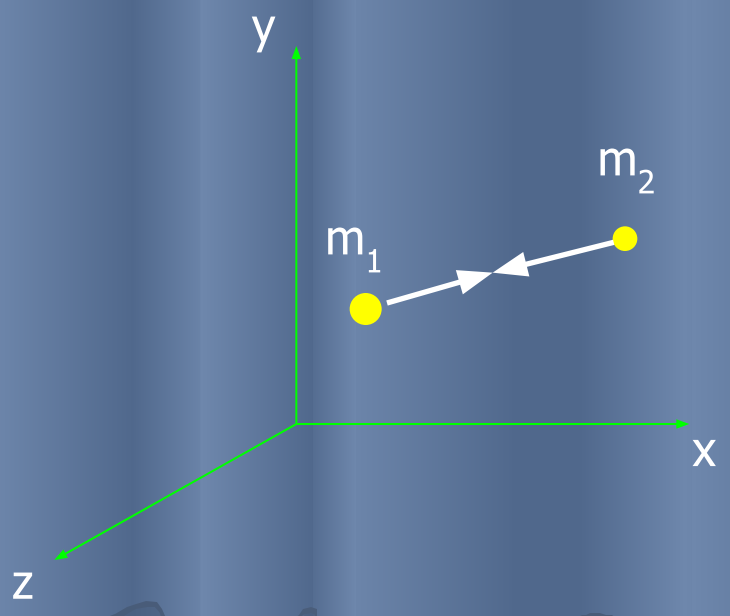
Задача двух тел

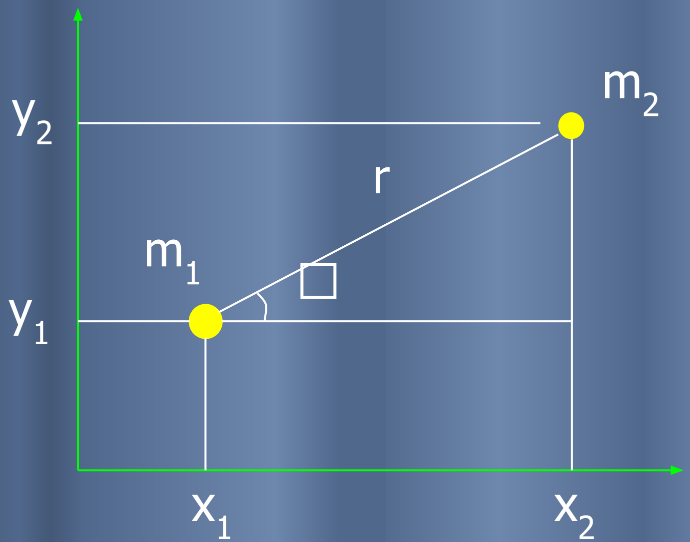
Уравнения движения в задаче двух тел

- Движение двух материальных точек будем рассматривать в инерциальной системе отсчета.



Массы m_1 и m_2 притягивают друг друга с силой

$$F = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



Из рисунка видно, что

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\cos\psi = \frac{x_1 - x_2}{r}$$

Сила, действующая на тело m_2 вдоль оси x

$$F_x = m_2 \ddot{x}_2 = F\cos\psi = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3}(x_1 - x_2)$$

Аналогично находятся проекции F_y и F_z

Уравнения движения тела m_2, притягиваемого телом m_1 будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= \frac{k^2 m_1}{r^3}(x_1 - x_2),\\
\ddot{y}_2 &= \frac{k^2 m_1}{r^3}(y_1 - y_2), \qquad (1)\\
\ddot{z}_2 &= \frac{k^2 m_1}{r^3}(z_1 - z_2).
\end{aligned}
$$

Аналогично находим уравнения движения тела m_1 под влиянием притяжения от тела m_2

$$\ddot{x}_1 = \frac{k^2 m_2}{r^3}(x_2 - x_1),$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{k^2 m_2}{r^3}(y_2 - y_1), \qquad (2)$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{k^2 m_2}{r^3}(z_2 - z_1).$$

Вычитая из (1) уравнения (2) находим уравнения движения тела m_2 относительно m_1

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^3}(x_2 - x_1),$$

$$\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^3}(y_2 - y_1),$$

$$\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^3}(z_2 - z_1).$$

Вводя обозначения $\mu = k^2(m_1 + m_2)$

и $x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1$

окончательно получим

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \qquad (3)$$

$$\ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0.$$

Интегралы площадей

Умножаем первое уравнение системы (3) на –y, второе – на x, и складываем их. Затем складываем второе, умноженное на –z, с третьим, умноженным на y и первое, умноженное на z с третьим, умноженным на –x.

