Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Институт права и национальной безопасности
Факультет таможенного дела

Раздел 2 тема № 6

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Лекция №1

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2016

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Понятие производной функции
2. Основные правила дифференцирования
3. Дифференциал функции
4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Литература

1. «Высшая математика для экономического бакалав-риата: Учебник и практикум» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: "Юрайт", 2016.
2. «Математика для экономистов от арифметики до эконометрики: базовый курс» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: "Юрайт", 2016.
3. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. «Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов» - М.: ООО «Издательство Астрель», 2011.

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Понятие производной функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X ($x \in X$) или $O(x,\varepsilon)$. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (при условии, что этот предел существует):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Замечание.

Можно доказать, что и для любого (не только натурального n):

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Геометрический смысл производной

На графике функции f выбирается абсцисса x_0 и вычисляется соответствующая ордината $f(x_0)$.

В окрестности точки x_0 выбирается произвольная точка x. Через указанные точки на графике функции f проводится *секущая* (*светло-серая линия* C_5).

Расстояние $\Delta x = x - x_0$ устремляется к нулю, в результате *секущая* переходит в ***касательную*** (*постепенно темнеющие линии* $C_5 - C_1$), если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha$.

Уравнение касательной к графику в точке (x_0, y_0):

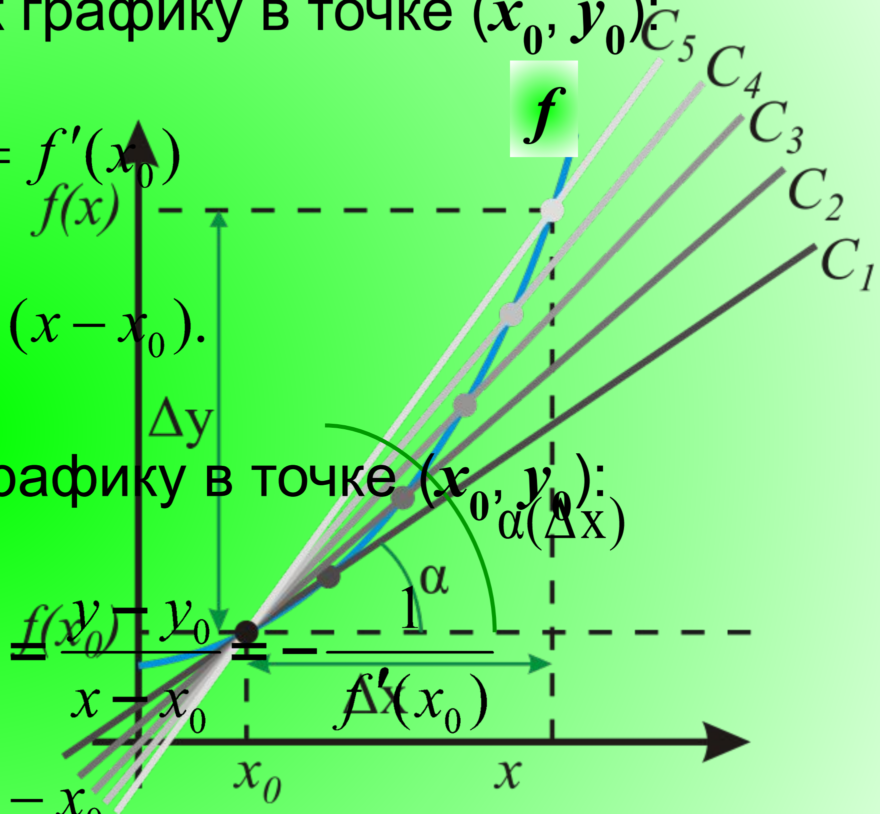
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Уравнение нормали к графику в точке (x_0, y_0):

$$\operatorname{tg}\alpha_н = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha_н = \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y - y_0 = -1\cdot\frac{x - x_0}{f'(x_0)}.$$



Тангенс угла α ***наклона этой касательной*** – и есть ***производная функции*** f ***в точке*** x_0.

Определение.

