

**Формирование базовых
компетенций студентов
технического университета**

НОЦ 4

**М.А.Вигура, О.А.Кеда, А.Ф.Рыбалко,
Н.М.Рыбалко, А.Б.Соболев**

Математика
Поточная практика 7.3
Аналитическая геометрия
Преобразования координат

УГТУ-УПИ
2007г.

Цель занятия:

- 1.** Овладеть соответствующим математическим аппаратом для дальнейшего изучения курса математики, демонстрировать и использовать математические методы в ходе изучения специальных дисциплин для будущей профессиональной деятельности.
- 2.** Быть в состоянии изобразить кривую второго порядка, найдя координаты, в которых она имеет канонический вид.

Формируемые компетенции по ФГОС:

ОНК1: способность и готовность использовать фундаментальные математические законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и теоретического исследования.

ИК1: способность использовать современные средства вычислительной техники, коммуникаций и связи.

ИК4: готовность работать с информацией из различных источников (сбор, обработка, анализ, систематизация, представление).

СЛК3: способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Преобразования координат



Преобразования координат

1. Теоретическая
часть

2. Задачи

3. Решения задач

Оглавление



1. Преобразования координат

Параллельный перенос

Поворот координатных осей

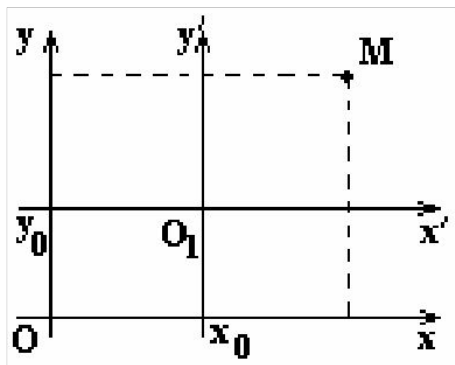
Изменение начала координат

и поворот осей

2. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду



Параллельный перенос



$M(x, y), M(x', y')$:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \quad (2)$$

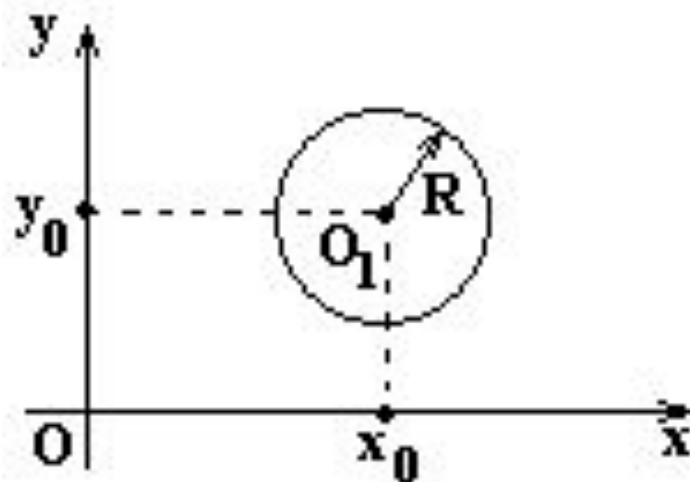


Преобразования координат

[Оглавление:](#)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

уравнение окружности
с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$
и радиусом R .



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad - \quad \text{уравнения эллипса и}$$

гиперболы с центром симметрии в точке $O_1(x_0, y_0)$;

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad - \quad \text{уравнение параболы с}$$

вершиной в точке $O_1(x_0, y_0)$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Уравнения **директрис** эллипса и гиперболы с центром симметрии в точке $O_1(x_0, y_0)$: $x - x_0 = \pm \frac{a}{e}$,

директрисы параболы с вершиной в точке $O_1(x_0, y_0)$:

$$x - x_0 = -\frac{p}{2}.$$

Уравнения **асимптот** гиперболы с центром симметрии в точке $O_1(x_0, y_0)$: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$.



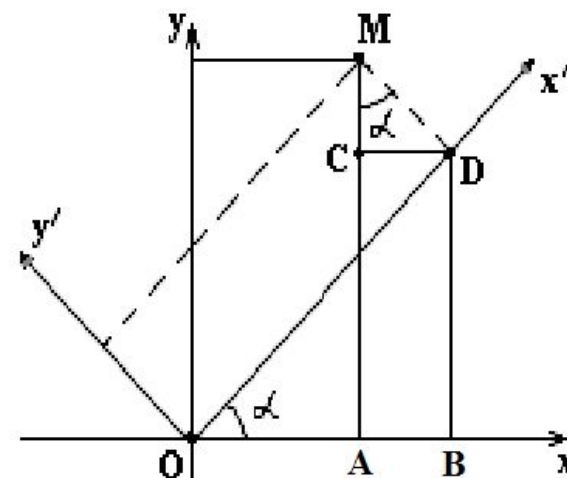
Поворот координатных осей

Повернём оси координат на угол α относительно исходной системы координат.

$$M(x, y) \rightarrow M(x', y')$$

В треугольнике CMD $\angle CMD = \alpha$,

$$OD = x', MD = y'.$$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

$$x = OA = OB - AB = OB - CD, \quad y = MA = AC + CM = DB + CM.$$

Поскольку

$$OB = x' \cos \alpha, \quad CD = y' \sin \alpha,$$

$$CM = y' \cos \alpha, \quad DB = x' \sin \alpha,$$

то

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Уравнения директрис эллипса (гиперболы) и параболы принимают вид:

$$x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \pm \frac{a}{e};$$

$$x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = -\frac{p}{2}.$$



Изменение начала координат и поворот осей

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha, \\ y' = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$



2. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Найдем систему координат, в которой кривая имеет канонический вид. Перенесем начало координат в центр кривой (x_0, y_0) , повернем координатные оси на угол, совмещающий оси симметрии кривой с координатными осями с помощью формул (1) и (3).