$$
\begin{array}{l|c|c|c}
\ddot{x}+\dfrac{\mu x}{r^3}=0 & -y & & z \\
\ddot{y}+\dfrac{\mu y}{r^3}=0 & x & -z & \\
\ddot{z}+\dfrac{\mu z}{r^3}=0 & & y & -x
\end{array}
$$

Интегралы площадей

В итоге получим:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 0, \qquad y\dot{z} - z\dot{y} = 0, \qquad z\dot{x} - x\dot{z} = 0.$$

Интегрируя эти соотношения, находим

$$x\dot{y} - y\dot{x} = a_1, \qquad y\dot{z} - z\dot{y} = a_2, \qquad z\dot{x} - x\dot{z} = a_3 \qquad (4)$$

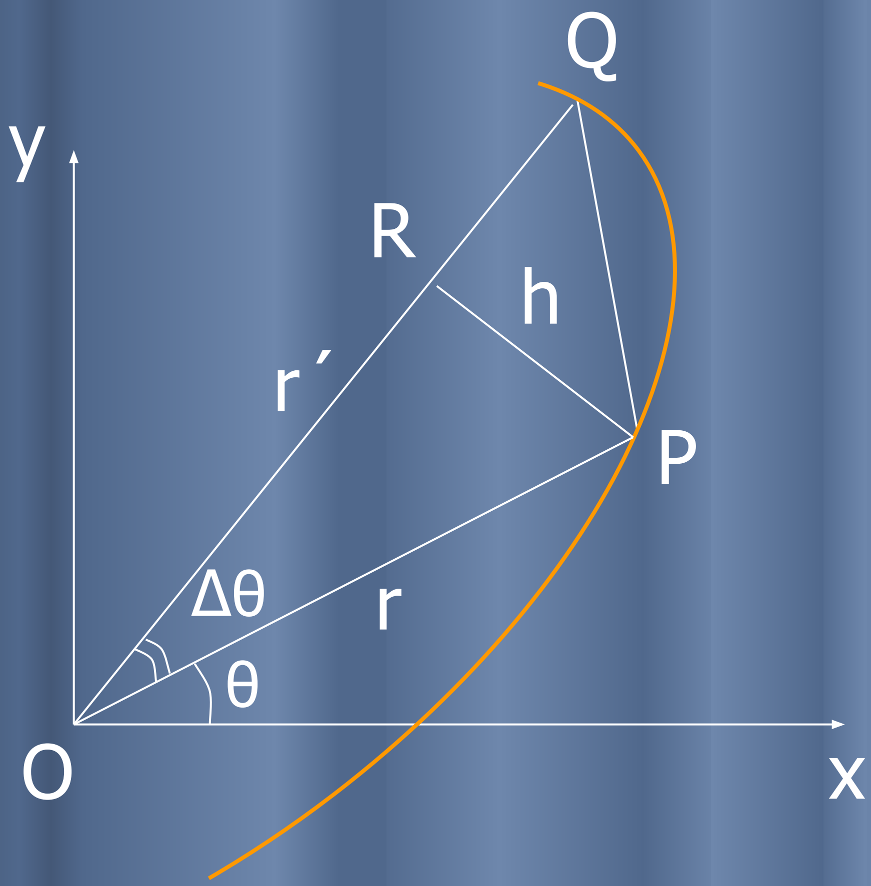
Домножаем равенства (4) на z, x, y соответственно и складываем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}y - \dot{y}x &= a_1 \\ \dot{y}z - \dot{z}y &= a_2 \\ \dot{z}x - \dot{x}z &= a_3 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &z \\ &x \\ &y \end{aligned}$$

получим:

$$a_1 z + a_2 x + a_3 y = 0 \qquad (5)$$

Это уравнение плоскости, проходящей через начало координат. В этой плоскости происходит движение тела m_2.
Постоянные a1, a2, a3 определяют положение плоскости орбиты этого тела относительно осей координат. Смысл этих постоянных можно усмотреть из следующего рисунка.



Обозначим через ΔA – площадь треугольника OPQ, описанного радиус-вектором за время Δt.

$$\Delta A = \frac{1}{2} r' \cdot h$$

Из треугольника OPR имеем

$$h = r \sin(\Delta\theta)$$

Поэтому

$$\Delta A = \frac{1}{2} r' r \sin(\Delta\theta)$$

Перепишем последнее равенство в виде:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r' r \frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

При $\Delta\theta \to 0$ отношение площади треугольника к площади сектора $\to 1, \; r' \to r, \; \dfrac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \to 1.$

В пределе при $\Delta t \to 0$ имеем:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad (6)$$

Это секториальная скорость движущейся точки.