Правой (**левой**) **производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x_0, называется правый (левый) предел отношения $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует):

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \left(f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0, производную, то она имеет в этой точке правую и левую производные, которые совпадают.

Замечание.

Обратное утверждение неверно.

Пример.

Функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ правую и левую производные:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \,(\text{при } \; x \geq 0 \;\; \Delta y = \Delta x), \;\; f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \,(\text{при } \; x \leq 0 \;\; \Delta y = -\Delta x),$$

но не имеет в этой точке производной, т.к. не имеет предела.

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** x_0 – $f \in D(x_0)$, если ее приращение Δy в этой точке можно представит в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A - некоторое число, не зависящее от Δx;

$\alpha(\Delta x)$ - функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$,т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$

*Установим связь между **дифференцируемостью функции** в точке и **существованием производной** в той же точке.*

Определение.

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой в этой точке***.

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема.

Если функция $y = f(x)$ ***дифференцируема*** в точке x_0, то она и ***непрерывна*** в этой точке.

Замечание.

Обратное утверждение неверно.

Пример.

Функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке производной, т.е. не является дифференцируемой.

Определение.

Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке X, то функцию называют ***гладкой*** (***непрерывно дифференцируемой***) на этом промежутке и пишут: $f \in C^{(1)}(X)$.

ВТОРОЙ ВОПРОС

Основные правила дифференцирования

Правила дифференцирования

Пусть c – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции:

1. *Производная постоянной* равна нулю: $c' = 0.$

2. *Производная аргумента* равна единице: $x' = 1.$

3. *Производная алгебраической суммы* конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме из производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

4. *Производная произведения* двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Правила дифференцирования

Следствие 1. ***Постоянный множитель*** можно выносить за знак производной:

$$(\lambda \cdot u)' = \lambda' \cdot u + \lambda \cdot u' = \lambda \cdot u'.$$

Следствие 2. ***Производная произведения нескольких дифференцируемых функций*** равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

5. ***Производная частного*** двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (\text{при условии, что } v \neq 0).$$

Правила дифференцирования

Пример.

Найти производную функции $f(x)$ и вычислить ее значение в точке $x = 1$:

а) $y = x^3(\sqrt[4]{x}+1)$

$$y' = (x^3)'(x^{\frac{1}{4}}+1) + x^3(x^{\frac{1}{4}}+1)' = 3x^2(x^{\frac{1}{4}}+1) + x^3(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+0) = x^2(\frac{13}{4}\sqrt[4]{x}+1).$$

Значение производной в точке x = 1 есть: $\boxed{y'(1) = 1\cdot(\frac{13}{4}\cdot 1+1) = 4{,}25.}$

б) $y = \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{(x^3-1)'\sqrt{x} - (x^3-1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{3x^2\sqrt{x} - (x^3-1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{5x^3+1}{2x\sqrt{x}}.$$

$\boxed{y'(1) = 3.}$

Правила дифференцирования

6. Если $y=f(u)$ и $u=g(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то ***производная сложной функции*** существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную самого промежуточного аргумента u по независимой переменной x, т.е.

$$y' = f'(u)\cdot u'.$$

Пример. Найти производную $y = (\sqrt{x}+5)^3$.

Решение.

$$y = u^3\ (u = \sqrt{x}+5) \Rightarrow y' = 3u^2\cdot u' = 3(\sqrt{x}+5)^2(\sqrt{x}+5)' = \frac{3(\sqrt{x}+5)^2}{2\sqrt{x}}.$$

7. Если $y=f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на промежутке X, то тогда ***функция*** $x=g(y)$, ***обратная к данной,*** также дифференцируема ***и ее производная*** определяется соотношением:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}, \qquad y'_x \neq 0.$$

Таблица производных некоторых функций

Функция f(x)	*Производная f'(x)*	*Функция f(x)*	*Производная f'(x)*	*Функция f(x)*	*Производная f'(x)*
c	0	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример. Найти производную функции $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Решение.

Представим функцию в виде $y = e^u$, где $u = \operatorname{arctg} x$.

