Модуль 1. Тема 1

Преобразование Фурье

ПЛАН

1. Обобщенный ряд Фурье
2. Тригонометрический ряд Фурье
3. Понятие о спектре периодической функции
4. Преобразование Фурье для непериодических функций. Интеграл Фурье
5. Основные математические свойства преобразования Фурье
6. Теорема отсчетов
7. Дискретное преобразование Фурье
8. Свойства дискретного преобразования Фурье
9. Быстрое преобразование Фурье
10. Сходимость ряда Фурье. Эффект Гиббса. Сглаживание высокочастотных пульсаций. Сигма-факторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поршнев С.В., Беленкова И.В., Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005, – 464 с.
2. Зверев В.А., Стромков А.А., Выделение сигналов из помех численными методами. - Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2001, - 188 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004, - 640 с.
4. Ханова А.А., Макарова И.Г., Лабораторный практикум по математическому моделированию и методам в расчетах на ЭВМ. – Интернет-ресурс: http://exponenta.ru/educat/systemat/hanova/lab/lr.asp

Обобщенный ряд Фурье для периодической функции

$$s(t) = s(t + mT)$$

Периодическая функция с периодом T

$$(h,g) = \int_0^T h(t)\boxed{g^*(t)}dt$$

Скалярное произведение

Комплексное сопряжение

Ортонормированный базис

$$\{u_n(t)\}_{n=0\ldots\infty}$$

Система функций

$$\int_0^T u_n u_k^* dt = (u_n, u_k) = \delta_{n,k}, \;\; n = 0 \ldots \infty, \;\; k = 0 \ldots \infty$$

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 0, n \neq k \\ 1, n = k \end{cases}$$

Условие взаимной ортогональности

Условие нормировки

Разложение периодических функций в обобщенный ряд Фурье

$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t)$ - ***обобщенный ряд Фурье*** для периодической функции $s(t)$

Рассмотрим скалярное произведение функции и базисной функции:

$$(s,u_n)=\int_0^T s(t)u_n^*(t)dt=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^T u_i(t)u_n^*(t)dt=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \delta_{i,n}=c_n$$

В результате имеем выражение для коэффициентов ряда :

$$c_n=\int_0^T s(t)u_n^*(t)dt=(s,u_n)$$

Тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), n = 1,\ldots\infty$$

Тригонометрический базис

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)\right]$$

Тригонометрический ряд Фурье

Условия разложимости периодической функции в ряд Фурье

1. Функция должна быть ***абсолютно интегрируема***, т.е. должен существовать интеграл

$$\int_0^T |s(t)|dt < \infty$$

2. Функция должна иметь только конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в пределах одного периода
3. Функция не должна иметь разрывов второго рода

Тригонометрический ряд Фурье

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)dt, \quad a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\cos(2\pi nt/T)dt, \quad n = 1,\ldots,\infty \\ \qquad\qquad\qquad b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\sin(2\pi nt/T)dt \end{cases}$$

коэффициенты Фурье

Тригонометрический ряд Фурье

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)dt, \quad a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\cos(2\pi nt/T)dt, \quad n = 1, \ldots, \infty \\ \qquad\qquad b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\sin(2\pi nt/T)dt \end{cases}$$

коэффициенты Фурье

Вывод выражений для коэффициентов Фурье

$$c_n = \left(s(t), \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi nt/T) \right) = \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T s(t)\cos(2\pi nt/T)dt$$

Скалярное произведение с базисной функцией

$$c_n\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi nt/T) = \left(\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(2\pi nt/T)dt \right)\cos(2\pi nt/T) = \boxed{a_n\cos(2\pi nt/T)}$$

Слагаемое ряда Фурье

Остальные выражения получаются аналогично

Частоты гармоник ряда Фурье

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

основная частота – циклическая частота, соответствующая периоду функции

$$\omega_n = n\omega$$

частота гармоники с номером n

$$s(t) = \boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

ряд Фурье

Постоянная составляющая ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$$

постоянная составляющая = среднее значение функции за период

$$n = 0, \quad \omega_0 = 0$$

Четные и нечетные функции

$s(t) = s(t + mT)$ Периодическая функция с периодом T

Любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы четной и нечетной на интервале $[-T/2, T/2]$ функции