Посмотрим теперь как будет выглядеть последнее выражение в прямоугольных координатах:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\theta = \frac{y}{x}.$$

Отсюда: $$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

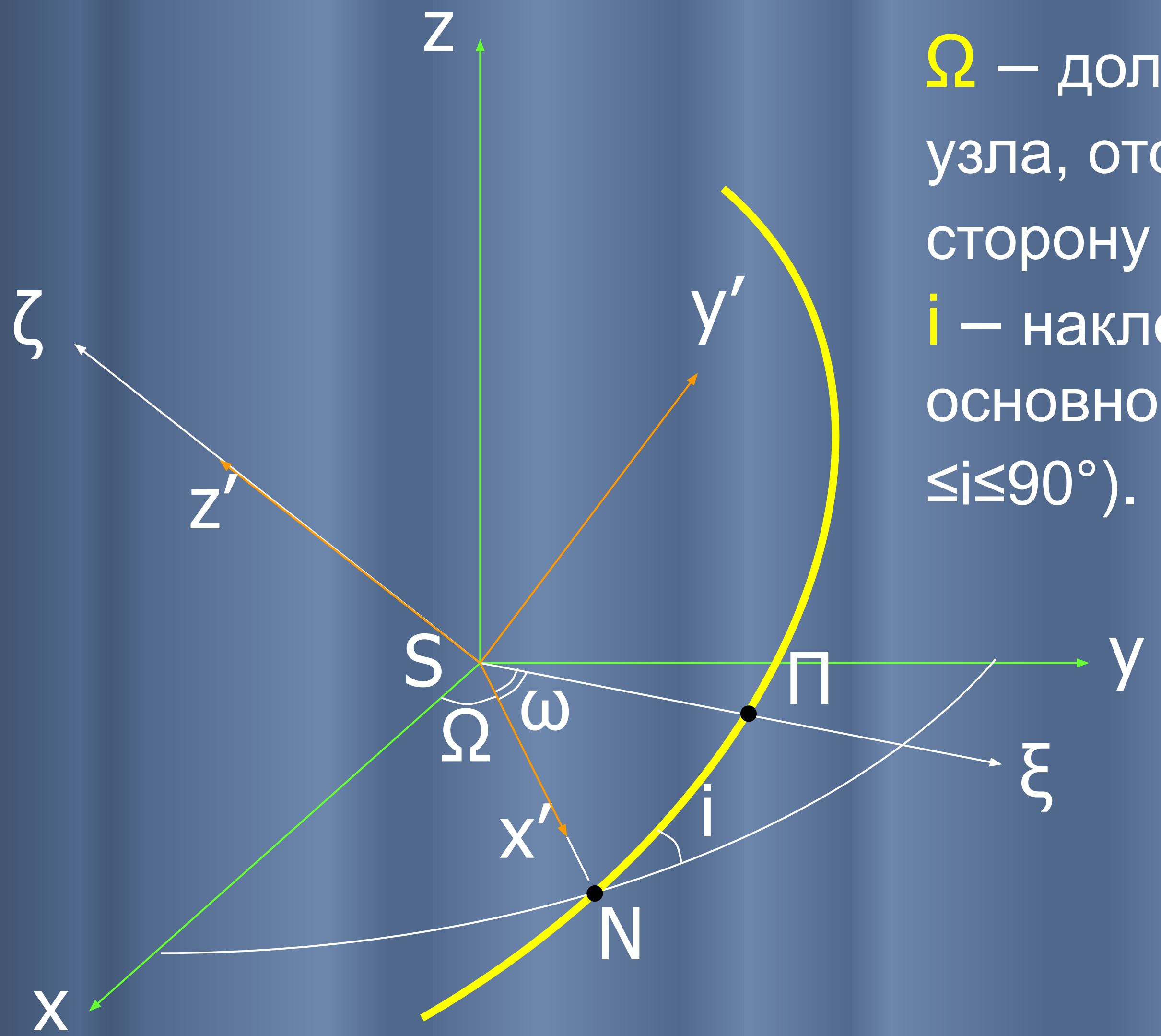
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2}\right) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

В итоге находим: $$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$ (!!!)