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x) = e^u \cdot \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'(x) = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Правила дифференцирования

8. *Производная неявной функции*.

Если зависимость между x и y задана в неявной форме уравнением $F(x,y) = 0$, то для нахождения производной функции y необходимо продифференцировать по x обе части данного уравнения, рассматривая y как функцию от x.

Из полученного уравнения находится y'.

Пример.

Найти производную функции $x^2 - xy + \ln y - 2 = 0$, заданной неявно, и вычислить ее значение в точке (2;1).

Решение.

Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получаем:

$$2x - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0, \text{ откуда } y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}.$$

Значение производной при $x = 2$, $y = 1$ – $y'(2) = 3$.

Правила дифференцирования

9. Дифференцирование ***параметрически заданной функции.***

Если функция $y = f(x)$ аргумента x задана параметрически уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ определенны и дифференцируемы на некотором промежутке T, причем $x'(t) \neq 0\ \forall t \in T$, а для $x = x(t)$ существует обратная $t = t(x)$, определенная и дифференцируемая на $X = x(T)$, то:

$$y = y[t(x)] \text{ и } \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример.

Найти производную от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a \sin t\,; \\ y = b \cos t\,. \end{cases}$$

Решение.

Последовательно дифференцируя функцию, получаем:

$$y'_x = \frac{(b \cos t)'_t}{(a \sin t)'_t} = -\frac{b \sin t}{a \cos t} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} t\,.$$

Правила дифференцирования

10. ***Производные высших порядков***.

Понятие производной произвольного порядка задается рекуррентно.

а) Полагаем $f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0)$.

б) Если функция $f(x)$ дифференцируема в x_0, то производная первого порядка определяется соотношением $f^{(1)}(x_0) \equiv f'(x_0)$.

в) Пусть теперь производная n-го порядка определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема.

Тогда производной $(n+1)$ - ***порядка называется производная от производной*** n-го ***порядка***: $f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$.

Пример.

Найти производную 4-го порядка от функции $y = \sin 2x$.

Решение.

Последовательно дифференцируя функцию, получим:

$$y' = 2\cos 2x\ ;\ y'' = -4\sin 2x\ ;\ y''' = -8\cos 2x\ ;\ y^{(4)} = 16\sin 2x\ .$$

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Дифференциал функции

Определение.

Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** x – $f \in D(x)$, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A - некоторое число, не зависящее от Δx;

$\alpha(\Delta x)$ - функция аргумента Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$

Определение.

