

Лекция 2.

Элементы дифференциального исчисления

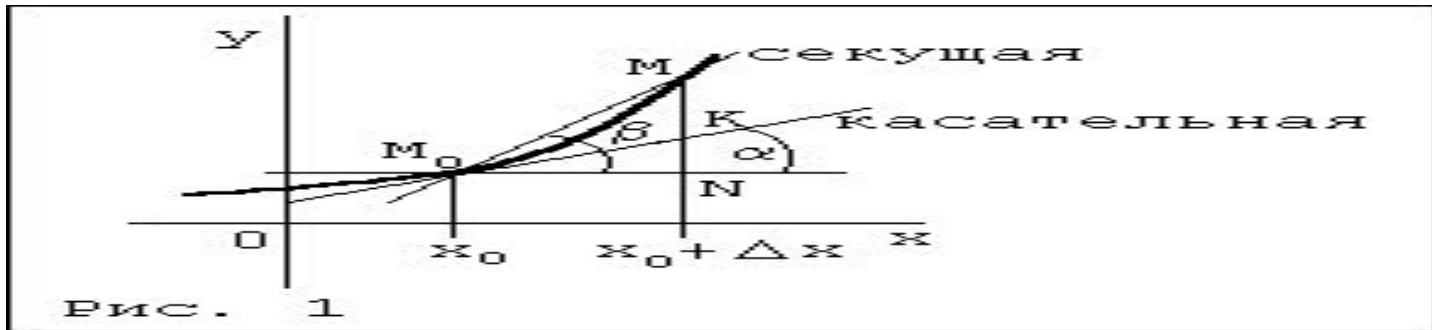
2.1. Производная функции. Дифференциал

2.2. Методы вычисления производных

**2.3. Производные и исследование
функций**

2.1 Производная функции. Дифференциал

Непрерывная функция $y=f(x)$ задана графиком (рис.1) . Отметим на графике точки $M_0(x_0, y_0)$ ($y=f(x_0)$) и $M(x_0+\Delta x)$ ($f(x_0+\Delta x)$). Построим : прямую M_0K , касательную к графику функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ и прямую M_0M , секущую, соединяющую точки M_0 и M .



Тангенс угла наклона секущей

$$K_{\text{наê}} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{MN}{\Delta x}$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то и $\Delta y \rightarrow 0$. При этом секущая M_0M неограниченно приближается к положению M_0K , к касательной к графику $y = f(x)$ в точке M_0 . Угловой коэффициент касательной получим из предельного перехода

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{KN}{\Delta x}$$

Производная - определение.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю, если такой предел существует.

Обозначается производная функции $f(x)$ в точке x_0 символом $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Для производной в точке x_0 можно использовать и другие обозначения, например:

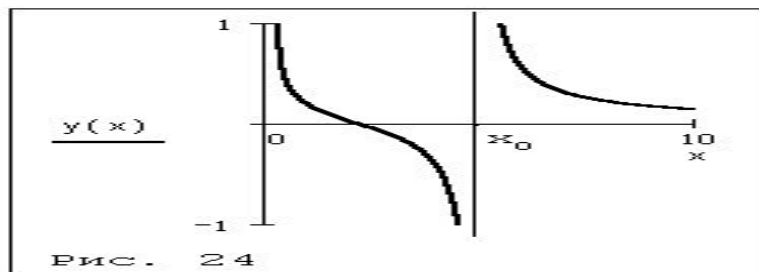
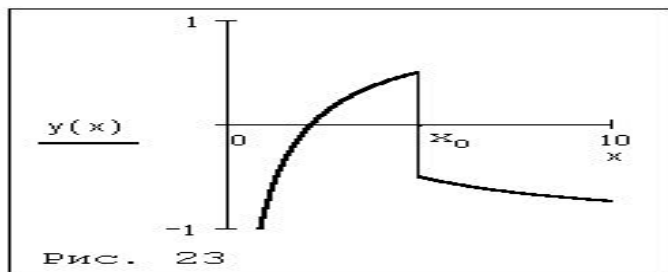
$$y'(x_0), \frac{dy}{dx}(x_0), \frac{df}{dx}(x_0), y' \big|_{x=x_0}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что геометрический смысл производной – это тангенс угла наклона касательной к функции в точке

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{KN}{\Delta x}$$

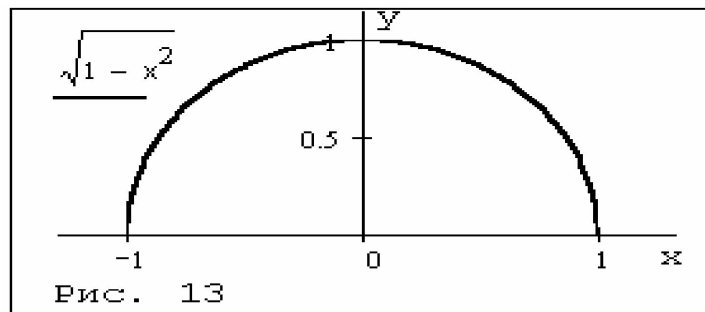
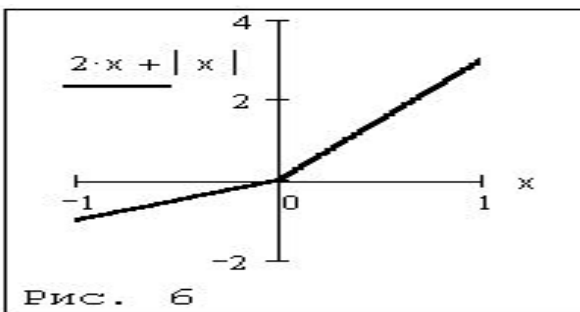
Существование производной

