

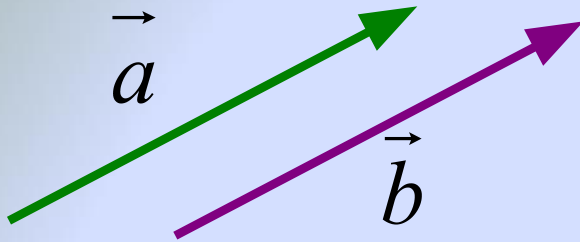
**Угол между векторами.
Скалярное произведение
векторов**

Цели урока:

- *Ввести понятия угла между векторами и скалярного произведения векторов.*
- *Рассмотреть формулу скалярного произведения в координатах.*
- *Показать применение скалярного произведения векторов при решении задач.*

Повторение:

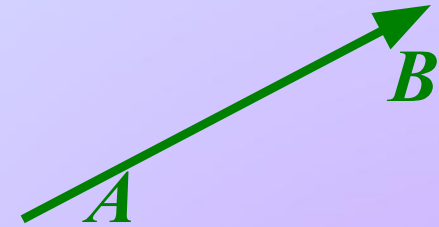
- *Какие векторы называются равными?*



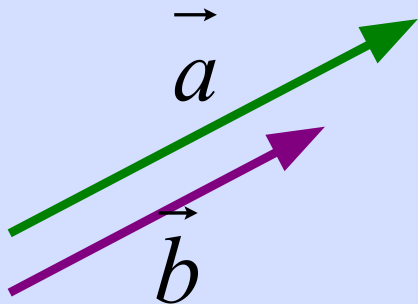
$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } |\vec{a}| = |\vec{b}|; \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

- *Как найти длину вектора по координатам его начала и конца?*

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- *Какие векторы являются коллинеарными?*



$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ или } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_2 \\ y_1 = \lambda \cdot y_2 \\ z_1 = \lambda \cdot z_2 \end{cases}$$

Повторение

Векторы в пространстве.

1) Дано: $A(-3; -2; 4)$ $B(-4; 3; 2)$

Найти: $|\vec{AB}|$

$\sqrt{30}$

2) Дано: $A(2; -3; 1)$ $B(4; -5; 0)$ $C(5; 0; -4)$ $D(7; -2; -3)$

Равны ли векторы \vec{AB} и \vec{CD} ?

$\vec{AB}\{2; -2; -1\}$

$\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

3) Дано: ? Коллинеарны ли векторы \vec{AB} и \vec{CD} ?

$A(1; -3; 4)$

$B(9; 1; -2)$

$C(2; 0; 1)$

$D(4; -2; 2)$

$\vec{AB}\{8; 4; -6\}$ $\vec{CD}\{2; -2; 1\}$

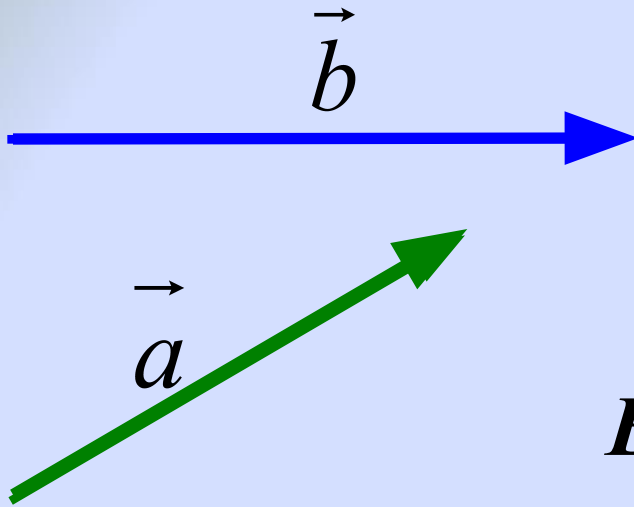
Н

р

а

т

Угол между векторами.