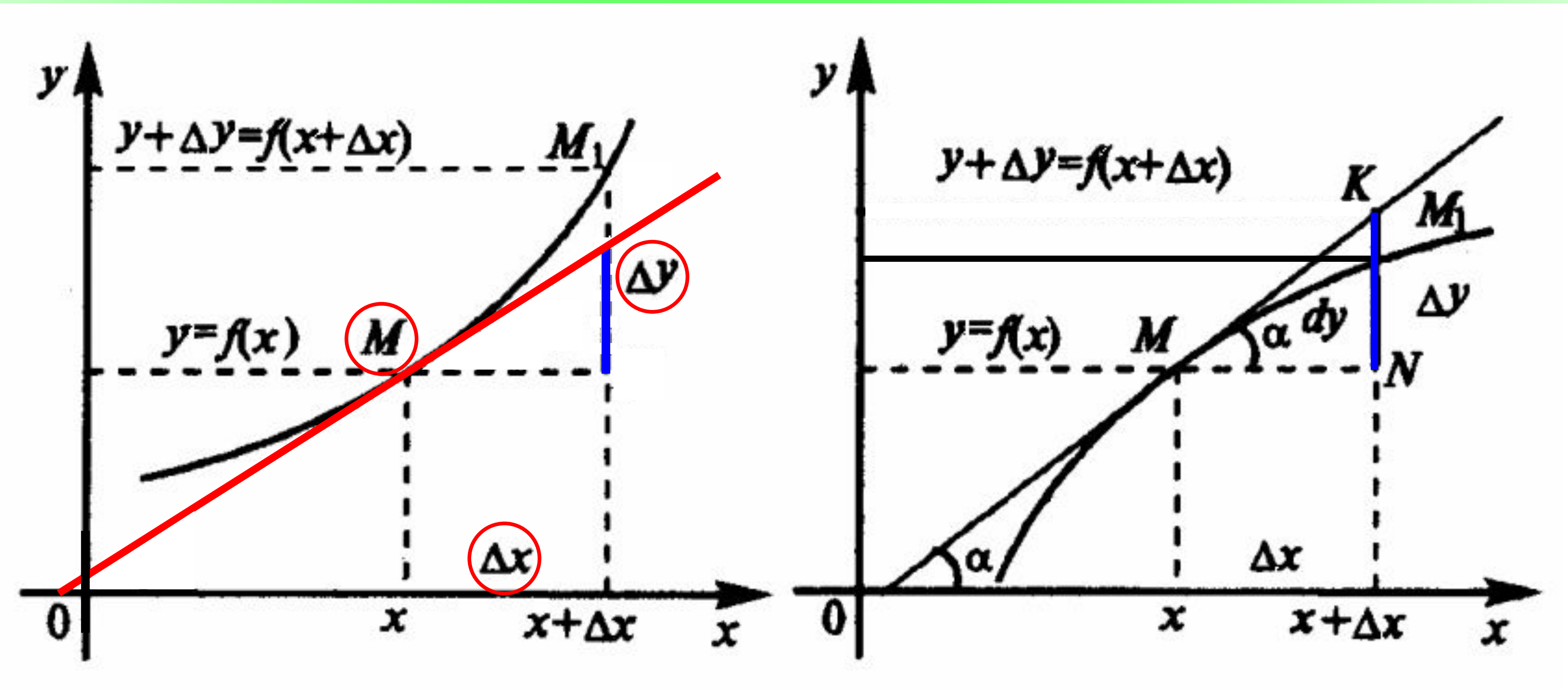
Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная линейная относительно Δx часть приращения Δy, равная произведению производной на приращение Δx независимой переменной:

$$dy = A \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x.$$

Замечание.

Кроме того, $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{dy}{dx}.$

Геометрический смысл дифференциала



$KN = MN \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \Delta x\,\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x)\Delta x$ $\Rightarrow$ $dy = KN$

Дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение Δx.

Свойства дифференциала

1. ***Дифференциал постоянной*** равен нулю: $dc = 0.$

2. ***Постоянный множитель*** можно выносить за знак дифференциала: $d(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot du.$

3. ***Дифференциал алгебраической суммы*** конечного числа дифференцируемых функций равен такой же сумме дифференциалов:

$$d\,(u \pm v) = du \pm dv.$$

4. ***Дифференциал произведения*** двух дифференцируемых функций равен произведению дифференциалу первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на дифференциал второго:

$$d\,(u \cdot v) = d\,u \cdot v + u \cdot dv.$$

5. ***Дифференциал частного*** двух дифференцируемых функций может быть найден по формуле:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим $y = f(u)$ и $u = g(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, тогда для $f(g(x))$ – сложной функции дифференциал равен

$$dy = f'(x)dx = f'(u)g'(x)dx = f'(u)du.$$

*Формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной **x** рассматривать функцию от зависимой переменной **u**.*

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом n-го порядка $d^n y$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n$-1)-го порядка этой функции:

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx = [f''(x)dx]dx = f''(x)(dx)^2;$$

$$\ldots$$

$$d^n y = d(d^{(n-1)}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Использование дифференциала в приближенных вычислениях

Из определения дифференциала следует, что

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x$$

с погрешностью $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$.

Если положить $x = a + \Delta x$, то $\Delta x = x - a$ и $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$

Таким образом, для значений x, близких к a, функция $f(x)$ заменена линейной функцией (или ***линеаризована в окрестности точки*** a).

Геометрически это соответствует замене участка кривой графика $y = f(x)$ около точки $(a, f(a))$ ***отрезком касательной*** к кривой в этой точке.

Погрешность подобной замены приближенно равна половине второго дифференциала функции – $1/2\ d^2f = 1/2\ f''(a)(x - a)^2$.