$s(t) = E(t) + O(t)$ $E(t) = \big(s(t) + s(-t)\big)/2$ $O(t) = \big(s(t) - s(-t)\big)/2$

Ряд Фурье

$$s(t) = \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)} + \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)} = E(t) + O(t)$$

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

Четная функция

$$O(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Нечетная функция

Равенство Парсеваля для ряда Фурье

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

ряд Фурье

Равенство Парсеваля

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2\, dt = \frac{1}{T}\big(s(t), s(t)\big) = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}]}$$

Равенство Парсеваля связывает
энергию сигнала во временной области
с коэффициентами Фурье

Амплитуды и фазы гармоник

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) =$$

гармоника ряда Фурье

$$= \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}} \sin(n\omega t) \right) = \boxed{A_n} \cos(n\omega t + \boxed{\varphi_n})$$

амплитуда и фаза гармоники

Связь с коэффициентами Фурье

$$\boxed{\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \sin(\varphi_n) = -\dfrac{b_n}{A_n}, \quad \cos(\varphi_n) = \dfrac{a_n}{A_n} \end{cases}}$$

Эквивалентная форма ряда Фурье

$$\boxed{s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

Ряд Фурье по комплексным экспонентам

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\Downarrow$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(in\omega t + i\varphi_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-in\omega t - i\varphi_n) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t + i\varphi_n) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} \exp(i\omega_{-n} t + i\varphi_{-n})$$

$$\Downarrow$$

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t + i\varphi_n)$$

Ряд Фурье по комплексным экспонентам

$$s(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t + i\varphi_n)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$$

$$C_n = \frac{1}{2} A_n \exp(i\varphi_n), \;\; n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad\qquad C_0 = \frac{a_0}{2}$$

Соотношения для вещественной периодической функции

$$\begin{cases} \omega_{-n} = -\omega_n = -\omega n \\ A_{-n} = A_n \\ \varphi_{-n} = -\varphi_n \\ C_{-n} = C_n^* \end{cases}$$

Ряд Фурье по комплексным экспонентам

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$$

ряд Фурье

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\exp(-in\omega t)\,dt$$

формула для расчета ***комплексной амплитуды*** гармоники

Замечание. Отрицательная частота является не физическим, а математическим понятием, вытекающим из способа представления комплексных чисел

Преобразование Фурье для непериодических функций

Непериодическая функция может рассматриваться как функция с бесконечно большим периодом => нужен предельный переход $T \to \infty$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\exp(-in\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_{\boxed{-T/2}}^{\boxed{T/2}} s(t)\exp(-in\omega t)dt$$

комплексная амплитуда гармоники

$$\delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \omega = \frac{2\pi}{T} \to 0$$

Расстояние между соседними отсчетами в частотной области

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega n t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{G(\omega_n)} \exp(i\omega_n t)\delta\omega$$

ряд Фурье

$$\boxed{G(\omega_n)} = C_n T = 2\pi\frac{C_n}{\delta\omega} = \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-i\omega_n t)dt$$

новая функция

Преобразование Фурье. Интеграл Фурье

$$\boxed{T \to \infty, \quad \delta\omega \to 0}$$

$$G(\omega_n) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} s(t)\exp(-i\omega_n t)dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{G(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\exp(-i\omega t)dt}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n)\exp(i\omega_n t)\delta\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\exp(i\omega t)d\omega}$$

Здесь частоту нельзя определить, как величину, обратную периоду.