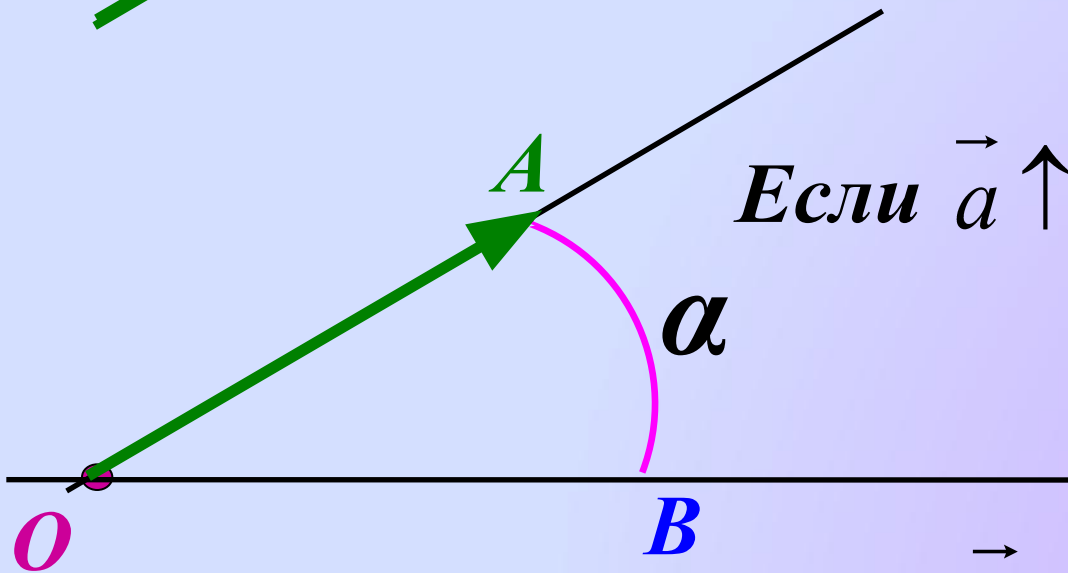


$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = \alpha$$

Если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 0^\circ$

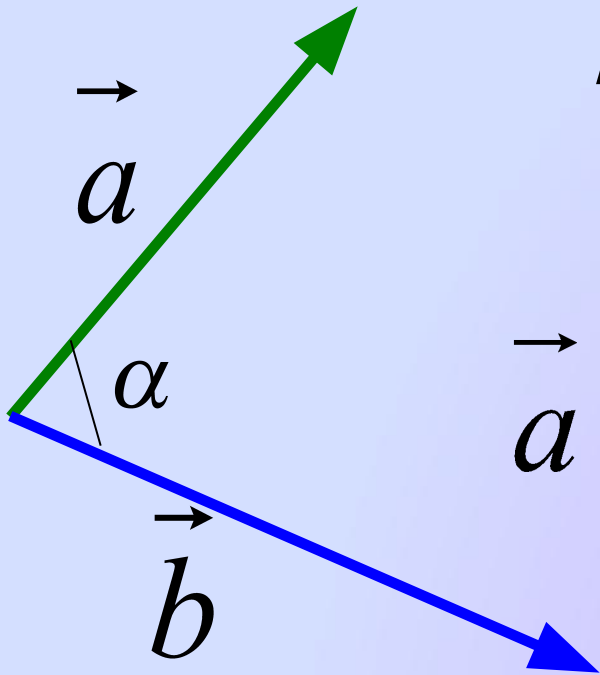
Если $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ то $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 180^\circ$



Если $\vec{a} \perp \vec{b}$ то $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}\vec{b}} \right) = 90^\circ$

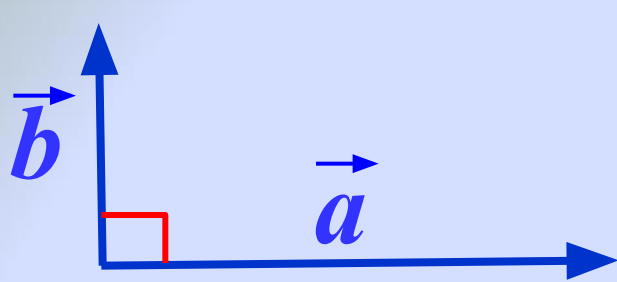
Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