Пример.

При $a = 0$ $f(x) \approx f(0) + f'(0)x \Rightarrow \sin x \approx x,\ \ln(1 + x) \approx x,\ e^x \approx 1 + x.$

ЧЕТВЕРТЫЙ ВОПРОС

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема (**Ферма**).

Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная данной функции в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.

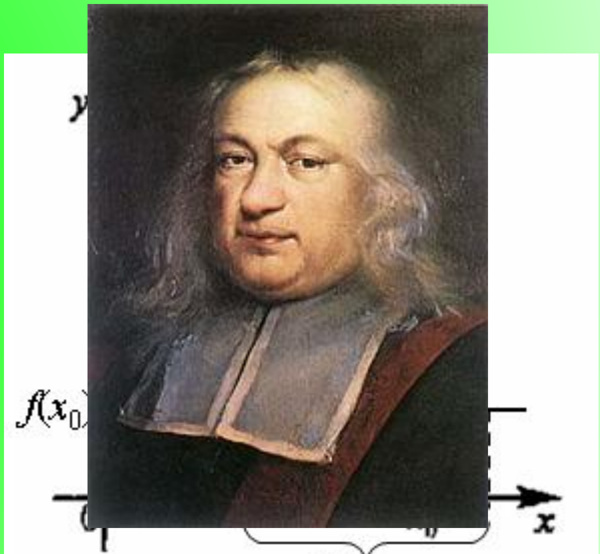
Пусть $y = f(x)$ достигает наименьшего значения в точке x_0:

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'_{\text{л}}(x_0) \leq 0$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

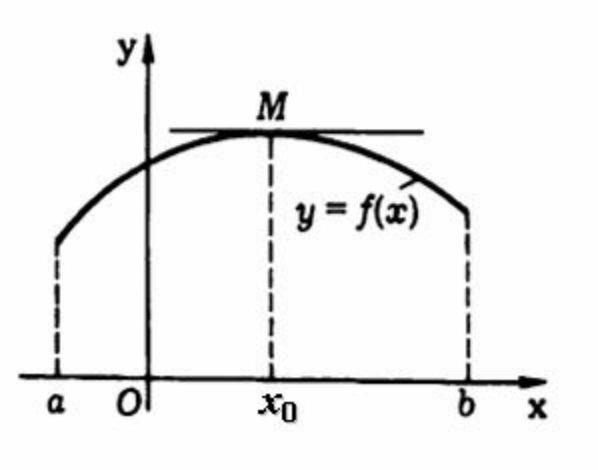
$$\lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'_{\text{п}}(x_0) \geq 0$$



Пьер де Ферма

$$\boxed{\begin{gathered} f'(x_0) = f'_{\text{л}}(x_0) = f'_{\text{п}}(x_0) \\ f'(x_0) = 0 \end{gathered}}$$

Геометрический смысл теоремы Ферма



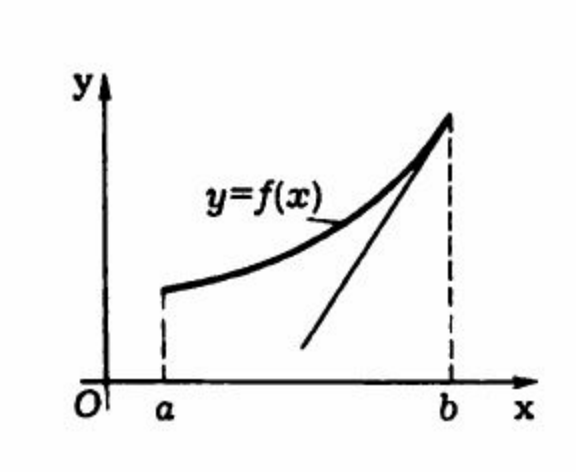
В точке наибольшего (наименьшего) значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Замечание.

При доказательстве теоремы **Ферма** существенно использование того, что x_0 есть ***внутренняя точка промежутка***.

Это позволило рассматривать точки x, лежащие как справа, так и слева от x_0.