Частотой теперь будем называть новую непрерывную независимую переменную, которая появилась в формулах для интеграла Фурье

Интеграл Фурье

$$G(\omega) = \Phi\left[s(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\exp(-i\omega t)\,dt$$

Прямое преобразование Фурье

$$s(t) = \Phi^{-1}\left[G(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega$$

Обратное преобразование Фурье

$G(\omega)$ - ***Фурье-образ*** или ***частотный спектр*** функции $s(t)$

$G(\omega),\ s(t)$ - ***функции, сопряженные по Фурье***

Условия существования интеграла Фурье

1. Функция должна быть ***абсолютно интегрируема***, т.е. должен существовать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,dt < \infty$$

2. Функция должна иметь только конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в пределах любого отрезка конечных размеров

3. Функция не должна иметь разрывов второго рода

Для функций, которые не удовлетворяют условиям существования, часто можно найти имеющее смысл преобразование, если эти функции удается определить как предел последовательности функций, поддающихся преобразованию Фурье. Преобразуя каждый член определяющей последовательности, мы получаем соответствующую последовательность Фурье-образов, предел которой называется обобщенным Фурье-образом исходной функции.

Основные свойства преобразования Фурье

1. Взаимная однозначность

$$\Phi^{-1}\left[\Phi\left[s(t)\right]\right] = s(t)$$

$$\Phi\left[\Phi^{-1}\left[G(\omega)\right]\right] = G(\omega)$$

2. Линейность

$$\Phi\left[\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)\right] = \alpha\Phi[s_1(t)] + \beta\Phi[s_2(t)]$$

3. Теорема смещения

$$\Phi\left[s(t)\exp(i\omega_0 t)\right] = G(\omega - \omega_0)$$

$$\Phi^{-1}\left[G(\omega)\exp(i\omega t_0)\right] = s(t - t_0)$$

Основные свойства преобразования Фурье

4. Теорема о свертке

$$c(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t') s_2(t - t') dt'$$ - свертка функций $s_1(t),\ s_2(t)$

Прямая теорема: преобразование Фурье от свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье от этих функций

$$\Phi\left[s_1(t) \otimes s_2(t)\right] = \Phi[s_1(t)]\Phi[s_2(t)]$$

Обратная теорема: преобразование Фурье от произведения функций равно свертке их преобразований Фурье

$$\Phi\left[s_1(t) s_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\Phi[s_1(t)] \otimes \Phi[s_2(t)]$$

Основные свойства преобразования Фурье

5. Теорема Парсеваля для интеграла Фурье

$$G(\omega) = \Phi\left[s(t)\right]$$

Фурье-образ функции $s(t)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|s(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|G(\omega)\right|^2 d\omega,}$$

Равенство Парсеваля

$$\boxed{S(\omega) = \left|G(\omega)\right|^2}$$

Спектральная плотность энергии детерминированного сигнала $s(t)$

Характеризует распределение энергии по частотам

Основные свойства преобразования Фурье

6. Дельта-функция и функция Хевисайда

$$\Phi\left[\delta(t)\right] = 1$$

Дельта-функция

$$\delta(t) = \Phi^{-1}\left[1\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega t)\,d\omega$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Функция Хевисайда (ступенька)

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(t')\,dt'$$

Теорема отсчетов

1935 г. В.А. Котельников; 1945 г. Клод Шенон; 1915 г. Уиттекер

Функция с ограниченным спектром **-** функция, спектр которой по модулю обращается в нуль на всех частотах, начиная с частоты ω_g:

$$\Phi[s(t)] = G(\omega) = 0, \ \forall\omega : |\omega| > \omega_g$$

Непрерывная функция, имеющая ограниченный спектр, может быть представлена в ***любой*** точке на основании ***своих значений, взятых в дискретных точках отсчета***. При этом на период колебаний на ***граничной*** частоте должно приходиться ***не менее двух*** точек отсчета:

$$\Delta t \le \frac{T_g}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega_g} = \frac{\pi}{\omega_g}$$

- расстояние между точками отсчета

Доказательство теоремы отсчетов

$$G(\omega) = \widetilde{G}(\omega)\Pi(\omega_g + \omega)\Pi(\omega_g - \omega)$$