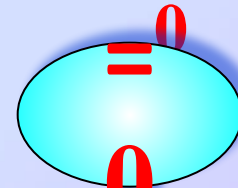


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Частный случай №1



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

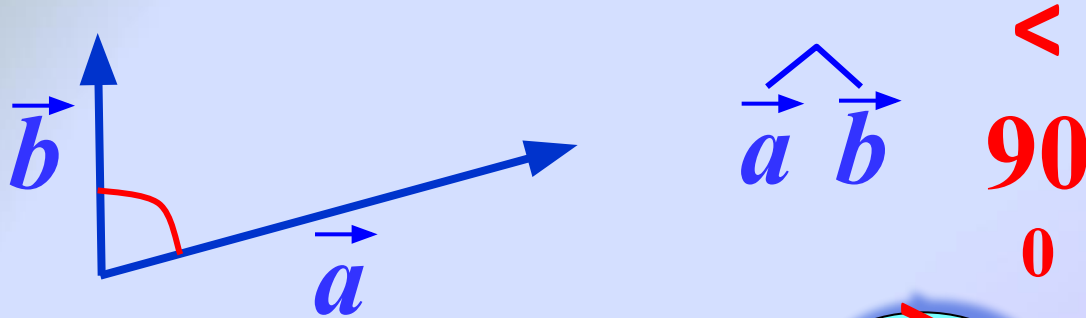


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Частный случай №2



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

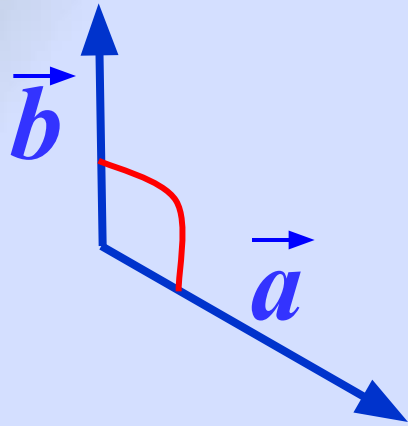
>
0

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

<
90
0

Частный случай №3



$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

90

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

0

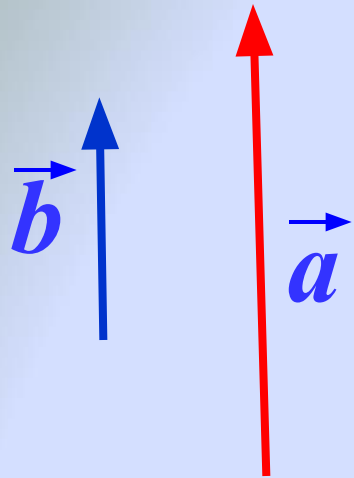
Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$

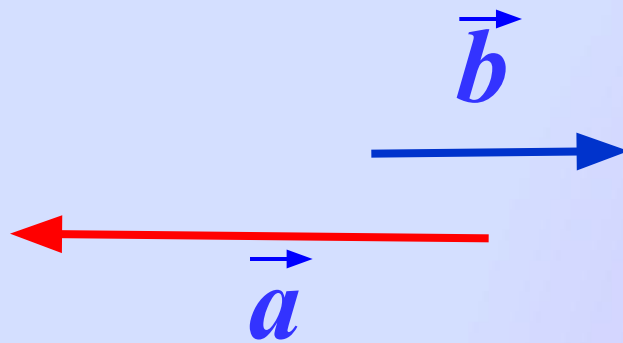
90

0

Частный случай №4



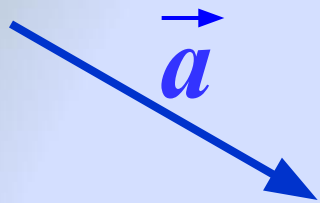
$$\widehat{a \ b} = 0^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



$$\widehat{a \ b} = 180^\circ$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0^0$$