1. Необходимое условие существования производной: функция определена и непрерывна в точке (на интервале). Верно и обратное утверждение: *если функция дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна*
Примеры функций, когда необходимое условие в точке x_0 не выполняется



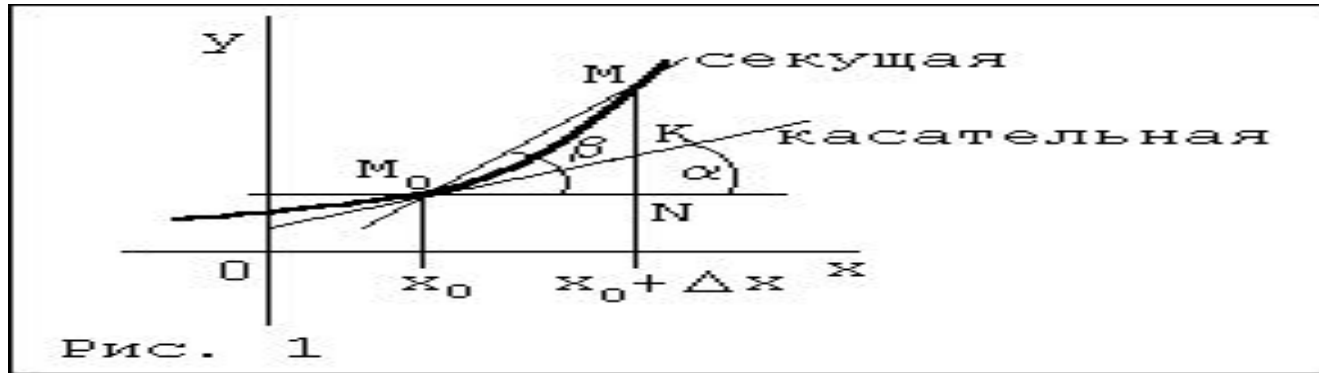
2. Достаточное условие существования производной в точке: производная определена и непрерывна в точке (на интервале)

Примеры функций, когда достаточное условие не выполняется



Геометрический смысл производной, дифференциала

Геометрический смысл производной функции в точке x_0 , $f'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. (слайд 3)



Дифференциал – определение. Рассмотрим рис.1. Приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ при перемещении по секущей равно отрезку NM , при перемещении по касательной равно отрезку KN . Из треугольника M_0KN следует, что $KN = M_0N \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Так как $M_0N = \Delta x$, а $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, то $KN = f'(x_0) \cdot \Delta x$. Произведение $f'(x_0) \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается $dy(x)$, $df(x)$. Учитывая, что $\Delta x = dx$, получаем

$$dy = df = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x) dx$$

Геометрический смысл дифференциала (отрезок KN) – это первое линейное приращение функции в точке $x_0 + \Delta x$

Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется в заданном направлении.

Пусть $S=S(t)$ – закон движения материальной точки в зависимости от времени t , t_0 – время начала движения, $S(t_0)$ – путь в момент t_0 .

В момент времени $t=t_0+\Delta t$ путь равен $S(t_0+\Delta t)$, *приращение пути за отрезок времени Δt равно $\Delta S=S(t_0+\Delta t) - S(t_0)$.*

Тогда средняя скорость за время Δt равна $V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

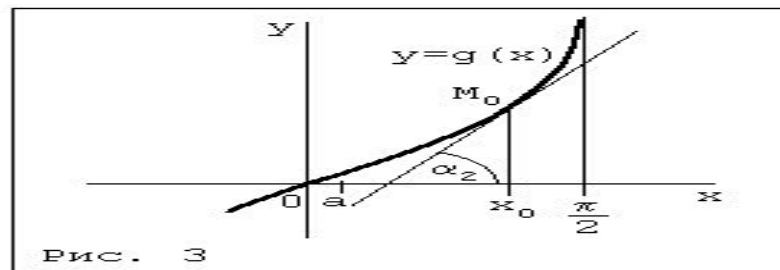
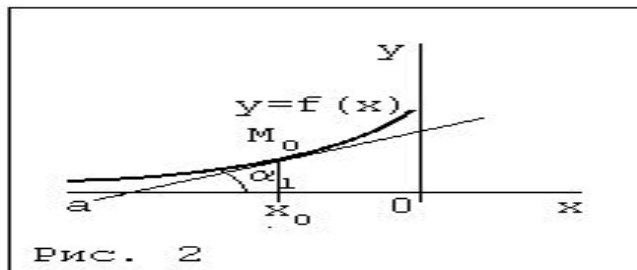
а скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) есть производная от пути по времени.
Это – «механический смысл» производной.