ограничение ширины спектра выделили явно

$$\widetilde{G}(\omega) = G(\omega), \quad -\omega_g \le \omega \le \omega_g$$

новая функция

$$\widetilde{G}(\omega + 2\omega_g m) = \widetilde{G}(\omega)$$

доопределили функцию как периодическую

$$s(t) = \Phi^{-1}\left[\widetilde{G}(\omega)\Pi(\omega_g + \omega)\Pi(\omega_g - \omega)\right]$$

применили обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \Phi^{-1}\left[\widetilde{G}(\omega)\right] \otimes \Phi^{-1}\left[\Pi(\omega_g + \omega)\Pi(\omega_g - \omega)\right]$$

применили обратную теорему о свертке

$$\Phi^{-1}\left[\Pi(\omega_g + \omega)\Pi(\omega_g - \omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_g}^{\omega_g} \exp(i\omega t)\,d\omega = \frac{2\omega_g \sin(\omega_g t)}{2\pi\omega_g t}.$$

Доказательство теоремы отсчетов. Ряд Котельникова. Число степеней свободы функции

$$\Phi^{-1}\left[\widetilde{G}(\omega)\right] = \frac{2\pi}{2\omega_g} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k)\delta(t - t_k)$$

$$t_k = \frac{2\pi}{2\omega_g} k, \quad k \in Z$$

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k) \frac{\sin\left(\omega_g [t - t_k]\right)}{\omega_g [t - t_k]}}$$

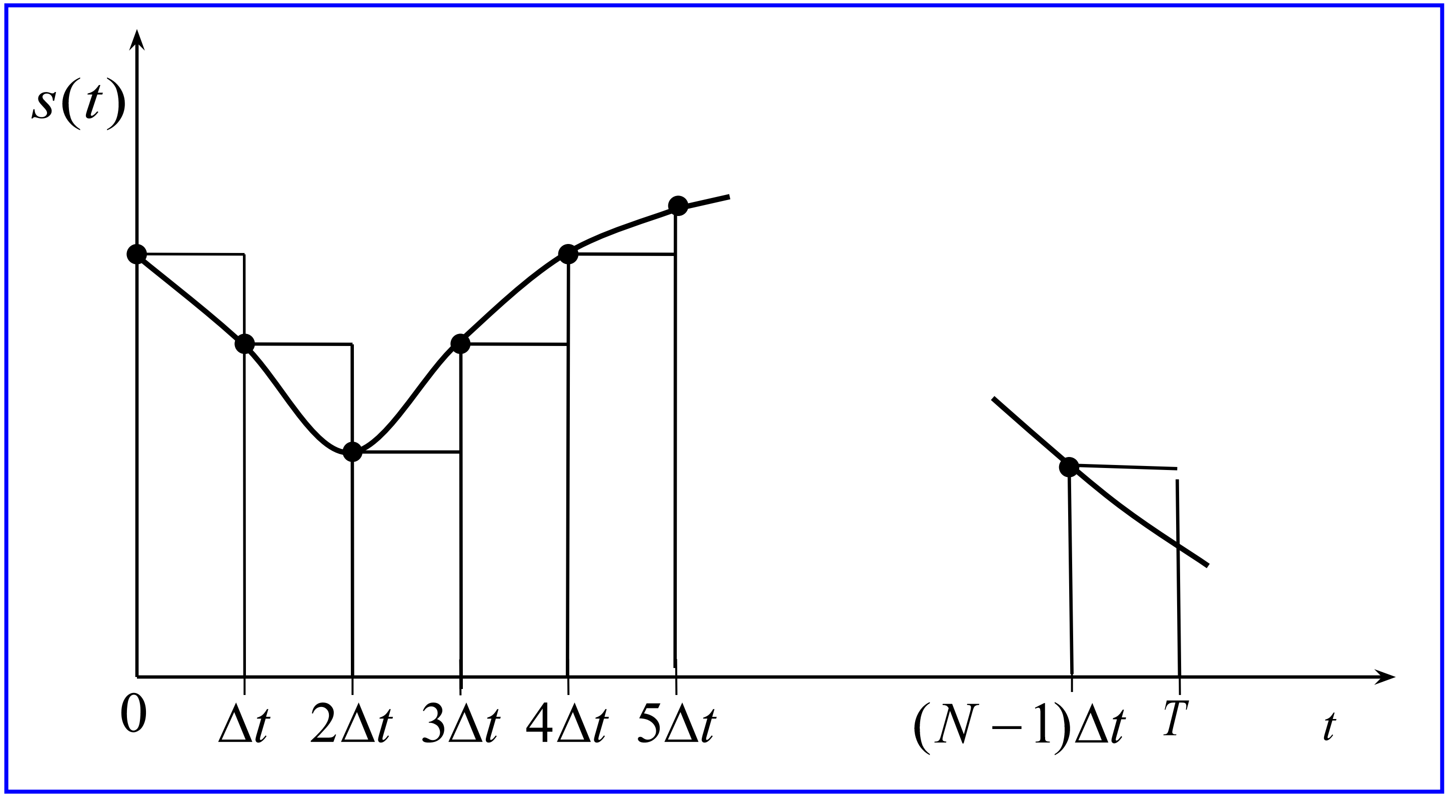
Ряд Котельникова позволяет вычислить с любой точностью значения непрерывной функции по ее значениям в дискретных точках отсчета $\{t_k\}$