Без этого предположения утверждение теоремы может оказаться неверным.



Теорема (**Ролля**).

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b);

3) на концах отрезка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции равна нулю:

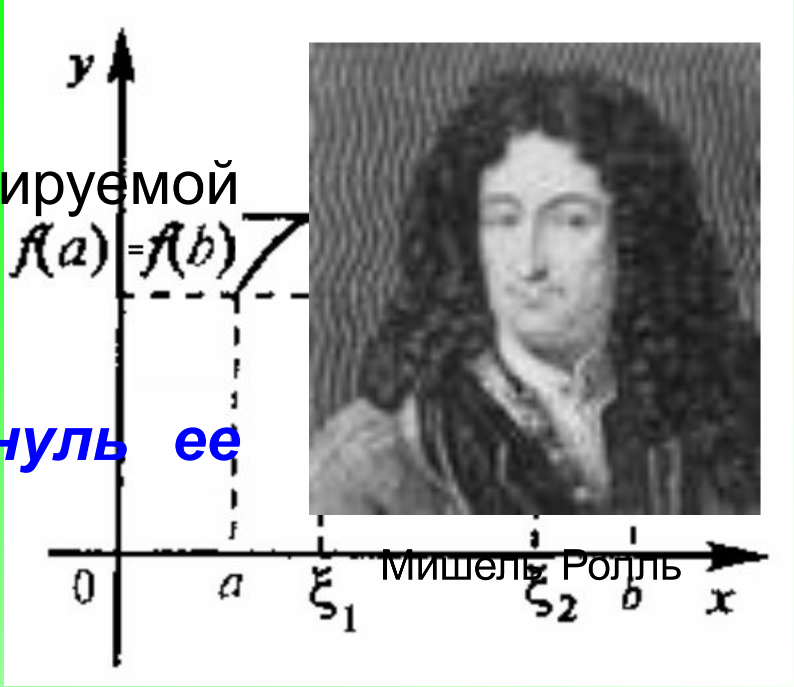
$$f'(\xi) = 0.$$

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если ординаты непрерывной кривой на концах отрезка $[a, b]$ равны между собой и кривая в каждой внутренней точке этого отрезка имеет невертикальную касательную, то *на кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси* Ox.

Следствие.

Между двумя нулями дифференцируемой функции — $f(a) = f(b) = 0$, ***всегда лежит хотя бы один нуль ее производной***.



Мишель Ролль

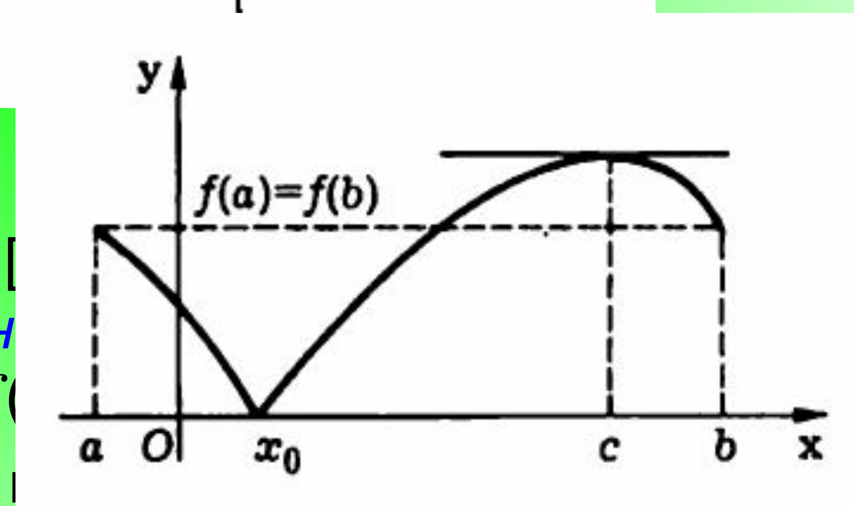
Замечание.

Теорема **Ролля** носит лишь **достаточный характер**, т.е. если все условия теоремы выполнены, то ее утверждение верно, но *если нарушено хотя бы одно ее условие, то нельзя сказать что-либо определенное о существовании точки, в которой производная рассматриваемой функции обращалась бы в нуль.*

Пример.