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$$

В каком-то смысле – производная функции – это скорость ее изменения – чем круче график, тем больше производная (по абсолютной величине)

Производная и характер графика

1. Монотонно возрастающая функция, Производная положительна

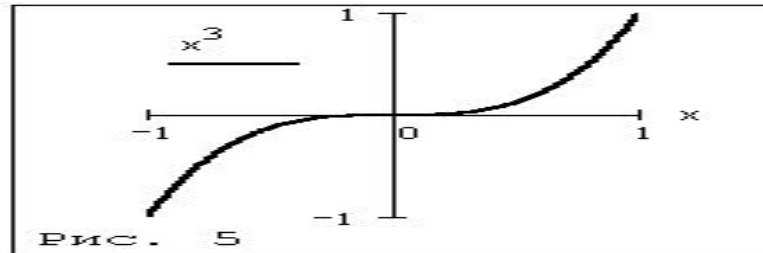
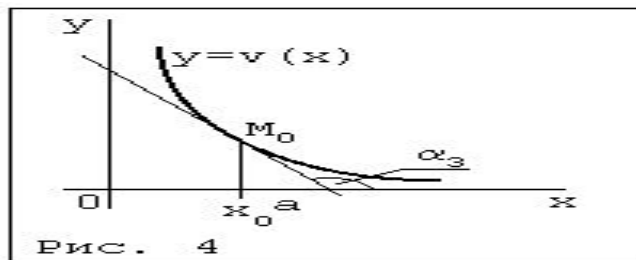


2. Монотонно убывающая функция.

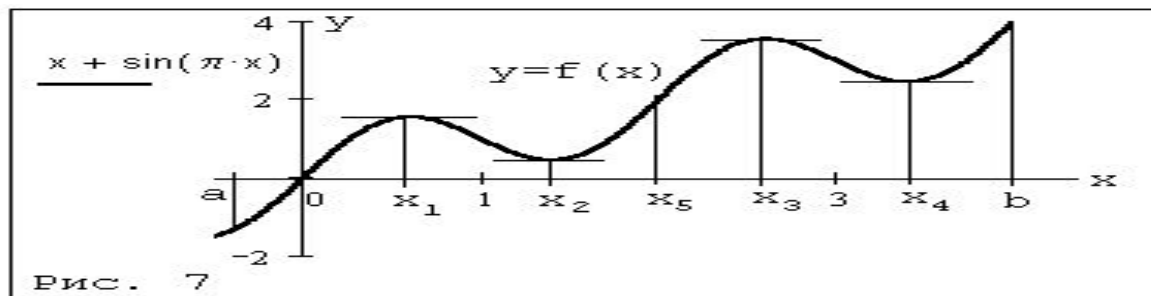
Неубывающая функция

Производная отрицательна

Производная неотрицательна



3. Немонотонная функция. Производная в точках экстремума равна нулю



Немонотонные функции

Функция имеет интервалы монотонного роста и монотонного спада. В точке **a** функция имеет минимум, в точке **b** – максимум. Это – *глобальные* минимум и максимум

Внутренними (локальными) точками минимального или максимального (экстремального) значения являются x_1, x_2, x_3, x_4 .

Точки x_1, x_3 – точки максимума, точки x_2, x_4 – точки минимума

В этих точках касательная параллельна оси x , тангенс угла наклона равен нулю, следовательно производная в этих точках равна нулю, а вокруг этих точек производная меняет знак.

Аналитическое определение точек экстремума связано с нахождением первой производной функции

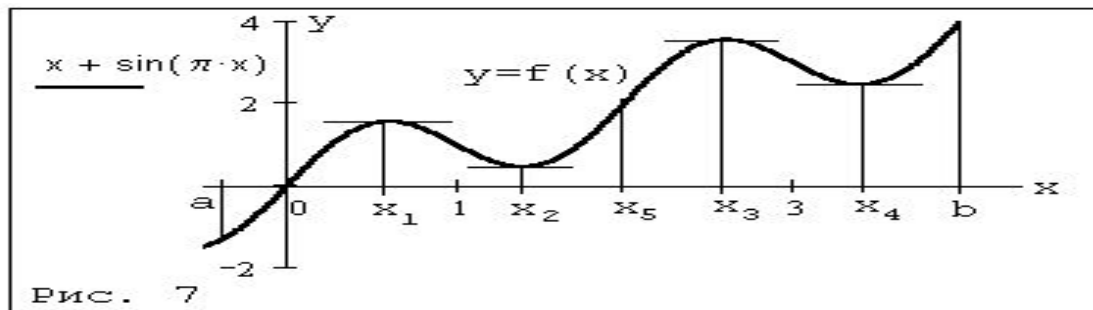
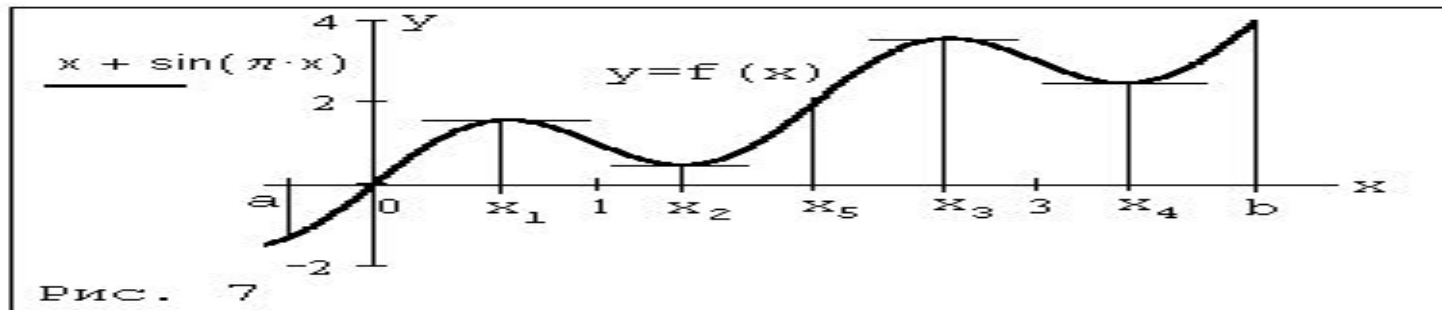