$$\boxed{N = \frac{\Delta\omega\Delta\tau}{2\pi}}$$

Число степеней свободы функции

$\Delta\omega, \ \Delta t$ - ширина спектра и длина области задания *финитной* функции

Дискретизация непрерывной функции



$$N = T / \Delta t$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$t_k = k\Delta t$$

$$s_k = s(t_k)$$

Численный спектральный анализ

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

$$N = T/\Delta t \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \qquad t_k = k\Delta t \qquad s_k = s(t_k)$$

Получить самостоятельно выражения для численного расчета интегралов, применив левостороннюю формулу прямоугольников

В окончательную формулу длина промежутка дискретизации T должна не входить

Численный спектральный анализ

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

$$a'_n = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}nk\Delta t\right)\Delta t$$

интегральная сумма
по левосторонней формуле
прямоугольников

$$\boxed{\begin{cases} a'_n = \dfrac{2}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} s_k \cos(2\pi nk/N) \\ b'_n = \dfrac{2}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} s_k \sin(2\pi nk/N) \end{cases}}$$

формулы для численного расчета
коэффициентов Фурье

В формулы длина промежутка дискретизации T явно не входит

Дискретное преобразование Фурье

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\exp(-in\omega t)\,dt$$

комплексный коэффициент Фурье

$$\boxed{C'_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-i2\pi nk/N\right)}$$

прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$$

комплексный ряд Фурье

$$\boxed{s_k = \sum_{k=0}^{N-1} C'_n \exp(i2\pi nk/N)}$$

Обратное ДПФ

Свойства ДПФ

1. Линейность
2. Число коэффициентов ДПФ равно числу ***N*** элементов исходной последовательности
3. Постоянная составляющая (коэффициент с номером нуль) есть среднее значение дискретной последовательности:

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k}$$

4. Если ***N*** - четное, то

$$\boxed{C_{N/2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k s_k}$$

Свойства ДПФ

5. Если $\{s_k\},\ k = 0,\ldots,N-1$ – дискретная последовательность вещественных чисел, то имеет место равенство

$$\boxed{C_{N-n} = C_n^*}$$

комплексное сопряжение

Свойства ДПФ

5. Если $\{s_k\},\ k = 0,\ldots,N-1$ – дискретная последовательность вещественных чисел, то имеет место равенство

$$\boxed{C_{N-n} = C_n^*}$$ комплексное сопряжение

$$C_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp(-i2\pi[N-n]k/N) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp(i2\pi nk/N) = C_n^*$$

поэтому можно считать, что вторая половина коэффициентов

$$C_{N/2+1},\ldots,C_{N-1}$$

отвечает отрицательным частотам, для которых по свойствам комплексных амплитуд $C_{-n} = C_n^*$

Свойства ДПФ

6. Периодическое продолжение дискретной последовательности

$$s_k = \sum_{k=0}^{N-1} C'_n \exp(i2\pi nk / N)$$

обратное ДПФ

$$\boxed{s_{mN+l} = s_l, \quad l = 0,1,\ldots,N-1, \quad \forall m \in Z}$$

последовательность с периодом N

Применение ДПФ автоматически подразумевает продолжение исходной последовательности с периодом N.

