак, якщо в такому переставленні порушено послідовність співмножників:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c} = \left[\bar{b}\,\bar{c}\right]\bar{a} = \left[\bar{c}\,\bar{a}\right]\bar{b} = -\left[\bar{b}\,\bar{a}\right]\bar{c} = -\left[\bar{a}\,\bar{c}\right]\bar{b} = -\left[\bar{c}\,\bar{b}\right]\bar{a}$$

Тому мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ іноді позначають простіше, написавши їх поряд у тій послідовності, в якій проводяться дії:

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c} = \overline{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$$

Помітимо, що якщо в мішаному добутку є два колінеарні вектори, то він дорівнює нулю.

Подвійний векторний добуток

Якщо векторний добуток двох векторів $\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]$ помножити векторно на третій вектор $\bar{c}$, то такий добуток називається **подвійним векторним добутком** і позначається так:

$$\left[\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c}\right]$$

Для подвійного векторного добутку порушується комутативний і асоціативний закони:

$$\left[\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c}\right] \neq \left[\bar{c}\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\right] \quad ,$$

$$\left[\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c}\right] \neq \left[\bar{a}\left[\bar{b}\,\bar{c}\right]\right]$$

Вектор $\left[\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\bar{c}\right]$ компланарний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$; тому має місце формула:

$$\left[\left[\bar{a}\bar{b}\right]\bar{c}\right] = \bar{b}\left(\bar{a}\bar{c}\right) - \bar{a}\left(\bar{b}\bar{c}\right)$$

Приклад 9. Три вершини тетраедра знаходяться в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D, яка належить осі Oy, якщо об'єм тетраедра дорівнює 3 куб. од.

Розв'язання:

Оскільки точка D належить осі Oy, то її координати $D(0; y; 0)$. Об'єм тетраедра $ABCD$ можна розглядати як $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ як на ребрах:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\;\overline{AC}\;\overline{AD}\right)\right| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \\ x_d - x_a & y_d - y_a & z_d - z_a \end{vmatrix},$$

$$3 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо, що $y_{D1} = -4; y_{D2} = 5$

отже $D_1(0; -4; 0)$; $D_2(0; 5; 0)$.

Приклад 10. Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.

Розв'язання:

Для того, щоб довести, що чотири точки лежать в одній площині, достатньо довести, що три вектора, початком яких є деяка з даних чотирьох точок, а кінцями є інші три точки, лежать в одній площині, тобто, що ці три вектори компланарні. За спільний початок векторів виберемо точку A, тоді:

$$\overline{AB} = (-1;-1;6)$$

$$\overline{AC} = (-2;0;2)$$

$$\overline{AD} = (1;-1;4)$$

Вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ будуть компланарними тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2+12-8-2=0.$$

Отже, одержали, що вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарні, тому точки A, B, C, D належать одній площині.

Приклад 11. Задана піраміда з вершинами в точках $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(7; 6; 3)$, $D(4; -3; -1)$.

Знайти:

а) довжину ребер $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

б) площу грані ABC;

в) кут між ребрами $\overline{AD}$ і $\overline{AC}$;

г) об'єм піраміди;

д) довжину висоти, опущеної на грань ABC.

Розв'язання:

а) Знайдемо вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = -3\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}; \quad \overline{AC} = 6\bar{i} + 4\bar{j}; \quad \overline{AD} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Знайдемо модулі цих векторів:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}; \quad \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{9+25+16} = 5\sqrt{2}.$$

б) Площа грані ABC буде дорівнювати:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}\overline{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 6 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}^2}=14\ \textit{кв.од.}$$

в) Кут між ребрами $\overline{AD}$ і $\overline{AC}$ знайдемо за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{18-20}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}}=-\frac{1}{5\sqrt{26}},\qquad \varphi=\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right).$$

г) Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V=\frac{1}{6}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\\ 3 & -5 & -4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(48+60+24+48)=30\ \textit{куб.од.}$$

д) Довжину висоти h, опущеної на грань ABC, можна знайти, користуючись формулою:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h,\quad \text{звідки}\quad h=\frac{3V}{S}.$$

Таким чином $h=\dfrac{3\cdot 30}{14}=6\dfrac{3}{7}\ \textit{лін.од.}$