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на концах отрезка имеет равные значения, но не является дифференцируемой во внутренней точке x_0 этого отрезка.

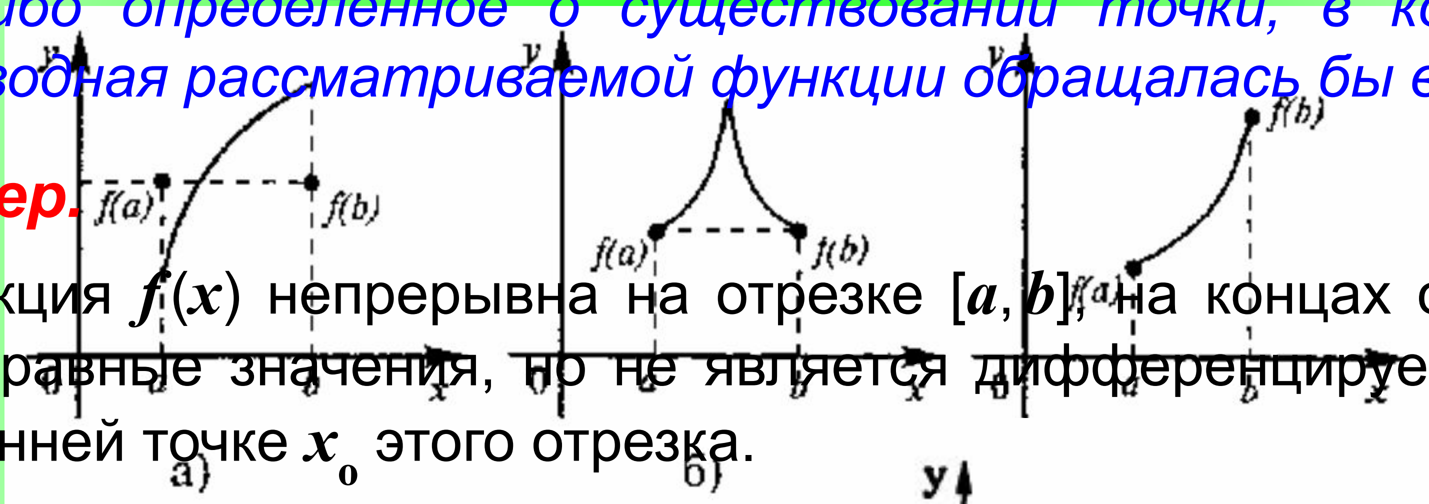
Тем не менее существует точка $x = c$, в которой $f'(c) = 0$, т.к. касательная в соответствующей точке кривой графика этой функции параллельна оси Ox.



Замечание.

Все условия теоремы **Ролля** *существенны для справедливости ее утверждения.*

Пример.



Нарушены условия:

а) *непрерывности на отрезке* [

б) *дифференцируемости на ин*

в) *равенства значений* $f(a) = f($

Поэтому не существует $\xi \in (a, b)$,

Теорема (**Лагранжа**).

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

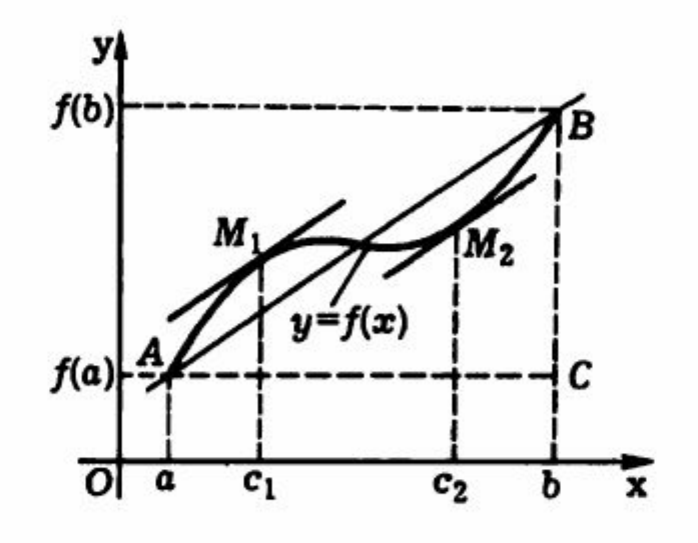
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{или} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

На непрерывном участке AB графика функции $y = f(x)$, имеющей в каждой точке невертикальную касательную, *всегда найдется по крайней мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде* AB.

