ЛЕКЦИЯ 2 Функция одной переменной. Предел функции в точке и непрерывность функции. Точки разрыва.

ПЛАН

1. **Функция. Способы задания. Основные элементарные функции. Сложная функция**
2. **Предел функции в точке и на бесконечности**
3. **Правый и левый пределы функции**
4. **Непрерывность функции в точке и на множестве. Классификация точек разрыва**

Понятие функции

Если каждому x из множества $\{x\}$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число y, то говорят, что на множестве $\{x\}$ задана функция $y = f(x)$.

x – независимая переменная, *аргумент* функции; y – *зависимая переменная*.

Множество $\{x\}$ - *множество определения* функции, множество $\{y\}$ - *множество её значений*.

Рассмотрим примеры функций:

1. $y = x^2$. Эта функция задана на всей числовой оси 0X, т.е. $(-\infty < x < \infty)$.

Множество её значений $\{y\}$ – полупрямая $0 \le y < \infty$.

$$2.\ y = sign x = \begin{cases} +1 & \text{если} \quad x > 0 \\ 0 & \text{если} \quad x = 0 \\ -1 & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

sign происходит от латинского слова signum- знак.

Эта функция задана на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, а множество её значений $\{y\} = \{-1;0;1\}$.

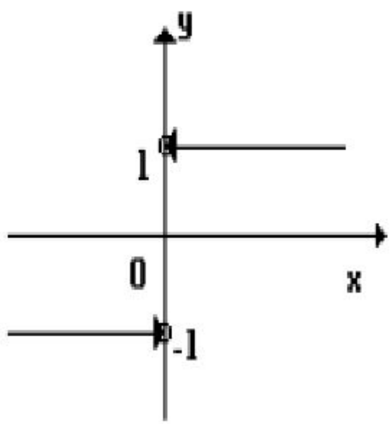
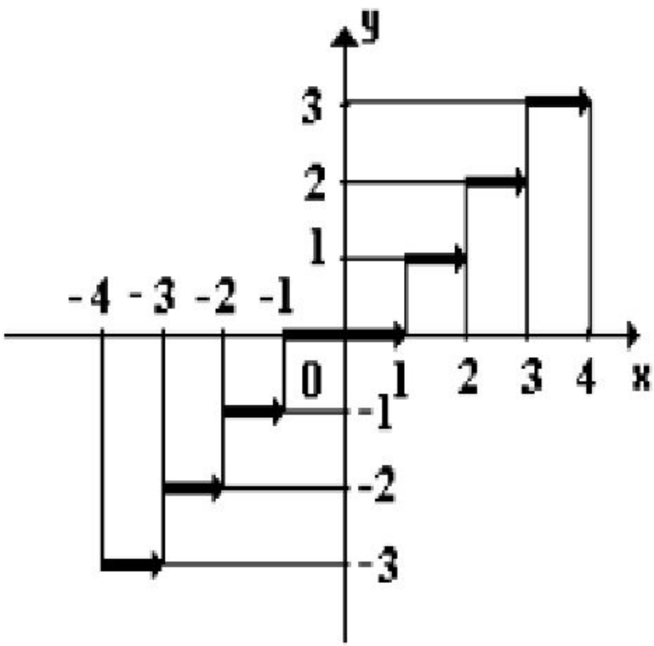


Рис 1. График функции $y = sign x$

3. $y = [x]$,где [x] обозначает целую часть вещественного числа: «y равно антье x» (от французского слова entier целый).

Это функция задана для любого x, принимает значения целых положительных и отрицательных чисел. Построим график этой функции.



4. Модуль действительного числа x

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

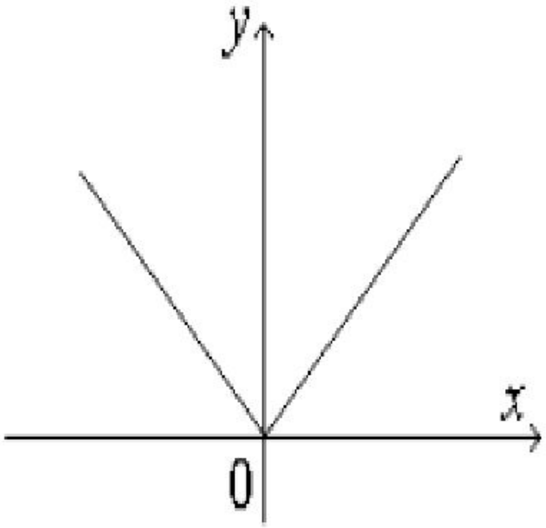


Рис. 3. График модуля действительного числа

Способы задания

1. *Аналитический способ* задания

Функция $y = f(x)$ задана аналитическим уравнением связи между переменными x и y.

Такой вид уравнения называется явным уравнением.

Функция может быть задана аналитическим неявным уравнением $F(x_1,y) = 0$.