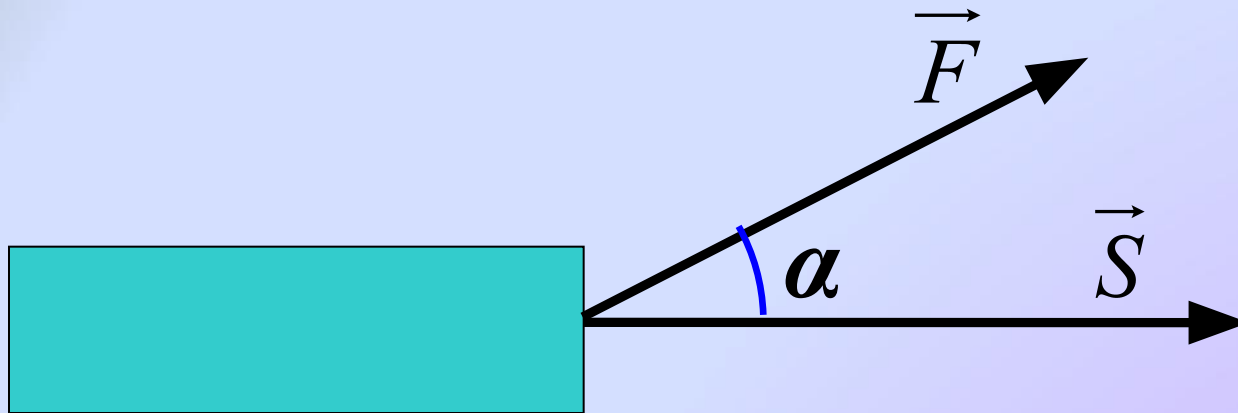
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos 0^0 = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора \overrightarrow{a} и обозначается \overrightarrow{a}^2

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

Пример применения скалярного произведения векторов в физике.



Если $(\vec{F} \vec{S}) = \alpha$, то

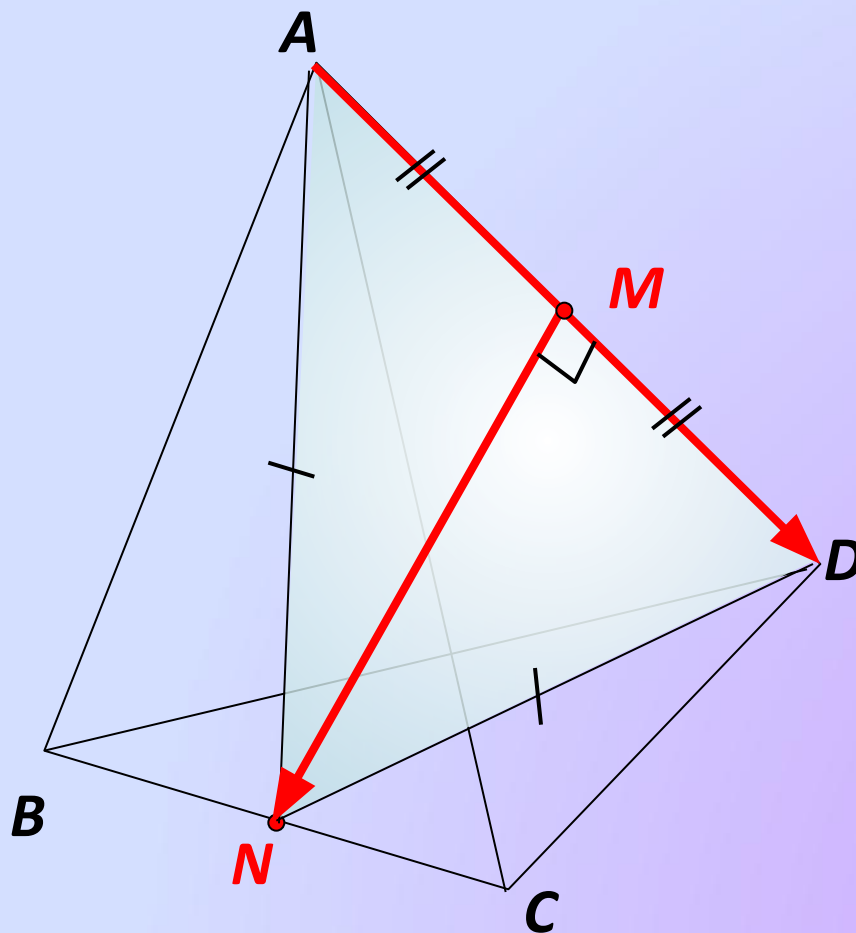
$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \alpha$$

Скалярное произведение векторов.