Если последовательность является дискретным представлением непрерывной функции на промежутке $[0, T]$, то применение ДПФ подразумевает продолжение функции с периодом T.

Частоты ДПФ

Пусть последовательность из N отсчетов является дискретным представлением непрерывной функции на промежутке $[0, T]$. Тогда

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n, \qquad n = 0, \ldots, N/2$$

положительные частоты

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T}(n - N), \qquad n = N/2 + 1, \ldots, N-1$$

отрицательные частоты

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T}\frac{N}{2} = \frac{\pi N}{T}$$

максимальная частота

$$\omega_g \le \omega_{\max}$$

условие точного соответствия ДПФ непрерывному преобразованию Фурье

Если ДПФ рассматривается как преобразование дискретного набора данных и речи о дискретизации непрерывной функции не идет, то при определении частот полагают период последовательности $T = N$ (последовательность периодична по номерам элементов с периодом N)

Пример с перестановкой частот комплексного спектра ДПФ

Двумерное ДПФ

Преобразование прямоугольных матриц (двумерных массивов)

$$C_{mn} = \frac{1}{MN} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} s_{lk} \exp\left(-i2\pi \left[\frac{lm}{M} + \frac{nk}{N} \right] \right)$$

прямое двумерное ДПФ

$$s_{lk} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} \exp\left(i2\pi \left[\frac{lm}{M} + \frac{nk}{N} \right] \right)$$

обратное двумерное ДПФ

Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) - “быстрый” алгоритм расчета ДПФ

$$N = 2^p$$

$$s_k^E = s_{2k}, \quad s_k^O = s_{2k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N/2-1.$$

$$\boxed{C_n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-i\frac{2\pi nk}{N}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_{2k} \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}2k\right) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_{2k+1} \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}(2k+1)\right) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^E \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N/2}k\right)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right)\left\{\frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^O \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N/2}k\right)\right\}\end{aligned}}$$

Быстрое преобразование Фурье

$$C_n^{E,O} = \frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^{E,O} \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N/2}k\right), \quad n = 0,1,\ldots,N/2-1,$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2}\left[C_n^E + \exp\left(-\frac{i2\pi n}{N}\right)C_n^O\right], \quad n = 0,1,\ldots,N/2-1.}$$

$$\boxed{C_{n+N/2}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^E \exp\left(-i\frac{2\pi(n+N/2)}{N/2}k\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{2\pi(n+N/2)}{N}\right)\left\{\frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^O \exp\left(-i\frac{2\pi(n+N/2)}{N/2}k\right)\right\} =$$

$$\boxed{\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^E \exp\left(-i\frac{2\pi n)}{N/2}k\right)\right\} - \\ &-\frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right)\left\{\frac{1}{N/2}\sum_{k=0}^{N/2-1} s_k^O \exp\left(-i\frac{2\pi n}{N/2}k\right)\right\}.\end{aligned}}$$

Быстрое преобразование Фурье

$$C_n = \frac{1}{2}\left[C_n^E + \exp\left(-\frac{i2\pi n}{N}\right)C_n^O\right], \quad n = 0,1,\ldots,N/2-1.$$

$$C_{n+N/2} = \frac{1}{2}\left[C_n^E - \exp\left(-\frac{i2\pi n}{N}\right)C_n^O\right], \quad n = 0,1,\ldots,N/2-1.$$

Порядок сложности алгоритма БПФ

$$N\log_2 N$$

Порядок сложности алгоритма ДПФ

$$N^2$$

Средства Mathcad для реализации ДПФ и БПФ

Встроенные функции (пары функций) – см. описания в справочной системе

fft, ifft – Fast Fourier Transform (FFT), Inverse FFT
FFT, IFFT

cfft, icfft – Complex FFT, Inverse Complex FFT
CFFT, ICFFT

Готовые примеры (quicksheets):