Например,

1. $y = \sin x$ - явное аналитическое уравнение;

2. $x^2 + y^2 = a^2$ - неявное аналитическое уравнение.

2. *Табличный способ* задания

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Довольно распространённый способ задания функции, устанавливающий зависимость между переменной x и y. На практике часто неизвестна аналитическая связь между x и y. Если необходимо найти значение y для x, не входящего в таблицу, то используется метод интерполяции, заключающийся в замене функции между её табличными значениями какой-либо простой, легко вычисляемой функцией, например, линейной или квадратной.

3. *Графический способ* задания

В практике физических измерений используется графический способ задания. Связь между переменными x и y задается посредством графика. Например, кривая, снятая на осциллографе.

Основные элементарные функции

Основными элементарными функциями называют следующие функции:

1. $y=x^n$ – степенная функция
2. $y=a^x$ – показательная функция
3. $y=log_a x$ – логарифмическая функция
4. $y=signx$
5. $y=cosx$
6. $y=tgx$
7. $y=ctgx$

– тригонометрические функции

8. $y=arcsinx$
9. $y=arccosx$
10. $y=arctgx$
11. $y=arcctgx$

– обратные тригонометрические функции

Все эти функции подробно изучены и исследованы в школьном курсе элементарной математики.

Бесконечное множество функций получено из элементарных при помощи четырех действий математики, а также при помощи принципа *суперпозиции*.

Сложная функция

При помощи принципа суперпозиции получают *сложные* функции.

Если на множестве {x} задана функция $y = f(x)$, а точка x также является функцией $x = \varphi(t)$, заданной на множестве $\{t\}$, то на множестве $\{t\}$ задана *сложная* функция $y = f[\varphi(t)]$.

В этом состоит принцип суперпозиции. Суперпозиций может быть сколь угодно много.

Рассмотрим примеры:

1. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ -рациональная функция;

2. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ - сложная функция;

3. $y = e^{arctgx}$ - сложная функция;

4. y=*lnlnlnx* – сложная функция;

2. Предел функции в точке и на бесконечности

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на $\{x\}$, и точку *a*, быть может, и не принадлежащую множеству $\{x\}$, но обладающую тем свойством, что любая ε – окрестность точки a принадлежит множеству $\{x\}$. Например, точка a может быть границей интервала, на котором задана функция.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ аргументов *x*, элементы X_n которой отличны от *a*, соответствующая последовательность её значений $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к b. Принято записывать:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad (1)$$

Существует второе определение предела функции. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$, сколь угодно малого, найдется отвечающее ему $\delta > 0$, *такое,* что для всех значений аргумента *x*, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Замечание 1. В первом определении особенно важно, что элементы $\{x_n\}$ отличны от a, а во втором определении $|x-a|<\delta$, $\delta>0$ означает, что $y=f(x)$ не определена в точке $x=a$, но при этом может иметь предельное значение в точке $x=a$. Рассмотрим пример.

Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Точка $x=1$ не входит в область определения $y=f(x)$. Нетрудно видеть, что $f(x)=x+1$, $x\neq 1$.

Конечного значения $y=f(x)$ в точке $x=1$ не имеет, но для $\varepsilon>0$, сколь угодно малого, для всех значений *arg x*, попадающих в δ- окрестность точки $x=1$, соответствующие значения *f(x)* попадают в ε – окрестность точки *y=2*. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

Замечание 2. Можно перефразировать второе определение следующим образом: Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, сколь угодно малого, можно указать такую δ - окрестность точки a, что число b приближает значение $y = f(x)$ с точностью до ε.

Замечание 3. $f(x)$ может иметь только один предел, равный b.

Правый и левый пределы функции

Введем следующие важные понятия:

Число b называется *правым* (*левым*) пределом $y = f(x)$ в точке $x=a$, если для $\varepsilon>0$, сколь угодно малого, найдется отвечающее ему $\delta>0$, что для всех значений $arg\ x$, удовлетворяющих условию $a< x <a+\delta$ ($a-\delta < x <a$) справедливо $|f(x)-b|<\delta$.

Для обозначения правого предела принято

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \qquad (2)$$

левого предела

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b. \qquad (3)$$

Для функции $y = sign x$ в точке $x=0$ функция $y = f(x)$ имеет левый и правые пределы: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1;\quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1.$

Замечание 4. Если в точке $x=a$ функция $y=f(x)$ имеет правый и левые пределы, и они равны, то $y=f(x)$ имеет конечное предельное значение в точке $x=a$.

Число b называется пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности $x\to\infty$, если для любой бесконечно большой последовательности её <u>*arg* $\{x_n\}$.</u> соответствующая последовательность её значений $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

При этом принято обозначать:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \qquad (4)$$

Приведем примеры:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ действительно на рисунке видно, что для всех $X\to\infty$ соответствующие значения $f(x)\to 0$. При $x\to-\infty$ $y=f(x)$ также имеет предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Непрерывность функции в точке и на множестве Классификация точек разрыва

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке x=a*, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \qquad (5)$$

Все точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва.*

Если функция $y=f(x)$ обладает свойством неопределенности в каждой точке некоторого множества $\{x\}$, то говорят, что она *непрерывна на множестве.*

Рассмотрим важные типы точек разрыва.