Постоянные a1, a2, a3 – проекции удвоенной секториальной скорости на плоскости xy, yz и zx! Поэтому удвоенная секториальная скорость в плоскости орбиты будет:

$$c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,. \qquad (7)$$

При решении астрономических задач положение в пространстве плоскости орбиты принято определять не коэффициентами ее уравнения, а двумя углами Ω и i, имеющими смысл, усматриваемый из следующего рисунка:



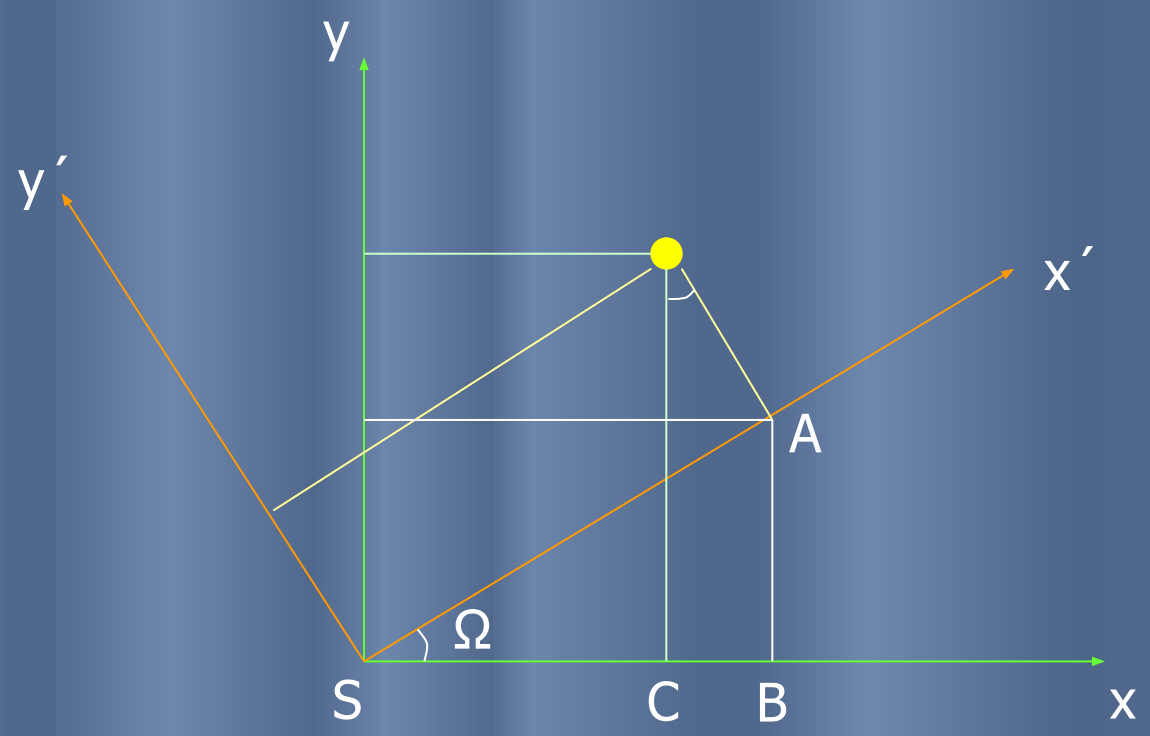
Ω – долгота восходящего узла, отсчитывается от оси x в сторону оси y (0°≤Ω≤360°);

i – наклон плоскости орбиты к основной плоскости (0° ≤i≤90°).

Свяжем постоянные a_1, a_2, a_3 с Ω и i. Для этого перейдем от системы координат Sxyz к системе Sx′y′z′ (в ней орбита – основная плоскость)

Сделаем два поворота: вокруг оси Sz на угол Ω и вокруг оси Sx′ на угол i.

Поворот вокруг оси Sz на угол Ω

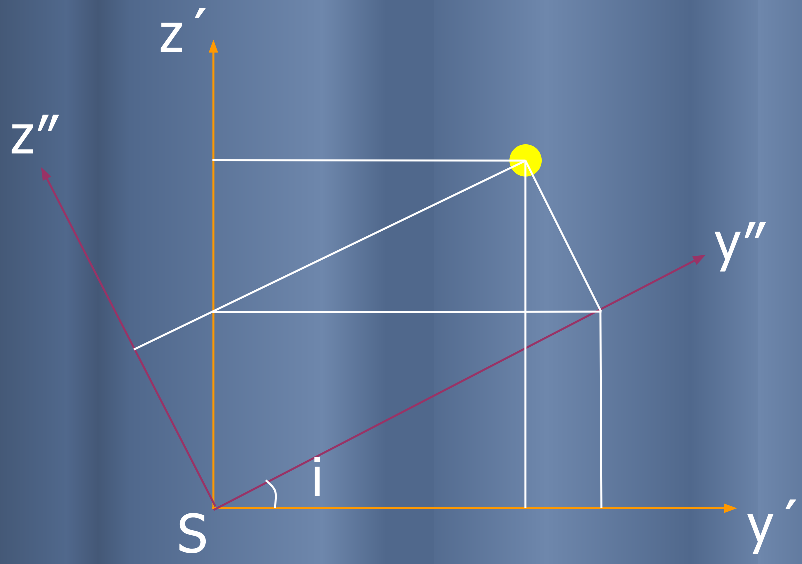


$$x = SB - CB = x'\cos\Omega - y'\sin\Omega,$$
$$y = x'\sin\Omega + y'\cos\Omega, \qquad (8)$$
$$z = z'.$$

