Лекция 14

Случайные процессы

Каноническое разложение случайных процессов. Спектральное разложение стационарного случайного процесса. Случайные процессы с независимыми сечениями. Марковские процессы и цепи Маркова. Нормальные случайные процессы. Периодически нестационарные случайные процессы

(Ахметов С.К.)

Каноническое разложение случайных процессов

Любой ***СП X(t)*** м.б. представлен в виде его разложения, т.е. в виде суммы элементарных процессов:

$$X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k \varphi_k(t)$$

V_k – случайные величины

$\varphi_k(t)$ – неслучайные функции (синусоиды, экспоненты, степенные функции и т.д)

Частный случай такого разложения-***Каноническое разложение СП X(t)***, имеющее вид

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t)$$

$m_x(t) = M[X(t)]$ – математическое ожидание ***СП X(t)***

$V_1, V_2 \ldots V_k$ – некоррелированные и центрированные СВ

$D_1, D_2 \ldots D_k$- дисперсии СВ $V_1, V_2 \ldots V_k$

$\varphi_k(t)$ – неслучайные функции аргумента t

Случайные величины V_1, $V_2 \ldots V_k$ называются коэффициентами канонического разложения,

а неслучайные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ $\varphi_k(t)$ - координатными функциями канонического разложения

Основные характеристики СП, заданного каноническим разложением

$$M[X(t)] = m_x(t) \qquad K_x(t,t') = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(t')D_k$$

M[X(t)] – математическое ожидание ***СП X(t)***

K_x(t,t') – корреляционная функция ***СП X(t)***

Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(t')D_k$ - каноническое разложение корреляционной функции

Если ***t=t'***, то в соответствие с первым свойством корреляционной функции $D_k(t) = K_x(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t)D_k$ ***D_k(t)*** – дисперсия

Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t)D_k$ каноническое разложение дисперсии ***СП X(t)***

Спектральное разложение стационарного СП

Стационарный СП м.б. представлен каноническим разложением

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(V_k \cos\omega_k t + U_k \sin\omega_k t)$$

$\boldsymbol{V_k}$ и $\boldsymbol{U_k}$ – некоррелированные и центрированные СВ с дисперсиями $\boldsymbol{D[V_k] = D[U_k] = D_k}$

$\boldsymbol{\omega}$ – неслучайная величина (частота)

В этом случае ***каноническое разложение корреляционной функции*** определяется выражением

$$K_x(t,t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k(t - t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\omega_k(\tau) = k_x(\tau)$$

Представленное ***каноническое разложение СП X(t)*** называется ***спектральным разложением СП*** и выражается в виде

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \cos(\omega_k t - \theta_k)$$

$\boldsymbol{\Theta_k}$ **-** фаза гармонического колебания элементарного стационарного СП, являющаяся СВ равномерно распределенной в интервале ***(0, 2π);***

$\boldsymbol{Z_k}$ – СВ, представляющая собой амплитуду гармонического колебания элементарного стационарного СП

Спектральное разложение стационарного СП (2)

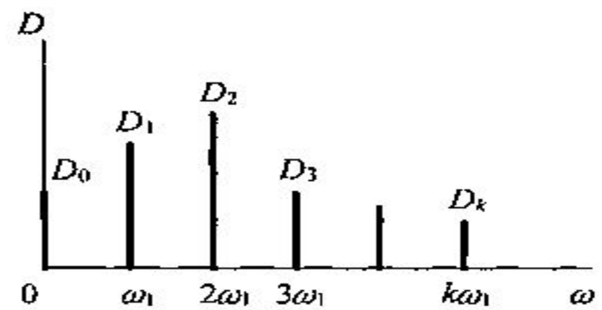
- Случайные величины Θ_k и Z_k зависимы и для них справедливо:

$$V_k = Z_k \cos \Theta_k \qquad U_k = Z_k \sin \Theta_k$$

- Стационарный **СП** м.б. представлен в виде суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами Z_k и случайными фазами Θ_k на различных неслучайных частотах ω_k
- Корреляционная функция стационарного ***СП X(t)*** является четной функцией своего аргумента, т.е. $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$. Поэтому ее на интервале (-Т, Т) можно разложить в ряд Фурье по четным (косинусам) гармоникам:

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau$$

- Дисперсия стационарного ***СП X(t)*** равна сумме дисперсий всех гармоник его спектрального разложения



Зависимость $D_k = f(w_k)$ называется дискретным спектром дисперсий или дискретным спектром стационарного СП.

Спектральное разложение стационарного СП (3)

При $\Delta\omega \to 0$ произойдет переход к непрерывному спектру

$$S(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{D_k}{\Delta\omega} \qquad k_x(\tau) = \int_0^\infty S_x(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau$$

***$S_x(\omega)$* -** спектральная плотность

Таким образом, корреляционная функция и спектральная плотность связаны косинус – преобразованием Фурье. Следовательно, спектральная плотность стационарного СП м.б. выражена через корреляционную функцию формулой

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k_x(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau$$

Случайные процессы с независимыми сечениями

- В гидрологии считается, что ряд соответствует модели случайной величины, если отсутствует значимая корреляция между членами этого ряда при любом сдвиге ***τ*.**

- ***Случайный процесс с независимыми сечениями*** – это СП, для которого при значениях ***t*** и ***t'***

$$m_x(t) = m_x \qquad D_x(t) = D_x \qquad K_x(t,t') = k_x(\tau) = \{D_x \text{ при } \tau = 0 \text{ и } 0 \text{ при } \tau \neq 0\}$$

- Такой процесс является стационарным и обладает эргодическим свойством
- Для таких процессов характеристики одномерного закона распределения можно оценить как по любому сечению, так и по любой (достаточно продолжительной) реализации
- У таких процессов отсутствует корреляция между членами внутри любой реализации
- Принимая такую модель, допускается, что ряд гидрологических величин представляет собой одну реализацию СП
- Случайный процесс с независимыми сечениями иногда называют ***«белым шумом»*** по аналогии с белым светом

Марковские процессы и цепи Маркова

- ***Случайный процесс*** называется ***марковским***, если для любого момента времени t вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от ее состояния в прошлом (при $t < t_0$)

- ***Марковской цепью или простой марковской цепью*** называется марковский процесс с дискретным состоянием и дискретным временем

- ***Марковский СП*** полностью описывается двумерным законом распределения. Если Марковский процесс является стационарным и эргодическим, то его характеристики можно оценить по одной реализации.

- Цепь, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят от ее состояния на нескольких предыдущих шагах, называется ***сложной цепью Маркова.***

Нормальные (Гауссовские) случайные процессы

- ***Нормальным (гауссовским) случайным процессом X(t)*** называется СП, у которого во всех сечениях СВ $X(t_i)$ имеет нормальное распределение

Периодически нестационарные СП

- При изучении годовых, месячных, суточных и т.д. процессов, обычно, наблюдаются внутригодовые и т.д. колебания. В этом случае, в качестве математической модели можно использовать ***модель периодически нестационарного случайного процесса (ПНСП)***

- Случайный процесс называют периодически нестационарным, если его вероятностные характеристики инварианты относительно сдвигов на положительное число ***T.*** Например, при шаге дискретности один месяц инвариантность должна сохраняться при сдвигах 12, 24, 36 и т.д.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!