# ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

***ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА***

## Цель лекции

**Ознакомиться с теоремой о движении центра масс и примерами ее практического применения.**

## План лекции

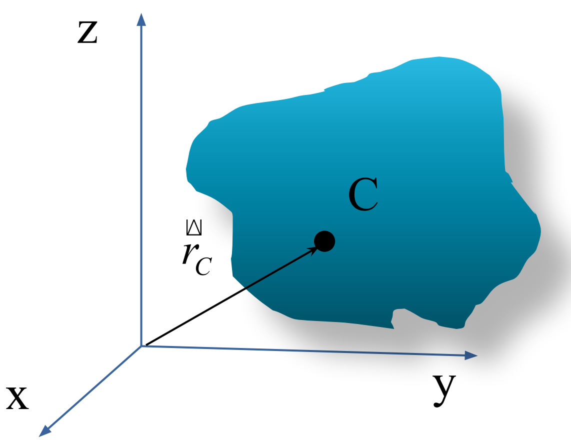
- **Центр масс**
- **Теорема о движении центра масс**
- **Значение теоремы о движении центра масс**
- **Следствия из теоремы**
- **Закон сохранения движения центра масс**


Цель лекции

# ЦЕНТР МАСС

***Центром масс механической системы*** **называется геометрическая точка С, координаты которой определяются формулами:**

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k \qquad y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k \qquad z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k$$




или

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \vec{r}_k}$$

$M$ - масса системы

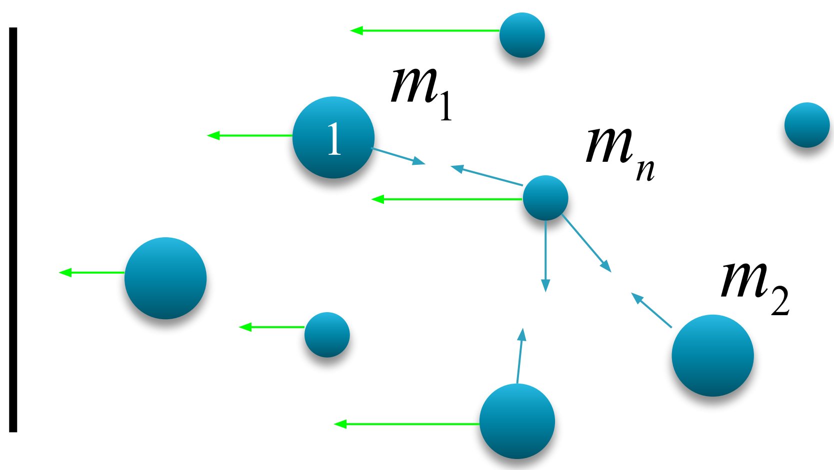
$$M = \sum m_k$$

# ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

**Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил**

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Запишем дифф.уравнения движения системы, состоящей из **n** материальных точек




$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \\ &\dots \\ m_n\vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{aligned}\right\}$$

- Сложим почленно их левые и правые части

$$\sum m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i$$

- Преобразуем левую часть равенства, используя формулу для радиус-вектора центра масс системы

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k\vec{r}_k \quad \Rightarrow \quad \sum m_k\vec{r}_k = M\vec{r}_C$$

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Возьмем вторую производную по времени от обеих частей этого равенства

$$\sum m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = M\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} \quad \text{или} \quad \sum m_k\vec{a}_k = M\vec{a}_C$$

$\vec{a}_C$ - ускорение масс системы

- Учитывая, что сумма внутренних сил системы $\sum \vec{F}_k^i = 0$

Получим уравнение, выражающее теорему о движении масс системы

$$\boxed{M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e}$$

- Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \qquad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \qquad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e$$

- Теорема доказана

# ЗНАЧЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

**Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему**

**Система = материальная точка**

**поступательное движение тела**

**маленький размер тела**

# СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ

**Одними внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс системы**

**Пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс (она может вызвать только вращение тела)**

# ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

**1. Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно**

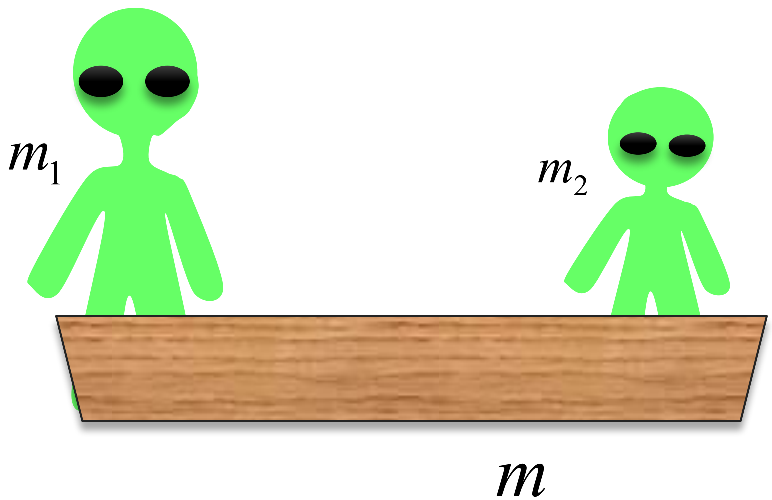
$$\sum \vec{F}_k^{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_C = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{v}_C = const}$$

# ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

**2. Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная**

$$\sum F^{e}_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_C = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\dot{x}_C = v_{Cx} = const}$$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ




Пренебрегая сопротивлением воды, определить, куда и насколько переместится лодка, если люди поменяются местами.