В матричной форме этот поворот можно записать следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix}. \qquad (9)$$

Поворот вокруг оси Sx′ на угол i



$$x' = x'',$$
$$y' = y''\cos i - z''\sin i, \qquad (10)$$
$$z' = y''\sin i + z''\cos i.$$

В матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Vmatrix} \qquad (11)$$

Таким образом, после двух поворотов, имеем:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Vmatrix}$$

Перемножив поворотные матрицы получим:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Vmatrix} \qquad (12)$$

Так как компоненты удвоенной секториальной скорости в системе координат Oxyz есть a_1, a_2, a_3, а в плоскости орбиты – 0, 0, c, то они связаны друг с другом при помощи последнего соотношения:

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{Vmatrix}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} a_1 &= c \sin i \sin\Omega \\ a_2 &= -c \sin i \cos\Omega \\ a_3 &= c \cos i \end{aligned} \qquad (13)$$

Перепишем теперь интегралы площадей:

$$
\begin{aligned}
&x\dot{y} - y\dot{x} = c\sin i \sin\Omega, \\
&y\dot{z} - z\dot{y} = -c\sin i \cos\Omega, \qquad (14) \\
&z\dot{x} - x\dot{z} = c\cos i.
\end{aligned}
$$

Осталось связать здесь с элементами орбиты постоянную *c*. Для этого найдем сначала из уравнений движения (3) интеграл живых сил (интеграл энергии).

Умножим первое, второе и третье уравнения системы (3) на $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0 \quad & \Big| \; \dot{x} \\
\ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0 \quad & \Big| \; \dot{y} \\
\ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0 \quad & \Big| \; \dot{z}
\end{aligned}
$$

Сложив, получим:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})$$

Левую часть равенства

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)$$

можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Правую – в виде:

$$-\frac{1}{2}\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}\left(r^2\right) = -\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Интегрирование последнего выражения дает нам интеграл энергии:

$$\boxed{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)} \qquad (15)$$

Здесь h – постоянная интеграла энергии.

Так как движение происходит в плоскости, то координата z”=0, а радиус-вектор

$$r = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

Интеграл площадей и интеграл живых сил в плоскости орбиты будут иметь вид

$$x''y'' - y''x'' = c$$

$$\dot{x}''^2 + \dot{y}''^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right)$$

Перейдем теперь от прямоугольных координат x″, y″ к полярным координатам r, u

$$x'' = r\cos u, \qquad y'' = r\sin u$$

$$\dot{x}'' = \dot{r}\cos u - r\sin u \cdot \dot{u}, \qquad \dot{y}'' = \dot{r}\sin u + r\cos u \cdot \dot{u}$$

Интеграл площадей и интеграл живых сил в полярных координатах будут иметь вид

$$r^2\dot{u} = c, \tag{16}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{u}^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right). \tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) имеем

$$\dot{u} = \frac{c}{r^2} \longrightarrow \dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} = 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right)$$

Таким образом

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + 2\left(\frac{\mu}{r} + h\right)} \qquad (18)$$

При помощи (16) можно найти

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{c}{r^2} = -\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r}\right)$$

Уравнение (18) можно переписать в виде:

$$-\frac{d}{du}\left(\frac{c}{r}\right)=\sqrt{-\frac{c^2}{r^2}+2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)}$$

Преобразуем подкоренное выражение:

$$-\frac{c^2}{r^2}+2\frac{\mu}{r}+2h=2h+\frac{\mu^2}{c^2}-\left(-\frac{\mu}{c}+\frac{c}{r}\right)^2$$

Обозначим:

$$q=-\frac{\mu}{c}+\frac{c}{r},\quad Q^2=2h+\frac{\mu^2}{c^2}.$$

Имеем: $$\frac{dq}{du}=-\sqrt{Q^2-q^2}=-Q\sqrt{1-\left(\frac{q}{Q}\right)^2}.$$

Далее $$\frac{d\left(\dfrac{q}{Q}\right)}{du}=-\sqrt{1-\left(\frac{q}{Q}\right)^2}.$$

Введем замену $\sigma=\dfrac{q}{Q}.$

Получим: $$\frac{d\sigma}{du}=-\sqrt{1-\sigma^2},$$ или $$-\frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}=du.$$

Последнее выражение можно проинтегрировать

$$u = \arccos\sigma + \omega$$

где ω – постоянная интегрирования.