Рис. 7

Первая производная и экстремумы функции

- Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке отрезка $[a,b]$, то она дифференцируема на этом отрезке и ее поведение можно исследовать с помощью производной $f'(x)$.
- Рассмотрим еще раз график функции рис.7.
- Наблюдаем интервалы возрастания, убывания, точки изменения поведения функции x_1, x_2, x_3, x_4 .
- В точках x_1, x_3 функция имеет наибольшее в окрестности значение, в x_2, x_4 – наименьшее



- Определение: любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция достигает на этом отрезке своего минимального и своего максимального значения

1.Необходимое условие существования экстремума в точке: $f'(x) = 0$.
Точки, в которых $f'(x)=0$ являются **возможными** точками экстремума.
Они называются **стационарными (характеристическими)** точками.

2. Достаточное условие существования экстремума в точке:

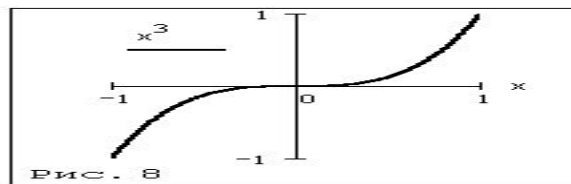
- точка $x=c$ является стационарной,
- производная $f'(x)$ при переходе аргумента через стационарную точку $x=c$ меняет знак

Правило знаков: - производная в стационарной точке меняет знак:

- с плюса на минус – в точке $x=c$ - максимум;
- с минуса на плюс, - в точке $x=c$ - минимум.
- производная в стационарной точке не меняет знак. В точке $x=c$ нет ни минимума, ни максимума.

Пример. Пусть $f(x) = x^3$. Тогда $f'(x) = 3x^2 = 0$ и стационарная точка $c=0$
Очевидно, знак $f'(x) = 3x^2$ вокруг точки $c=0$ не меняется, в этой точке
нет ни минимума, ни максимума

График функции $f(x)=$



- **2.2. Вычисление производных**
 - **Таблица производных**
 - **Основные правила дифференцирования**
- **Основные методы вычисления производных**

Таблица основных формул дифференцирования

- 1. $y = c, y' = 0, c$ постоянная
-
- 2. $y = x^\alpha, y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$
- 3. $y = a^x, y' = a^x \ln a; y = e^x, y' = e^x.$
- 4. $y = \log_a x, y' = \frac{1}{x \ln a}.$
- 5. $y = \sin x, y' = \cos x. \quad y = \cos x, y' = -\sin x.$
- 6. $y = \operatorname{tg} x, y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
- 7. $y = \operatorname{ctg} x, y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Основные правила дифференцирования

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x , тогда справедливы следующие *правила дифференцирования*:

1. $(cu)' = c \cdot u'$ Здесь c - постоянная
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ Производная суммы функций
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ Производная произведения функций

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ Производная частного

5. Производная сложной функции. Пусть функция $y=f(u)$, где $u=u(x)$. Тогда y есть сложная функция от x : $y=f(u(x))$, а u — промежуточный аргумент. Производная от сложной функции находят по правилу

•

• $y'(x) = \frac{dy}{dx} = y'(u) \cdot u'(x)$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Правила дифференцирования. Примеры

1. Дифференцирование произведения двух функций

$$y = e^{-x} \cdot \sqrt{x}; y' = (e^{-x})' \cdot \sqrt{x} + e^{-x} \cdot (\sqrt{x})' = (e^{-x})' \cdot x^{\frac{1}{2}} + e^{-x} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)';$$

$$y' = -e^{-x} \cdot x^{\frac{1}{2}} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right).$$

2. Дифференцирование частного двух функций

$$y = \frac{\ln x}{x^2}, y' = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \cdot \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \cdot \ln x}{x^3}.$$

Примеры дифференцирование сложной функции

Дифференцирование сложной функции производится по формуле

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = y'(u) \cdot u'(x) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Пример 1

Пусть $y = \cos^3 x$.

Обозначив $u = \cos x$, получим $y = u^3$

Тогда $y'(x) = 3u^2 \cdot u'(x)$, $u'(x) = -\sin x$

Следовательно, $y'(x) = -3 \cos^2 x \cdot \sin x$

3. Правило дифференцирования сложной функции

Пример 2

Пусть $y(x) = e^{-x}$

Обозначим $U(x) = -x$;

Тогда $y(x) = e^{-x} = e^{U(x)}$

Так как $\frac{dy}{du} = e^u = e^{-x}; \frac{du}{dx} = -1$,

то $y' = \frac{dy}{dx} = -e^{-x}$

Производные высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и имеет *первую* производную $y' = f'(x)$.

