

**Решение краевых задач  
для обыкновенных дифференциальных  
уравнений второго порядка**

# Краевые задачи для ОДУ второго порядка

$y(x)$        $y''(x)$       дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & a < x < b \\ y(a) = y_a, & x = a \\ y(b) = y_b, & x = b \end{cases}$$

линейное неоднородное ОДУ  
2-го порядка

Принципиальным отличием краевой задачи от задачи Коши для ОДУ является задание дополнительных (краевых или граничных) условий более чем в одной точке независимой переменной (в задаче Коши дополнительные условия задаются в одной точке, называемой начальной).

Если на границах  $x = a$  и  $x = b$  заданы значения искомой функции  $y(a)$ ,  $y(b)$ , то такие условия называются **граничными условиями первого рода**, а задача называется **первой** краевой задачей для ОДУ.

# Краевые задачи для ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} y'(a) = y_a \\ y'(b) = y_b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{граничные условия 2 рода} \\ \text{Вторая краевая задача} \end{array}$$

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее первой производной:

$$\begin{cases} y'(a) + \alpha y(a) = y_a \\ y'(b) + \beta y(b) = y_b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{граничные условия 3 рода} \\ \text{Третья краевая задача} \end{array}$$

Чаще всего на разных границах задаются граничные условия различных родов. Такие задачи называют краевыми **задачами со смешанными краевыми условиями**.

# Конечно-разностный метод

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0 \dots n\}$$

конечно-разностная сетка с шагом  $h$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = 1 \boxtimes n-1$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1 \boxtimes n-1$$

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad i = 1 \boxtimes n-1$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i + O(h^2), \quad i = 1 \boxtimes n-1$$

$$y_0 = y_a, \quad i = 0$$

$$y_n = y_b, \quad i = n$$

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 1 \boxtimes n-1 \quad \text{СЛАУ с трехдиагональной матрицей:}$$

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} \quad b_i = -\frac{2}{h^2} + q_i \quad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h} \quad d_i = f_i$$



# Схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + y_0' h + y_0'' \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$y_0'' = f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0$$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} (f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0) + O(h^2)$$

$$y_0' = \frac{2}{2 - p_0 h} \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2 - p_0 h} (f_0 - q_0 y_0) + O(h^2)$$

# Схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные

$$y'(a) + \alpha y(a) = y_a$$

$$\frac{2}{2 - p_0 h} \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2 - p_0 h} (f_0 - q_0 y_0) + \alpha y_0 = y_a + O(h^2)$$

$$b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0$$

$$b_0 = -\frac{2}{h(2 - p_0 h)} + \frac{q_0 h}{2 - p_0 h} + \alpha \quad c_0 = \frac{2}{h(2 - p_0 h)} \quad d_0 = y_a + \frac{h f_0}{2 - p_0 h}$$

$$y'(b) + \beta y(b) = y_b$$

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n = d_n$$

$$a_n = -\frac{2}{h(2 + p_n h)} \quad b_n = \frac{2}{h(2 + p_n h)} - \frac{q_n h}{2 + p_n h} + \beta \quad d_n = y_b - \frac{h f_n}{2 + p_n h}$$

Система из  $n+1$  уравнения с трехдиагональной матрицей  
Можно применять метод прогонки