Отсюда $\sigma = \cos(u - \omega)$

Но $$\sigma = \frac{q}{Q} = \frac{-\frac{\mu}{c} + \frac{c}{r}}{\sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}}}.$$

Поэтому $$-\frac{\mu}{c} + \frac{c}{r} = \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}}\cos(u - \omega),$$

или $$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{c^2}+\frac{1}{c}\sqrt{2h+\frac{\mu^2}{c^2}}\cos(u-\omega).$$

Отсюда $$r=\frac{\dfrac{c^2}{\mu}}{1+\dfrac{c}{\mu}\sqrt{2h+\dfrac{\mu^2}{c^2}}\cos(u-\omega)}.$$

Сравнивая теперь со стандартным уравнением конического сечения

$$r=\frac{p}{1+e\cos v},$$ где $p=a(1-e^2)$ – параметр орбиты

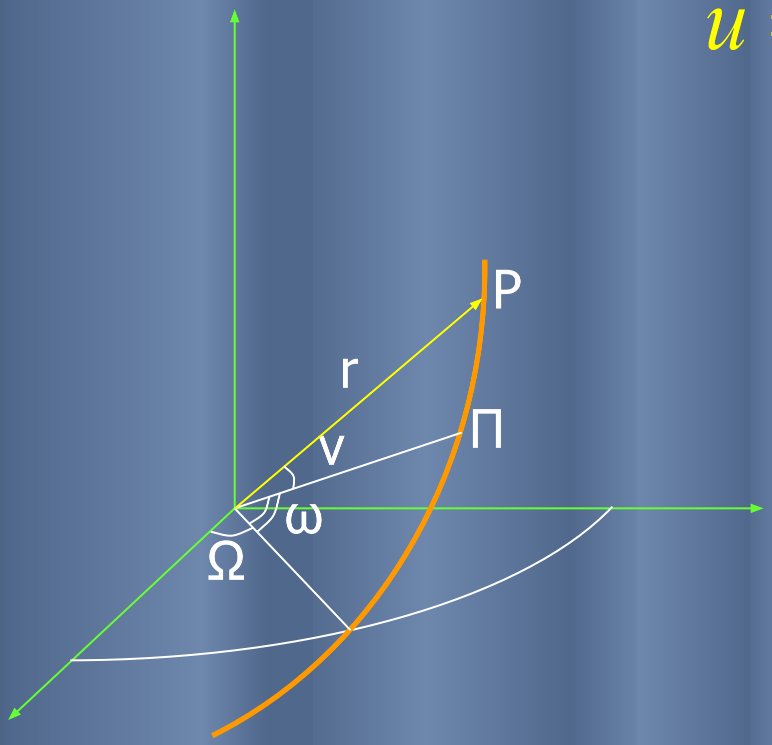
a – большая полуось

e – эксцентриситет

находим: $c=\sqrt{p\mu}, \quad h=-\dfrac{\mu}{2a}, \quad v=u-\omega.$

Здесь ω – аргумент перицентра (угловое расстояние перицентра от узла).

$u=v+\omega$ – аргумент широты.



Т.о. мы определили постоянные c и h через общепринятые элементы a, e, p.