Первая производная является функцией и может быть дифференцируема, иметь производную. Производная первой производной называется *второй производной*, или *производной второго порядка* и обозначается символами

$$\bullet \quad y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{или} \quad y^{(2)}, f^{(2)}(x).$$

Производной n -го порядка функции $f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$ -го порядка:

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

Вычисление производных высших порядков. Примеры

- Найти значение третьей производной функции $y=e^{(5x+3)}$.
Вычислить ее значение в точке $x=0$.
- Вычислим сначала третью производную

$$y' = (e^{5x+3})' = 5e^{5x+3}, y'' = (e^{5x+3})'' = (5e^{5x+3})' = 25e^{5x+3}, y^{(3)} = (25e^{5x+3})' = 125e^{5x+3};$$

- Подставим $x=0$. Получим значение третьей производной в точке

$$y^{(3)}(0) = 125 \cdot e^{5 \cdot 0 + 3} = 125 \cdot e^3.$$

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции называется **выпуклым** в интервале $[a, b]$, если он **расположен выше любой своей касательной** в этом интервале.

Функции на рис.10 выпуклая на интервале, парабола $y=x^2$ (рис.12) выпуклая на всей числовой оси. Для выпуклой функции справедливо: $f''(x) > 0$

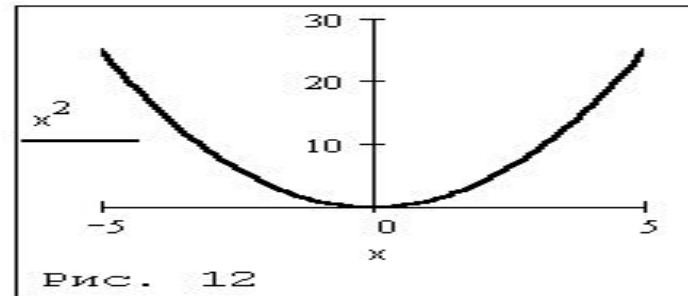
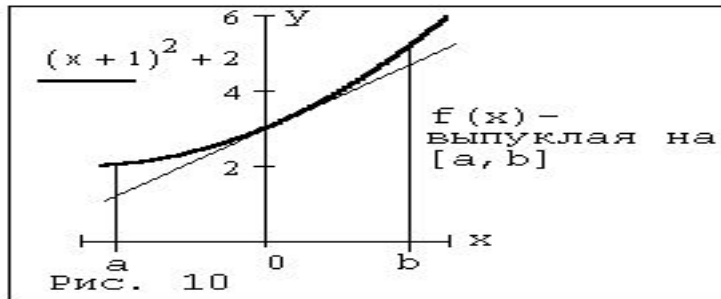
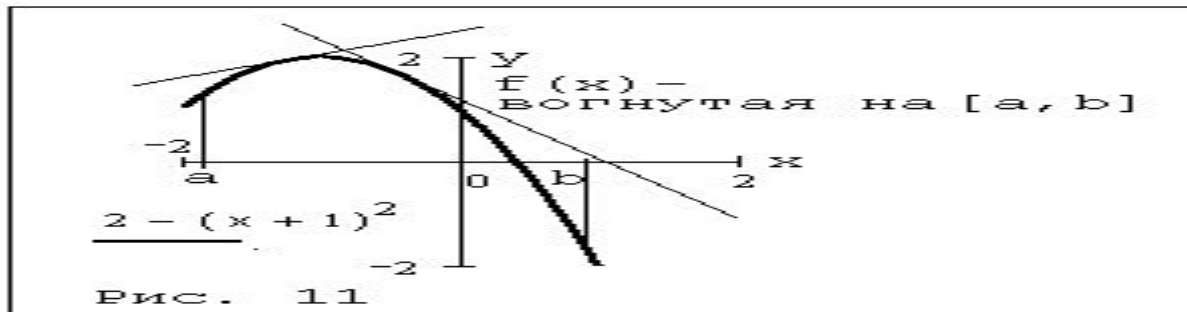
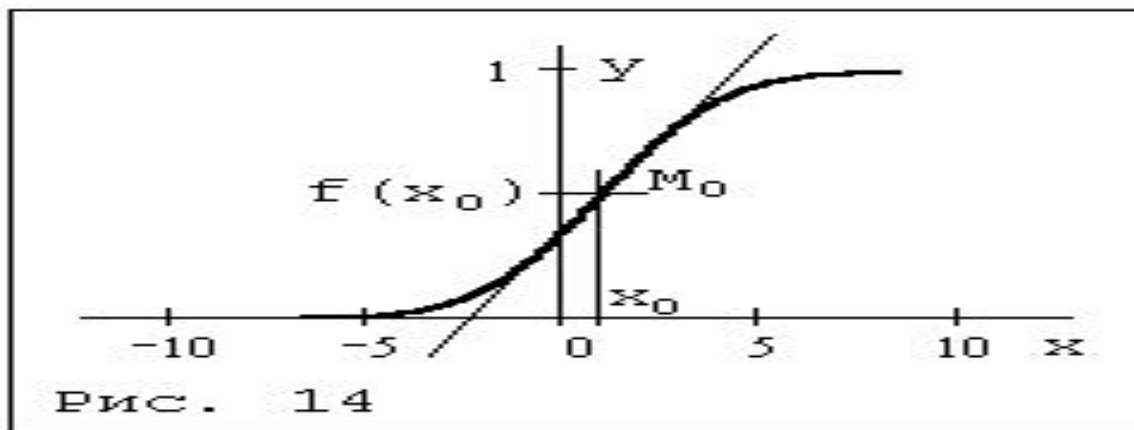


График дифференцируемой функции называется **вогнутым** в интервале $[a, b]$, если он **расположен ниже любой своей касательной** в этом интервале.

