ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

- 1. Похідна функції
- 2 Правила диференціювання
- 3. Диференціал функції
- 4.Похідні та диференціали вищих порядків
- 5. Застосування похідної
-

1. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку X і точка $x_0 \in X$. Надамо аргументу функції приросту Δx ($\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$) такого, щоб точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція дістане при цьому приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Означення Відношення приросту функції до приросту аргументу називається ***середньою швидкістю зміни функції*** (rate of change of function).

Це відношення показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

Означення Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її ***похідною*** (derivative) і позначається одним із символів:

$$f'(x_0),\quad y'(x_0),\quad \frac{d f(x_0)}{dx}.$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 існує, то функція називається ***диференційовною*** (differentiable function) *в точці* x_0.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого проміжку X, то вона називається ***диференційовною*** *на проміжку* X.

Операція відшукання похідної називається ***диференціюванням***.

Геометричний зміст похідної (geometric sense of derivative)

Похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту *дотичної* (tangent line) до графіка даної функції у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = tg\,\alpha, \qquad (2)$$

де α -кут, якій утворює дотична τ з додатнім напрямком осі Ox (рис. 1).

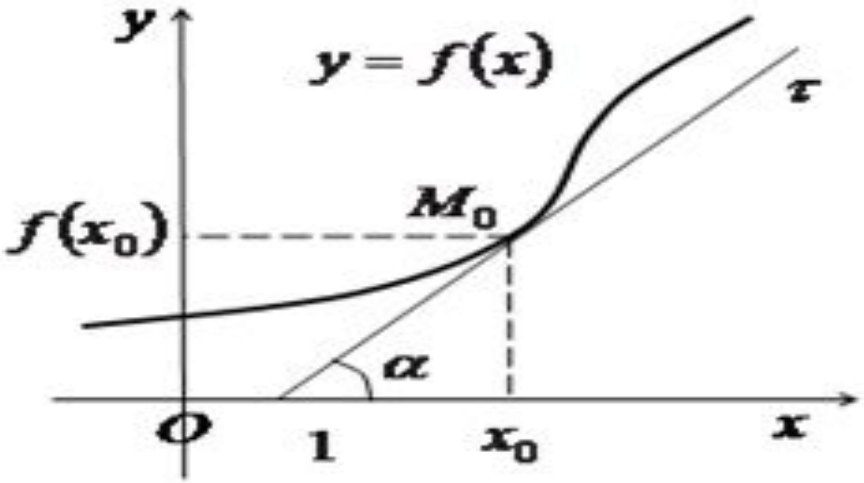

Рис. 1

Зв'язок між диференційовністю функції та її неперервністю

Теорема Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x = x_0$, то вона неперервна в цій точці.

На основі геометрічного змісту похідної ***рівняння дотичної до графіка функції*** $y = f(x)$ записується таким чином:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Якщо неперервна функція в точці x_0 має нескінченну похідну, тоді дотичною до графіка функції в точці $M_0(x_0; y_0)$ буде пряма $x = x_0$.

Для ***нормалі***, тобто прямої, що проходить через точку дотику $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно до дотичної (пряма M_0N), рівняння має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

У випадку $f'(x_0) = 0$ нормаллю буде пряма $x = x_0$; якщо функція в точці x_0 має нескінченну похідну, тоді нормаллю до кривої буде пряма $y = f(x_0)$.

Фізичний зміст похідної

Під фізичним змістом похідної розуміють швидкість зміни функції в даній точці. Наприклад:

1) при русі тіла швидкість v в даний момент часу t є похідною від шляху $s(t)$: $v = \frac{ds}{dt}$;

2) при обертовому русі твердого тіла навколо осі $0x$ кутова швидкість ω в даний момент часу t є похідною від кута повороту $\phi(t)$: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$;

3) при охолодженні тіла швидкість охолодження в момент часу t є похідною від температури $\frac{dT}{dt}$;

4) теплоємність C для даної температури t є похідною від кількості тепла Q: $C = \frac{dQ}{dt}$;

5) при нагріванні стержня коефіцієнт лінійного розширення α при даному значенні температури t є похідною від довжини l: $\alpha = \frac{dl}{dt}$.

2. Правила диференціювання (Table of Derivative Rule)

Теорема Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці x, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1) $\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x)+v'(x)$ - (Sum Rule);

2) $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$ - (Product Rule);

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$, при $v(x)\neq 0$ - (Quotient Rule).

Зауваження. Сталий множник при диференціюванні виноситься за знак похідної (ConstantMultiple Rule), тобто:

$\left(c\cdot u(x)\right)' = c\cdot u'(x)$, де $c = const$.

Похідна складної функції (Chain Rule)

Нехай функція $y = f(u)$ визначена в деякому околі точки u і функція $u = \varphi(x)$ визначена в деякому околі точки x, таким чином визначена складна функція $y = f[\varphi(x)]$.

Теорема Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці x, причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x), \qquad (3)$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (3^*)$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \cos^5 3x$.

Розв'язання. Приймаючи $y = u^5, \quad u = \cos 3x$, маємо:

$$y' = \left(u^5\right)' (\cos 3x)' = 5u^4 ((-\sin 3x) \cdot 3) = 5\cos^4 3x \cdot (-3\sin 3x) = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

Тут враховано, що $u = \cos 3x$ також складена функція і тому за формулою (3) вона має похідну $u' = -3\sin 3x$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

(Table of Derivative Formulas)

1) $(const)' = 0$;

2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, ($\forall n \in N$, або $\forall n \in R$ при $x > 0$);

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, ($\forall a > 0, a \neq 1$);

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, ($(\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0$);

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ($\forall x > 0$);

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$);

10) $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(x \neq \pi k, \quad k \in Z)$;

11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$;

12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$;

13) $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

15) $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$;

16) $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$;

17) $(\mathrm{th}\,x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

18) $(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $(x \neq 0)$.