С этими постоянными интеграл энергии

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \qquad (19)$$

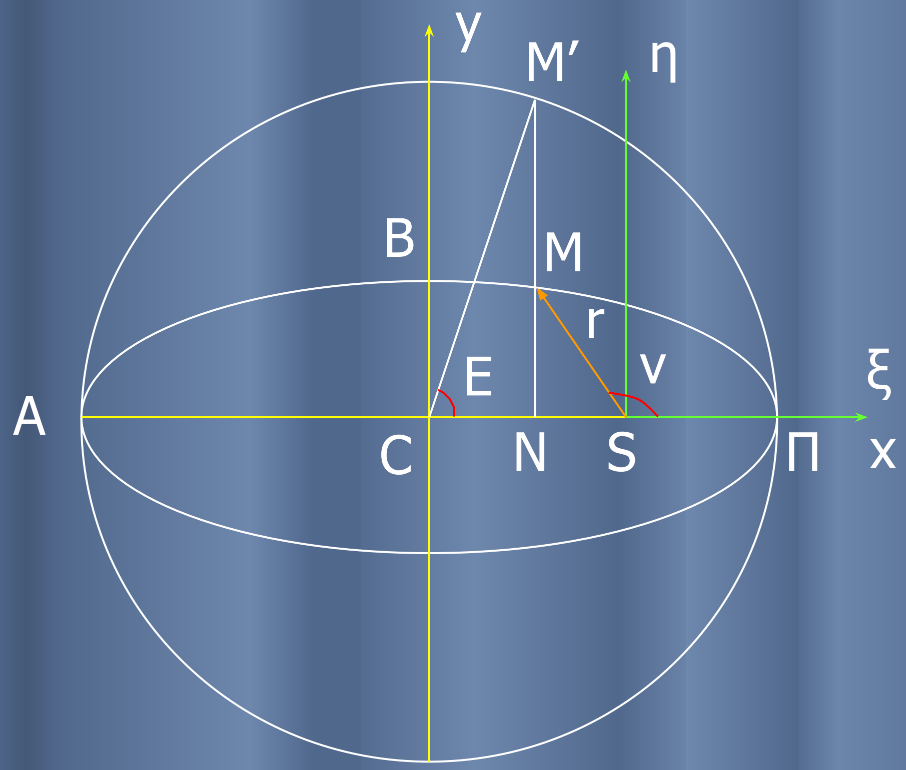
Уравнение траектории

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \qquad (20)$$

Уравнение интеграла площадей:

$$r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}. \qquad (21)$$

Введем для случая эллиптического движения некоторую вспомогательную переменную – эксцентрическую аномалию E:



Из рис. видно, что

$$CS = CN + NS = ae,$$

$$CN = a\cos E,$$

$$NS = -r\cos v.$$

Поэтому:

$$ae = a\cos E - r\cos v$$

Т.е. $$\boxed{r\cos v = a(\cos E - e).} \qquad (22)$$

Отношение малой и большой полуоси будет:

$$\frac{b}{a} = \frac{MN}{M'N} = \frac{y}{y'}$$ (см. след. слайд)

Здесь

$$b = a\sqrt{1-e^2}, \quad M'N = a\sin E, \quad MN = r\sin v.$$

Отсюда имеем:

$$\boxed{r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E.} \qquad (23)$$

Возводя (22) и (23) в квадрат и складывая, получим:

$$\boxed{r = a(1-e\cos E).} \qquad (24)$$

- $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ – уравнение эллипса
- $x'^2/a^2+y'^2/a^2=1$ – уравнение окружности
- $x=x'$
- $y=MN$
- $y`=M`N$

Подставляя (24) в (22) и (23), получим соотношения, связывающие истинную и эксцентрическую аномалии:

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E},$$
$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E}. \qquad (25)$$

Можно найти также соотношения, связывающие тангенсы половинных углов v и E:

$$r - r\cos v = a(1+e)(1-\cos E),$$
$$r + r\cos v = a(1-e)(1+\cos E). \qquad (25')$$

Делим первое на второе:

$$\frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\left(\frac{1-\cos E}{1+\cos E}\right).$$

Используя тригонометрические соотношения

$$1-\cos v = 2\sin^2\frac{v}{2}, \quad 1+\cos v = 2\cos^2\frac{v}{2},$$

окончательно находим:

$$\boxed{tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}.} \qquad (26)$$

Найдем теперь уравнение, связывающее переменную E со временем. Дифференцируя соотношение (26) получим:

$$\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}}\frac{dv}{dt}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{1}{\cos^2\frac{E}{2}}\frac{dE}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\cos^2\frac{E}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\frac{dv}{dt}.$$

Учитывая, что

$$\cos^2\frac{E}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos E),\qquad \cos^2\frac{v}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos v),$$

Имеем

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1+CosE}{1+Cosv}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\frac{dv}{dt}$$

Из интеграла площадей (21)

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2}$$

Используя также выражение для радиус-вектора (24)

$$\boxed{r = a(1 - e\cos E).}$$

и второе из соотношений (25')