Для вогнутой функции справедливо: $f''(x) < 0$



Точка $M_0(x_0, f(x_0))$, лежащая на графике и отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется **точкой перегиба функции $y=f(x)$**



За выпуклость (вогнутость) функции "отвечает" вторая производная функции $y = f(x)$, $f''(x)$.

Точки перегиба следует искать среди тех точек, в которых:

- вторая производная $y'' = f''(x) = 0$. Это - **возможная** точка перегиба.
- если слева и справа от возможной точки перегиба вторая производная меняет знак – то это точка перегиба.

Если $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс- график изменяется от вогнутого на выпуклый, с плюса на минус – от выпуклого на вогнутый

- **2. 3. Производные и исследование функции**

Общая схема исследования

Пределы и асимптоты графика функции

Примеры решения задач

Общая схема исследования функции

- **Рекомендуемая схема исследования**
- **1. Найти область определения функции (ООФ).**
- **2. Определить точки разрыва функции, интервалы непрерывности и вертикальные асимптоты.**
- **3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.**
- **4. Исследовать пределы функции – на границах ООФ, в точках разрыва, найти уравнения асимптот.**
- **5. Найти экстремумы функции и интервалы монотонности.**
- **6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.**
- **7. Найти точки пересечения графика с осями координат.**
- **8. Построить график.**
- **9. Определить область значений (ОЗФ).**

Асимптоты графика функции

Асимптота к графику функции $y=f(x)$ – это прямая, к которой приближается точка $M(x,y)$, лежащая на графике, в данном процессе:

1. При неограниченном удалении ее от начала координат, **при устремлении точки к границам области определения**. Здесь говорят о *наклонной асимптоте $y=kx+b$* или ее частном случае – *горизонтальной асимптоте $y=b$*

Величины k и b определяют по формулам

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

2. В точках разрыва второго рода, $x_p = a$, говорят о *вертикальной асимптоте $x=a$* . Это прямая, параллельная оси Y , к которой приближается точка $M(x,y)$, лежащая на графике, при устремлении Точки к точке разрыва.

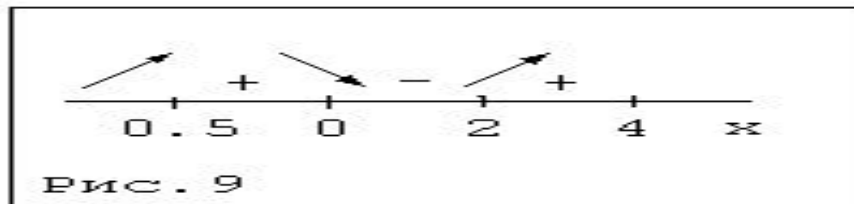
Примеры исследования функции

Пример1: Исследовать функцию $y=(x-1)(x^2-2x-2) = x^3-3x^2+2$

1. Область определения функции $(-\infty, +\infty)$.
2. Точки разрыва – нет
3. Функция общего вида
4. Пределы функции: $x \rightarrow -\infty y \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow \infty y \rightarrow \infty$ Асимптот нет
5. Точки экстремума, интервалы монотонности

Найдем стационарные точки. Для этого найдем первую производную и приравняем ее нулю

$y'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$. Стационарные точки $x=0$; $x=2$. Нанесем эти точки на числовую ось (рис.9), проанализируем знаки производной $y' = 3x(x-2)$ вокруг стационарных точек. При переходе через $x=0$ производная меняет знак с $+$ на $-$, $x=0$ – максимум; при переходе через $x=2$ производная меняет знак с $-$ на $+$, $x=2$ – минимум



Пример 1 (продолжение). Исследуемая функция $y = (x-1)(x^2-2x-2) = x^3-3x^2+2$

Пример 1 (продолжение). Исследуемая функция $y = (x-1)(x^2-2x-2) = x^3-3x^2+2$

$x=0$ — максимум; $y(0)=2$.

$x=2$ — минимум; $y(2)=-2$.
В точке $x=-0.5$ $y(-0.5)=9/8$; в точке $x=4$ $y(4)=18$.