Engineering Applications\Fast Fourier Transforms
    qsheet\Applications\f060.xmcd
Calculus and DiffEQs\Fourier Coefficients: Signal Generation
    qsheet\Calculus_Des\fourcoef.xmcd

Сходимость ряда Фурье

Пусть $s(t)$ – кусочно непрерывно дифференцируемая функция с периодом T. Тогда ряд Фурье функции $s(t)$ сходится в каждой точке отрезка $[0,T]$:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)\right]$$

Ряд Фурье

$$\boxed{F(t) = \frac{s(t-0)+s(t+0)}{2}}$$

равенство верно для любой точки

$$s(t_0) = F(t_0)$$

равенство в точке непрерывности

Скорость сходимости ряда Фурье

Скорость сходимости ряда Фурье функции $s(t)$ зависит от ее гладкости - количества непрерывных производных.

Теорема. Если $s(t)$ непрерывно дифференцируема r раз на отрезке $[0,T]$, то для частичных сумм ряда Фурье $s_N(t)$ справедливы неравенства:

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)\right]$$

частичная сумма ряда Фурье

$$\boxed{\max_{[0,T]}\left|s(t) - s_N(t)\right| \le K\frac{M\ln(N+1)}{N^r}} \qquad \max_{[0,T]}\left|s^{(r)}(t)\right| \le M \qquad K = const$$

$$\boxed{\sigma_N(s) = \sqrt{\int_0^T \left(s(t) - s_N(t)\right)^2 dt} \le \frac{C}{(N+1)^r}}$$

неравенство для среднеквадратического отклонения

$$\sqrt{\int_0^T s^2(t)dt} \le C$$

Эффект Гиббса

Явление Гиббса: неравномерная сходимость ряда Фурье функции $s(t)$ с периодом T в точках разрыва.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T)\right]$$

$$F(t') = \frac{s(t'-0) + s(t'+0)}{2}$$

значение ряда Фурье в точке разрыва t'

Использование конечного числа членов ряда Фурье для функций с разрывами, например при численном моделировании, приводит к тому, что частичные суммы ряда ***содержат периодические функции, период которых равен периоду последнего удержанного члена*** .

Эффект Гиббса. Пример

Сглаживание пульсаций. Сигма-факторы

Методика сглаживания К. Ланцоша – усреднение частичных сумм ряда Фурье по периоду последнего оставленного или первого отброшенного члена

$$\boxed{h_N(t) = \frac{1}{T/N} \int\limits_{1-(T/2N)}^{1+(T/2N)} s_N(\xi)\,d\xi} = \frac{N}{T} \int\limits_{1-(T/2N)}^{1+(T/2N)} \frac{a_0}{2}\,d\xi +$$

$$+ \frac{N}{T} \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \int\limits_{1-(T/2N)}^{1+(T/2N)} \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\xi\right) d\xi + b_k \int\limits_{1-(T/2N)}^{1+(T/2N)} \sin\left(\frac{2\pi k}{T}\xi\right) d\xi \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{N}{T} \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \left\{ \frac{\sin[2\pi k/T\,(t + T/2N)] - \sin[2\pi k/T(t - T/2N)]}{2\pi k/T} \right\} - \right.$$

$$\left. - b_k \left\{ \frac{\cos[2\pi k/T\,(t + T/2N)] - \cos[2\pi k/T(t - T/2N)]}{2\pi k/T} \right\} \right].$$

Сглаживание пульсаций. Сигма-факторы

Методика сглаживания К. Ланцоша – усреднение частичных сумм ряда Фурье по периоду последнего оставленного или первого отброшенного члена

$$h_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \boxed{\sigma(N,k)} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t \right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t \right) \right]$$

$$\boxed{\sigma(N,k) = \frac{\sin(\pi k/N)}{\pi k/N}}$$

коэффициенты Фурье домножаются на ***сигма-факторы***

Сглаживание пульсаций. Пример