1. Точки разрыва первого рода.

1.1. Точки устранимого разрыва I рода.

Точка $x = a$ называется точкой *устранимого разрыва I рода,* если функция $y = f(x)$ справа и слева от точки $x = a$ имеет конечные и равные предельные значения т.е. $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b.$

Рассмотрим пример. Пусть $y = f(x)$ задана графически (см. рис. 4), при этом $f(a)$ не определено, т.е. $x = a$ является точкой разрыва.

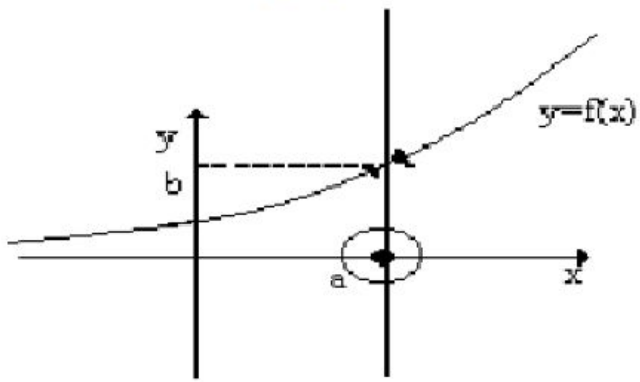


Рис. 4. Иллюстрация к примеру.

Т.к. $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b.$, то точка $x = a$ является точкой устранимого разрыва, т.к. функцию можно задать следующим образом:

$$y = \begin{cases} f(x) & при \quad x \neq a \\ b & при \quad x = a \end{cases}$$

Вводя предельное значение в область определения функции, устраним разрыв.

1.2. Точки неустранимого разрыва I рода.

Точка $x = a$ является точкой *неустранимого разрыва I рода*, если справа и слева от точки $x = a$ существуют конечные предельные значения функции, но они не равны, т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$, $b_1 \neq b_2$.

Рассмотрим пример. Пусть $y = f(x)$ задана графически и в точке $x = a$ не имеет конечного значения $f(a)$. На рисунке 5 видно, что $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ и $b_1 \neq b_2$. В точке $x = a$ функция делает «скачок». Точка $x = a$ является точкой неустранимого разрыва I рода.

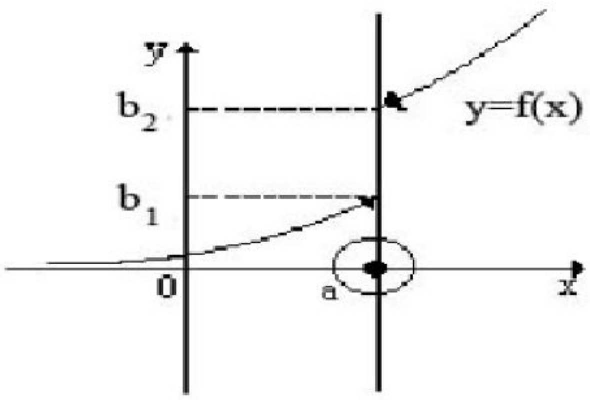


Рис. 5. Иллюстрация к примеру.

2. Точки разрыва II рода.

Точка $x = a$ является *точкой разрыва II рода,* если в этой точке функция не имеет, по крайней мере, одного из односторонних предельных значений или хотя бы одно из односторонних предельных значений бесконечно.

Упрощенно говоря, что все точки разрыва, которые не являются точками разрыва I рода, являются точками разрыва II рода.

Рассмотрим примеры функций, представленных графически (рис. 6, рис. 7):

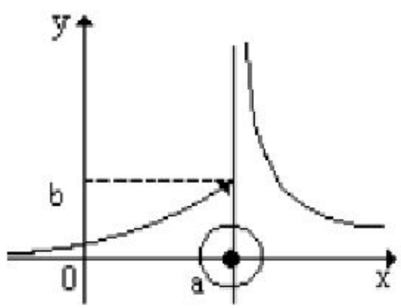


Рис. 6.

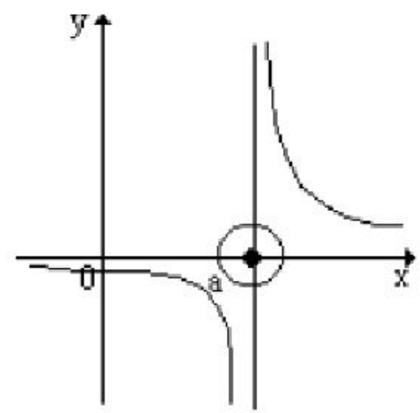


Рис. 7.

Точка $x=a$ на рисунках – *точка разрыва* II *рода.*