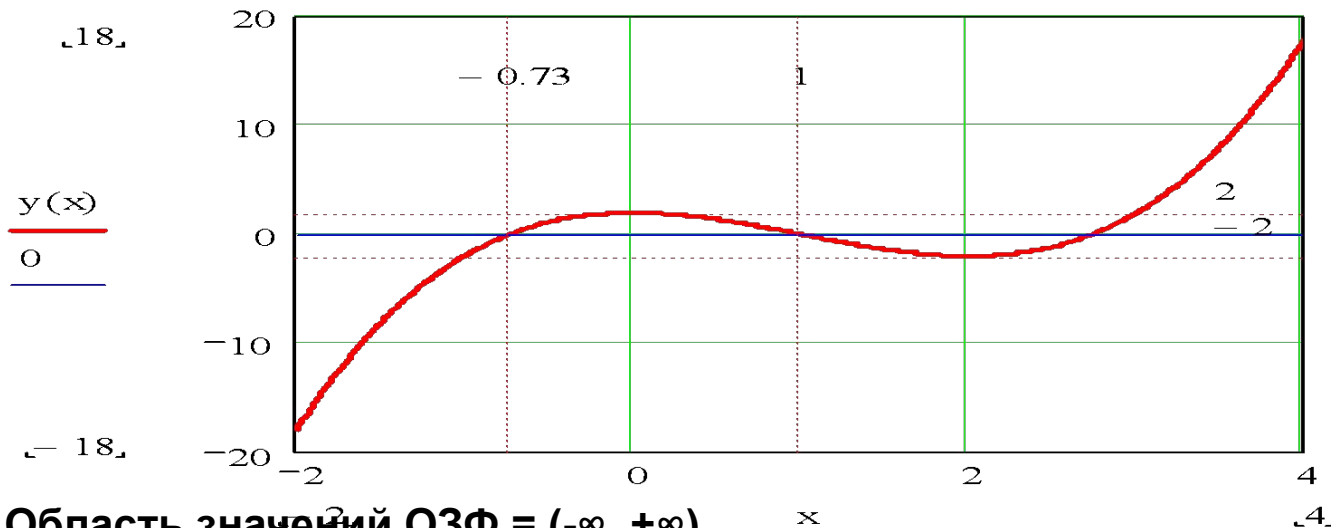
6. Точки перегиба. Определим вторую производную, приравняем

ее нулю. Получаем $y'' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6 = 0$. Точка перегиба $x=1$.

7. Найдем точки пересечения с осью x : $x_1 = -0.73$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2.73$

8. Построим качественный график

8. Построим качественный график



9. Область значений ОЗФ $= (-\infty, +\infty)$.

9. Область значений ОЗФ $= (-\infty, +\infty)$.

4. Определяем пределы:

-на границах ООФ. Совместим исследование с поиском наклонной асимптоты $y = kx + b$.

Пример 2. Исследуемая функция

$$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

1. ООФ – $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2. Точка разрыва $x_p = 1$. Интервалы непрерывности

$(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. Вертикальная асимптота $x_p = 1$

3. Функция общего вида. Не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

Определяем пределы асимптоты $y = -x + 5$

-на границах ООФ. Совместим исследование с поиском наклонной асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-x)^2}{(1-x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9-6x+x^2}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9}{x^2} - \frac{6}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = -1$$
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(3-x)^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9-6x+x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9-5x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9}{x} - 5}{\frac{1}{x} - 1} = 5.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = -x + 5$

Пример 2 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

Пределы в точке разрыва, справа $x \rightarrow 1+$, слева $x \rightarrow 1-$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(3-x)^2}{1-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(3-x)^2}{1-x} = +\infty.$$

5. Определяем экстремумы функции. Для этого найдем производную, приравняем ее нулю, посмотрим знаки производной

$$\bullet \quad y' = \frac{\left[(3-x)^2\right]' \cdot (1-x) - (1-x)' \cdot (3-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{(3-x)(1+x)}{(1-x)^2} = 0$$

Характеристические точки $x_1=3$; $x_2=-1$.

В окрестности точки $x=-1$ знак производной меняется с минуса на плюс, $x_2=-1$ – точка минимума и $y(-1)=8$.

Нетрудно убедиться, что в точке $x_1=3$ максимум, $y(3)=0$.

-
- **Пример 2 (продолжение). Исследуемая функция**

$$y = \frac{(3-x)^2}{1-x}$$

- **6. Определяем точки перегиба. Для этого находим вторую производную, приравниваем ее нулю. Точек перегиба функция не имеет, так как ее вторая производная нуля не имеет**

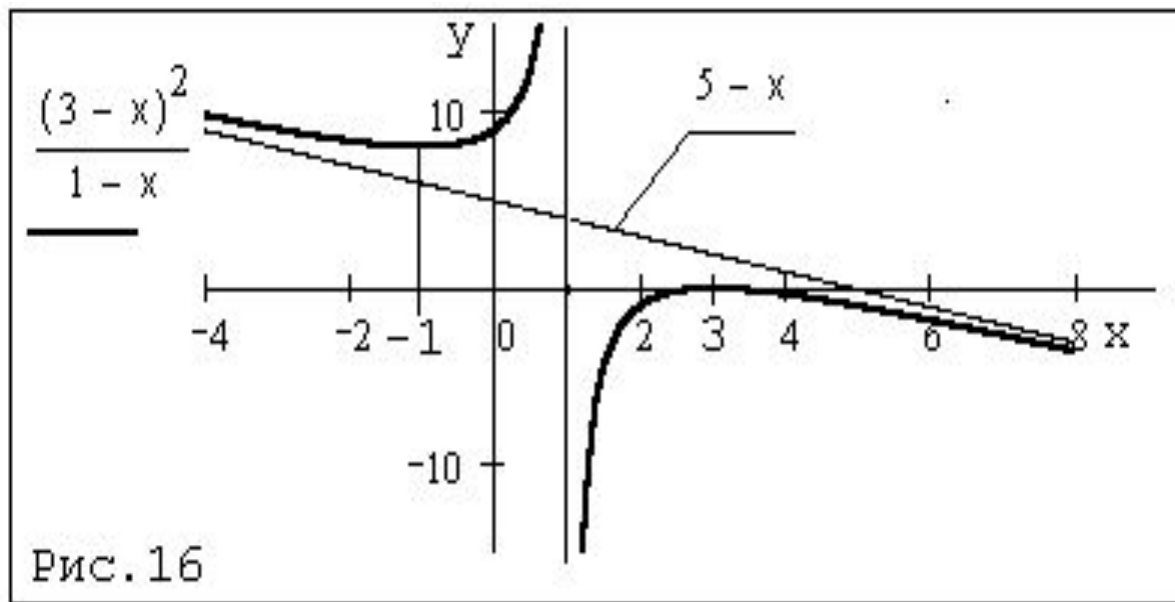
$$y'' = \left(\frac{(3-x)(1+x)}{(1-x)} \right)' = \frac{8}{(1-x)^3}.$$