Задача №1

Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC . Докажите, что

$$\vec{MN} \cdot \vec{AD} = 0$$



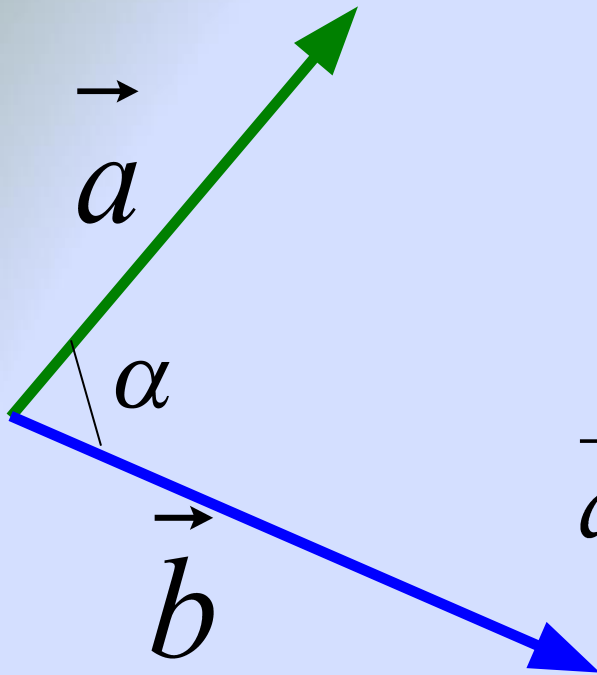
Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

*Скалярное произведение двух векторов равно
сумме произведений соответствующих
координат этих векторов.*

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача №2

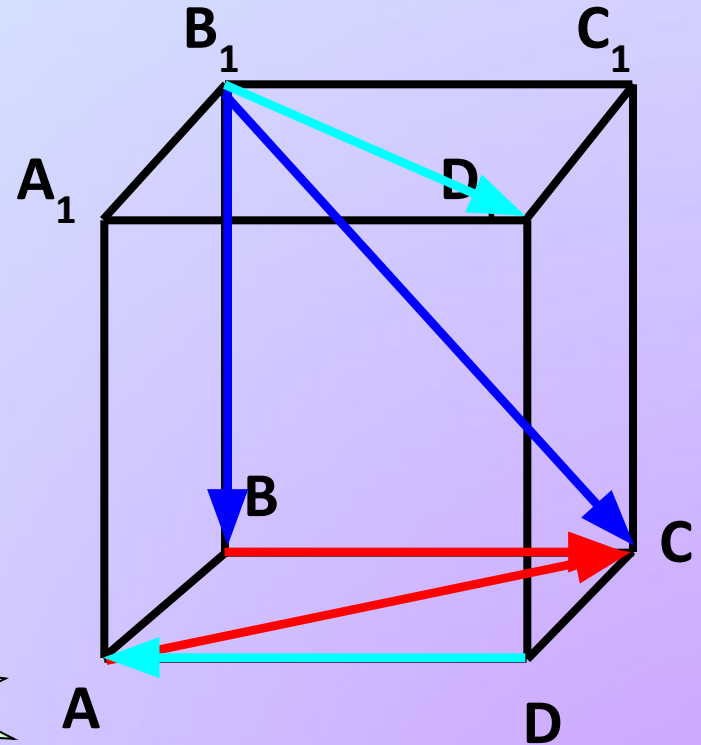
Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1 B}$ и $\overrightarrow{B_1 C}$ 45°

б) \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AC} 45°

в) \overrightarrow{DA} и $\overrightarrow{B_1 D_1}$ 135°



№ 443 (2)

Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;
 $AB = a$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

1 способ:

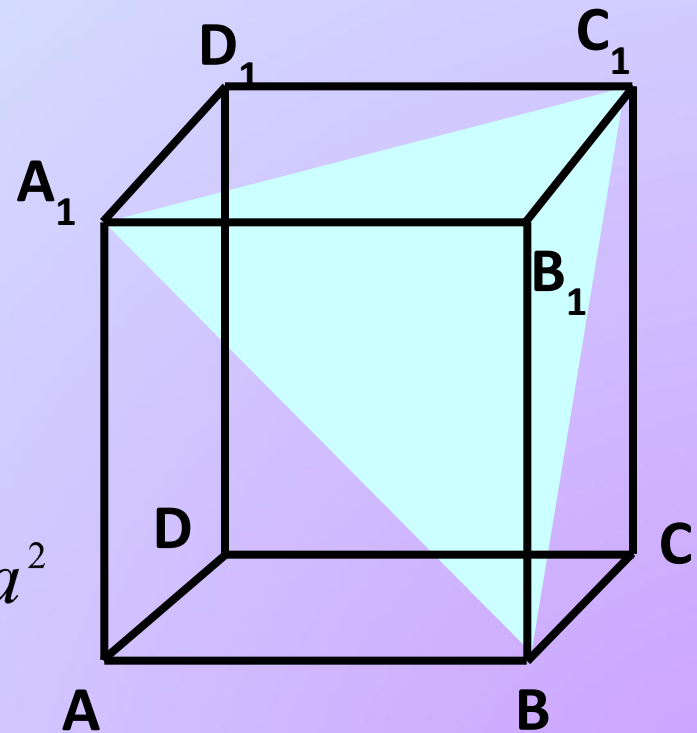
$\triangle BA_1 C_1$ – правильный

$$BA_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$$

$$\left(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC_1} \right) = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Ответ: a^2



Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;
 $AB = a$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

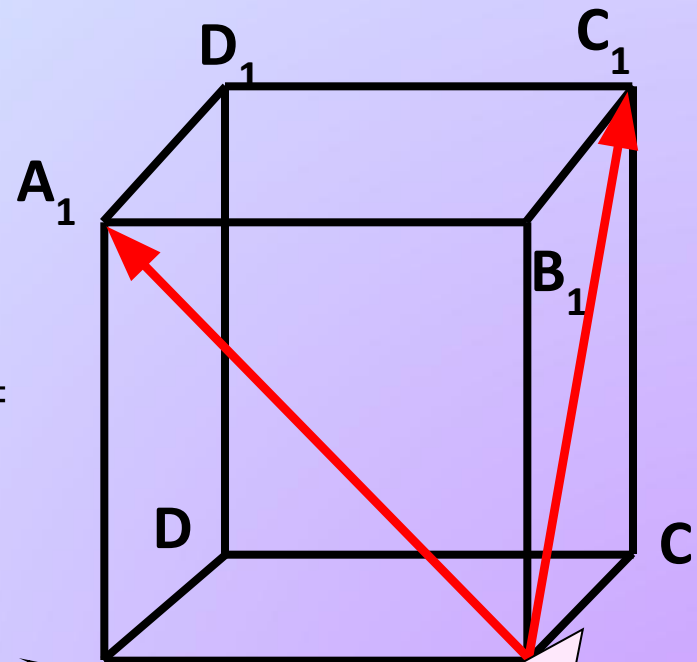
2 способ:

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$$

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = ?$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) = \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \\ &+ \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \\ &= 0 + 0 + 0 + a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2 \end{aligned}$$



Ответ: a^2

№ 443 (2)

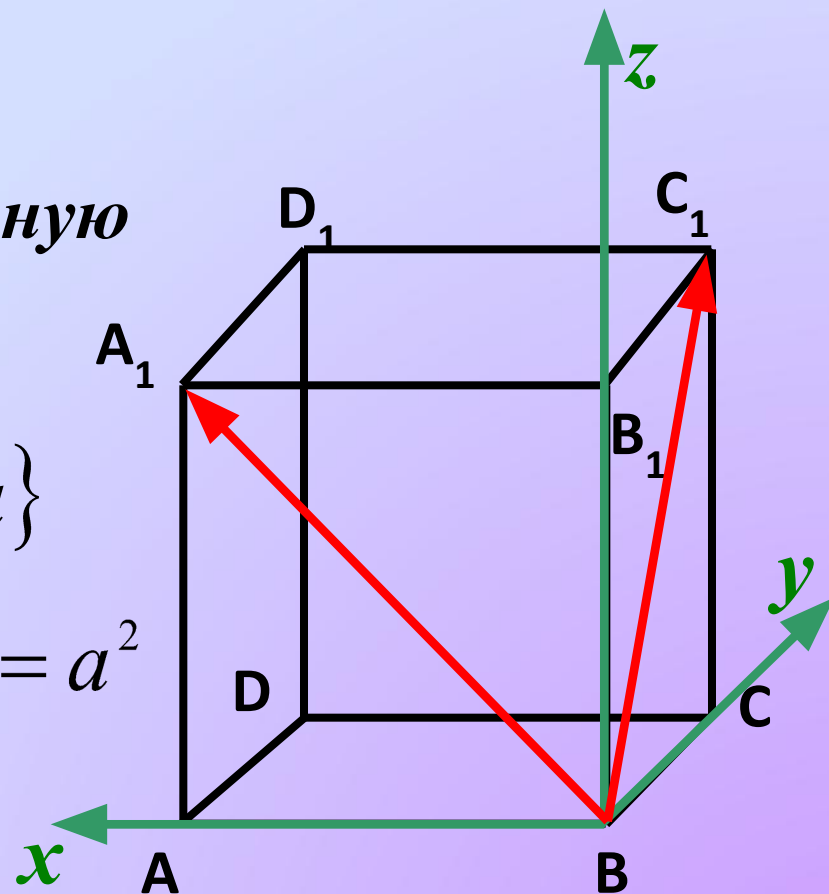
Дано: куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;
 $AB = a$