$$r + r\cos v = a(1 - e)(1 + \cos E).$$

находим:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{1 - e\cos E},$$

Откуда имеем

$$(1 - e\cos E)\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

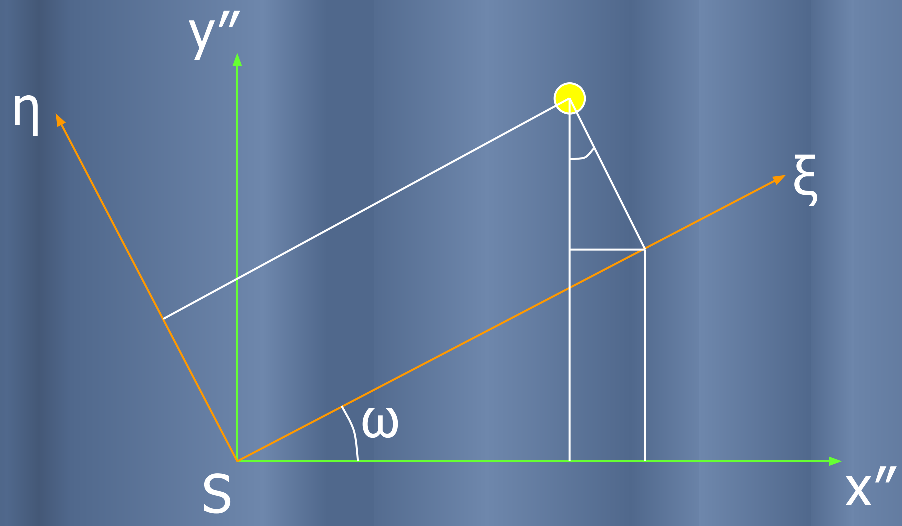
Интегрируя, находим:

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau). \qquad (27)$$

Здесь τ – постоянная интегрирования (момент прохождения через перигелий), а само уравнение – знаменитое уравнение Кеплера.

Чтобы связать движение в плоскости орбиты с движением в пространстве, надо сделать еще один поворот системы координат.

Поворот системы координат Sx″y″z″ вокруг оси Sz″ на угол ω:



$$x'' = \xi\cos\omega - \eta\sin\omega,$$
$$y'' = \xi\sin\omega + \eta\cos\omega,$$
$$z'' = \zeta.$$

В матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, получить выражения для координат x, y, z через элементы орбиты можно при помощи трех поворотных матриц:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix}.$$

Сокращенно это можно записать так:

$$\{x, y, z\} = Z(\Omega)X(i)Z(\omega)\{\xi, \eta, 0\}, \qquad (28)$$

где $X(i)$ – матрица, соответствующая повороту вокруг оси абсцисс на угол i, а $Z(\Omega)$ и $Z(\omega)$ матрицы поворота вокруг оси аппликат на угол Ω и угол ω соответственно.

Так как движение в задаче двух тел происходит в плоскости, то в прямоугольной орбитальной системе координат $\{\xi, \eta, \zeta\}$ координата $\zeta=0$, а координаты ξ и η, как это следует из рисунка на слайде 35 и соотношений (22) и (23)

$$\xi = r\cos v = a(\cos E - e),$$
$$\eta = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E. \qquad (29)$$

Уравнение Кеплера, связывающее эксцентрическую аномалию и время, обычно записывают в виде:

$$E - e\sin E = M,$$

где $M = n(t - \tau).$ $\longrightarrow$ средняя аномалия

Среднюю аномалию обычно представляют в виде

$M = n(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) + M_0$ где $M_0 = n(\mathrm{t}_0 - \tau)$

Величина $n = \sqrt{\mu / a^3}$ есть среднее движение по орбите.

Формулы, связывающие координаты x, y, z с элементами орбиты

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix}.$$

$$\xi = r\cos v = a(\cos E - e),$$

$$\eta = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E.$$

$$E - e\sin E = M,$$

$$M = n(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) + M_0$$

- Формулы для скоростей находим дифференцированием формул для координат

$$\begin{Vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\cos\Omega & -\sin\Omega & 0\\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & -\sin i\\ 0 & \sin i & \cos i\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\\ 0\end{Vmatrix}$$

$$\dot{\xi} = -a\sin E\cdot\dot{E}$$

$$\dot{\eta} = a\sqrt{1-e^{2}}\cos E\cdot\dot{E}$$

$$\dot{E} = \frac{n}{1-e\cos E}$$

- Формулы для координат и скоростей представляют также в виде

$$x = P_x \xi + Q_x \eta \qquad \dot{x} = \dot{P}_x \xi + \dot{Q}_x \eta$$

$$y = P_y \xi + Q_y \eta \qquad \dot{y} = \dot{P}_y \xi + \dot{Q}_y \eta$$

$$z = P_z \xi + Q_z \eta \qquad \dot{z} = \dot{P}_z \xi + \dot{Q}_z \eta$$

Проективные коэффициенты

$$P_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i$$

$$P_y = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i$$

$$P_z = \sin\omega\sin i$$

$$Q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i$$

$$Q_y = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i$$

$$Q_z = \cos\omega\sin i$$