$m$ - масса лодки

$m_1$ - масса первого человека

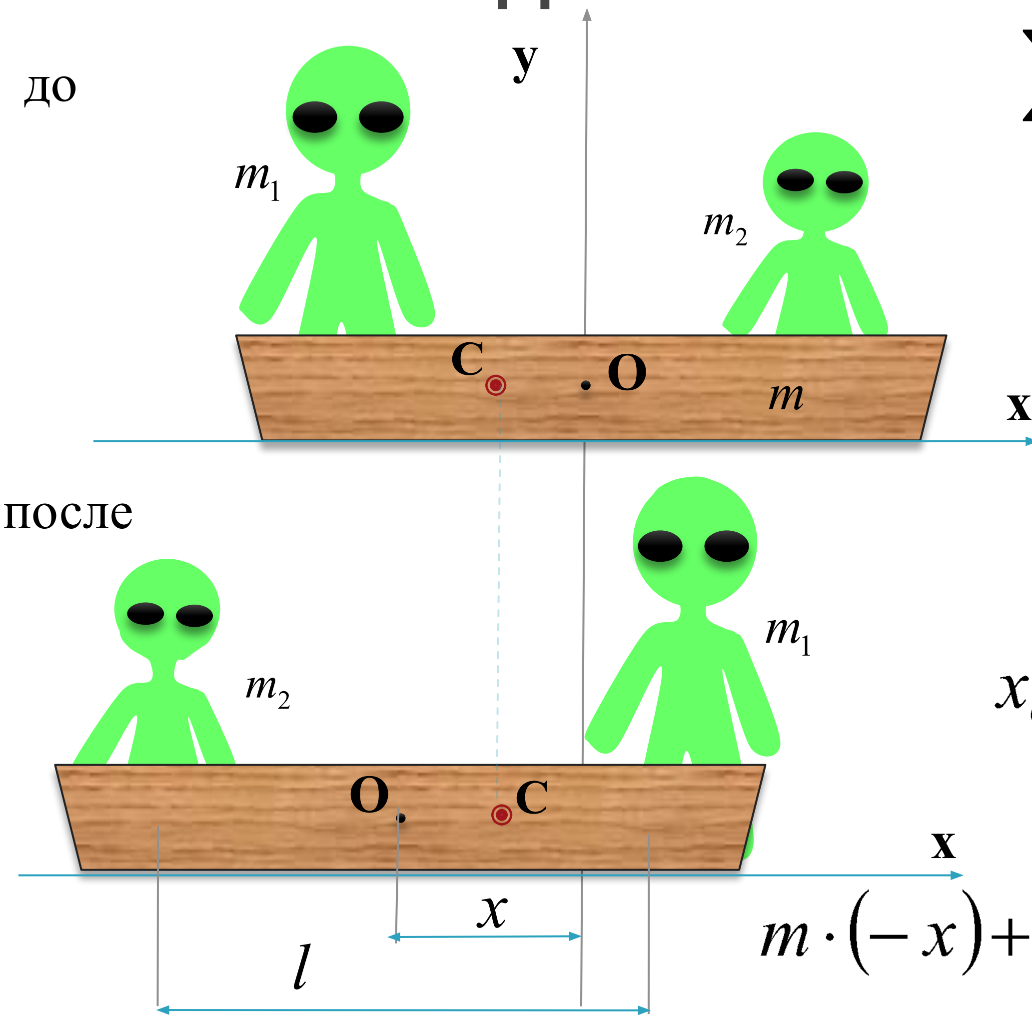
$m_2$ - масса второго человека

$l$ - расстояние между ними

$\frac{l}{2}$ - расстояние от человека до центра лодки

$x - ?$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ




$$\sum F^e_{kx} = 0 \Rightarrow v_{Cx} = 0 \Rightarrow$$

$$x_C = const \Rightarrow x_{C_1} = x_{C_2}$$

$$\boxed{x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k}$$

$$x_{C_{до}} = \frac{m \cdot 0 + m_1 \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) + m_2 \cdot \frac{l}{2}}{m + m_1 + m_2}$$

$$x_{C_{после}} = \frac{m \cdot (-x) + m_1 \cdot \left(-x + \frac{l}{2}\right) + m_2 \cdot \left(-x - \frac{l}{2}\right)}{m + m_1 + m_2}$$

$$\boxed{x = \frac{l(m_1 - m_2)}{m + m_1 + m_2}}$$