-
- **На интервале $(-\infty, 1)$ вторая производная положительна, и график выпуклый. На интервале $(1, +\infty)$ вторая производная отрицательная и график — вогнутый.**

- Пример 2 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \frac{(3 - x)^2}{1 - x}$$

- 7. Точки пересечения функции с осями координат: (3,0) и (0,9)
- 8. График функции



- 9. Область значений (ОЗФ): $(-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$

Пример 3. Исследуемая функция $y = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$

- 1. ООФ – вся числовая ось, ООФ= $(-\infty, +\infty)$.
- 2. Точек разрыва нет; вертикальной асимптоты нет; интервал непрерывности $(-\infty, +\infty)$.
- 3. Функция общего вида.
- 4. Пределы на границах ООФ определяем, совместив задачу с поиском асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x \cdot \exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\exp\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)} = 0$$

- Очевидно, ось x – горизонтальная асимптота

Пример 3 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

5. Найдем экстремум функции и интервалы монотонности.

$$y' = \left[\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) \right]' = (1-x) \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right); y' = 0, x = 1$$

Стационарная точка $x=1$ является точкой *максимума* функции, так как при переходе через эту точку (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус.

$$y_{\max} = y(1) = e^0 = 1$$

Пример 3 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \mathbf{exp}\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

6. Вычислим y'' и найдем точки перегиба:

$$y'' = \left[(1-x) \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) \right]' = x \cdot (x-2) \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

Вторая производная обращается в нуль при $x=0$ и при $x=2$. В обеих этих точках происходит смена знака y'' , т.е. обе точки будут точками перегиба. Функция в этих точках равна:

$$y(0) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.62, \quad y(2) = e^{-\frac{1}{2}} = 0.62.$$

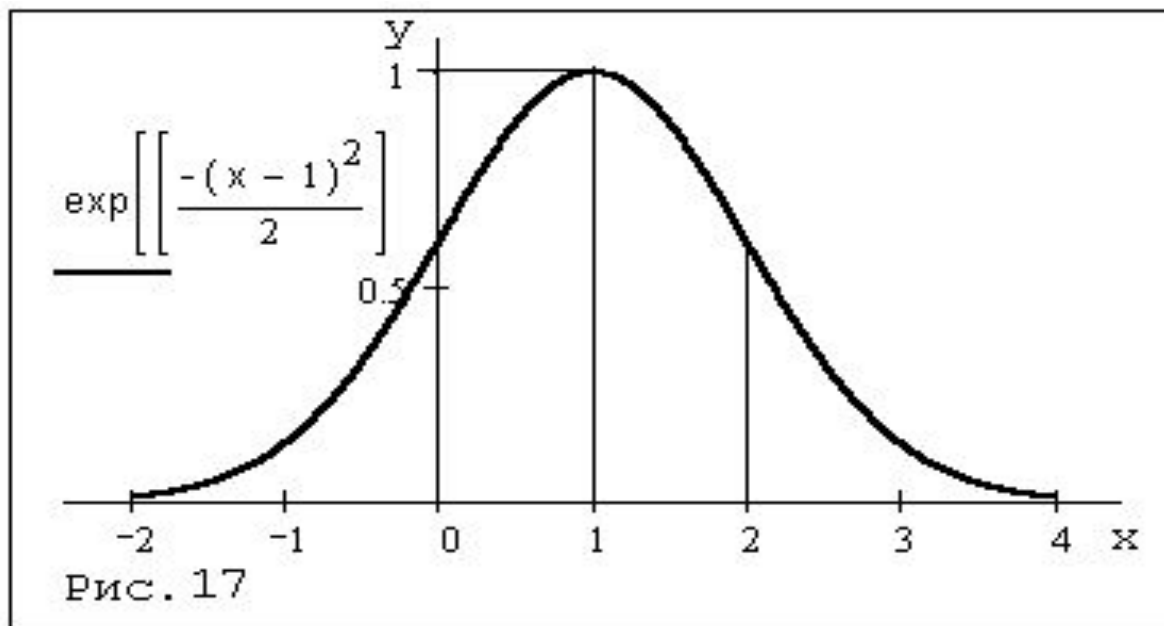
Пример 3 (продолжение). Исследуемая функция

$$y = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

7. Точка пересечения с осью $y(x=0)$: $(0, \exp(-0.5))$ или $(0, 0.606)$.

Точек пересечения функции с осью x нет.

8. График функции



9. Область значений (ОЗФ) $(0, 1]$