Следствие.

Если функция $y = f(x)$ непрерывн
отрезке $[a, b]$ и во всех его внутре
точках имеет равную нулю производ
то эта функция постоянна на указа
отрезке.



Жозеф Луи Лагранж

***Теорема* Ролля – *частный случай теоремы* Лагранжа, *так как при* $f(a) = f(b)$ *хорда* AB *параллельна оси* Ox.**

Теорема (**Коши**).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) непрерывны на отрезке $[a,b]$;

2) дифференцируемы в интервале (a,b);

3) производная $g'(x)$ не обращается в нуль в интервале (a,b).

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Замечание.

Теорема **Лагранжа** носит лишь ***достаточный х***… е. если все условия теоремы выполнены, то ее утверж… о, но *если нарушено хотя бы одно ее условие, то не… ль что-либо определенное о существовании точки …ой выполнялось бы указанное равенство.*

Огюстен Луи Коши

Пример.

На рисунке изображены графики функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$, но не дифференцируемых во внутренней точке x_0.

График **а**) не имеет точки, в которой касательная параллельна хорде $АБ$, а у графика **б**) такая точка (M) существует.

Замечание.

„*Элементарное*" доказательство теоремы **Коши** путем двукратного применения к функциям $f(x)$ и $g(x)$ формулы **Лагранжа** в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \text{ и } g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$$

с последующим делением соответствующих частей этих равенств и сокращением на $(b - a) \neq 0$ ***некорректно***.

Замечание (правило Бернулли – Лопиталя).

При использовании правила **Бернулли – Лопиталя** для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ предполагается, что исходные функции $f(x)$ и $g(x)$ сами могут быть бесконечно малыми или бесконечно большими функциями при $x \to A$, где A – конечная или бесконечно удаленная точка числовой прямой.

Предел отношения двух *бесконечно малых* или *бесконечно больших функций* равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Правило Лопиталя можно применять также и для раскрытия неопределенностей вида $[0\cdot\infty]$ и $[\infty-\infty]$. Для этого произведение $f(x)\cdot g(x)$ следует записать в виде:

$$\frac{f(x)}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]} \quad \text{или} \quad \frac{g(x)}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]},$$

чем получить неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Если для $f'(x)$ и $g'(x)$ выполнены условия одной из указанных ..., то правило **Бернулли – Лопиталя** можно применять ...

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило ... Бернулли ... используется ... неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ ...

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} = L.$$

В том случае, когда вторые и более высокого порядка производные исходных функций удовлетворяют указанным выше условиям, ... можно применять последовательно ...

Если имеется неопределенность вида $[0^0]$ или $[\infty^0]$ при вычислении предела функции $f(x)^{g(x)}$, то логарифм этой функции представляет собой неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

При этом используется соотношение (полученное на основе свойств логарифмов и непрерывности показательной функции):

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)\ln f(x)}.$$

Гийом Франсуа маркиз де Лопиталь

Пример.

Пример.

Найти

Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

Имеется неопределенность вида [0/0], следовательно можно применить **правило Лопиталя**

Решение.

Имеется неопределенность вида [∞/∞], и поэтому применим **правило Лопиталя**:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2+x}+x}{\ln(2+x)}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{2+x}+x\right)'}{\left(\ln(2+x)\right)'}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}+1}{\frac{1}{2+x}}=\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4^x-3^x}{x^2}.$

Решение.

Имеется неопределенн… …ельно можно применить **правило Лопит…**

Однако легко видеть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x\ln 4-3^x\ln\ldots}{2x}\ldots .$$

Благодарю за внимание, лекция окончена!