Найти: $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

3 способ: Введем прямоугольную систему координат.

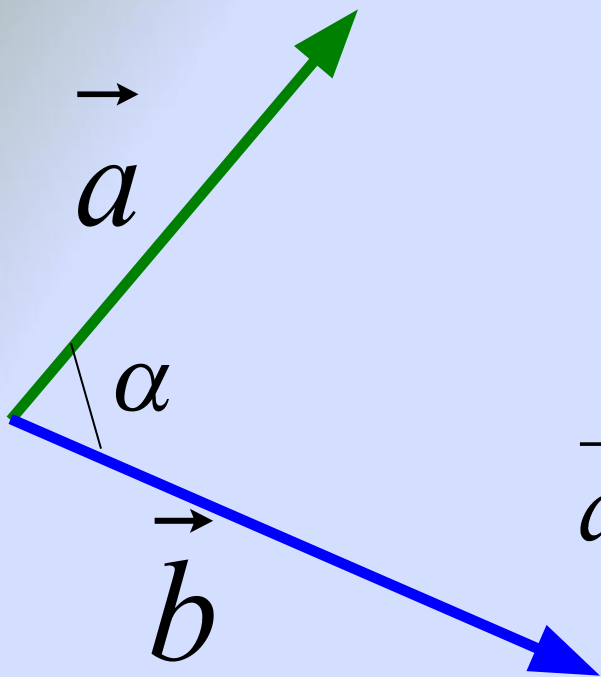
$$\overrightarrow{BA_1} \{a; 0; a\} \quad \overrightarrow{BC_1} \{0; a; a\}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$$



Ответ: a^2

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задание №1

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-6; 9; 5\}$$

$$\vec{b} \{-1; 0; 7\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot (-1) + 9 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 41$$

Задание №2

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{0; 0; 4\}$$

$$\vec{b} \{22; 1; 8\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 32$$

Задание №3

Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{1; 7; 9\}$$

$$\vec{b} \{-2; 4; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 0 = 26$$

Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{1; 10; 7\}$$

$$\vec{b} \{0; 7; 0\}$$

Проверочная работа

2. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{7; 25; 0\}$$

$$\vec{b} \{11; 0; 54\}$$

Проверочная работа

3. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-2; 0; 3\}$$

$$\vec{b} \{1; -11; 1\}$$

Проверочная работа

4. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{ \sin(90^0); 2; 3 \} \quad \vec{b} \{ 3; 2; 1 \}$$

Проверочная работа

5. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-1; 2; 8\}$$

$$\vec{b} \{5; 5; 0\}$$

Проверочная работа

Работа закончена.
Перейдём к проверке.

Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{1; 10; 7\}$$

$$\vec{b} \{0; 7; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 7 = 70$$

Проверочная работа

2. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{7; 25; 0\}$$

$$\vec{b} \{11; 0; 54\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 11 = 77$$

Проверочная работа

3. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{ |-2|; 0; |3| \} \quad \vec{b} \{ 1; |-11|; 1 \}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$$

Проверочная работа

4. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{ \sin(90^0); 2; 3 \} \quad \vec{b} \{ 3; 2; 1 \}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$$

Проверочная работа

5. Найти скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \{-1; 2; 8\}$$

$$\vec{b} \{5; 5; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 5$$

Домашнее задание

П.50, 51

№ 441, № 444, 446 (а)