Алгебраически это приведет к исчезновению членов с произведением текущих координат и членов, содержащих их в первой степени.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Система уравнений, определяющих центр кривой (если он существует):

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Кривые второго порядка, имеющие единственный центр, называются **центральными**.

После переноса начала координат в центр (x_0, y_0) уравнение кривой примет вид

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0, \quad (7)$$

где $F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Чтобы получить каноническое уравнение кривой подвергнем уравнение (7) преобразованию поворота осей координат на угол α .

После преобразования получим:

$$x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha,$$

$$y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha,$$

где x'', y'' - новые координаты.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Выпишем из преобразованного уравнения слагаемые второго порядка:

$$A(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)^2 + 2B(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha) \cdot (x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha) + C(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha)^2.$$

Из этих слагаемых нас интересует слагаемое, содержащее произведение $x'' \cdot y''$, коэффициент перед которым равен

$$B_1 = -2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 2B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha.$$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Найдём угол поворота из условия

$$B_1=0: 2B \cos 2\alpha = (A-C) \sin 2\alpha .$$

Если $A = C$, то $\cos 2\alpha = 0$ и в качестве угла поворота можно выбрать $\alpha = \frac{\pi}{4}$; если $A \neq C$, то выбираем $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C}$.

В новой системе координат получим каноническое уравнение:

$$A_1(x'')^2 + C_1(y'')^2 + F_2 = 0$$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Задача №:

<u>1</u>	
<u>2</u>	
<u>3</u>	
<u>4</u>	
<u>5</u>	
<u>6</u>	
<u>7</u>	
<u>8</u>	
<u>9</u>	



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Решение задачи №:

<u>1</u>	
<u>2</u>	
<u>3</u>	
<u>4</u>	
<u>5</u>	
<u>6</u>	
<u>7</u>	
<u>8</u>	
<u>9</u>	



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Преобразовать уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2$$

поворотом осей на 45° против часовой стрелки.

Задача 1

Ответ: $x'y' = a^2/2$.

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Привести уравнение

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

к каноническому виду и построить кривую.

Задача 2

Ответ: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1$

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Определить вид кривой

$$\frac{5}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{7}{4}y^2 = 2.$$

Задача 3

Ответ: $x'^2 + 2y'^2 = 2.$

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Установить, какую линию
определяет уравнение
 $x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y = 0$.

Задача 4

Ответ: Эллипс

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

Задача 5

Ответ: $y'' = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''^2.$

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Какую линию определяет уравнение
 $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$?

Задача 6

Ответ: $2x - y + 3 = 0$ и $2x - y - 1 = 0$.

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Какую линию определяет уравнение
$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 12 = 0?$$

Задача 7

Ответ: Мнимый эллипс

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Составить уравнение параболы, если ее фокус находится в точке $F(2, -1)$ и уравнение директрисы $D: x - y - 1 = 0$.

Задача 8

Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Написать уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ и уравнение директрисы $3x - y + 3 = 0$.

Задача 9

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0$.

[Решение:](#)



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Так как $\alpha = -45^\circ$, то $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$, $\sin \alpha = -\sqrt{2}/2$.

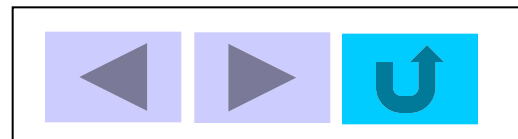
Отсюда преобразование поворота принимает вид (см. п.4.2):

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2 \cdot (x' + y'), \\ y = \sqrt{2}/2 \cdot (y' - x'). \end{cases}$$

Подстановка в исходное уравнение дает $x'y' = a^2/2$.

Решение [задачи 1](#)

Ответ: $x'y' = a^2/2$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Сгруппируем члены этого уравнения, содержащие одноименные координаты:

$$(5x^2 - 30x) + (9y^2 + 18y) + 9 = 0, \text{ или } 5(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) + 9 = 0.$$

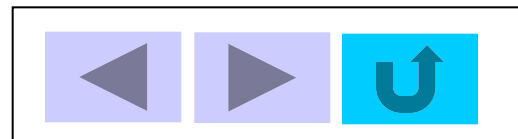
Дополняем члены в скобках до полных квадратов:

$$5(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) + 9 = 0, \text{ или } 5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 45.$$

Обозначаем $x' = x - 3$, $y' = y + 1$, $x_0 = 3$, $y_0 = -1$, то есть точка $O_1(3, -1)$ – центр кривой.

Решение [задачи 2](#)

Ответ: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1$



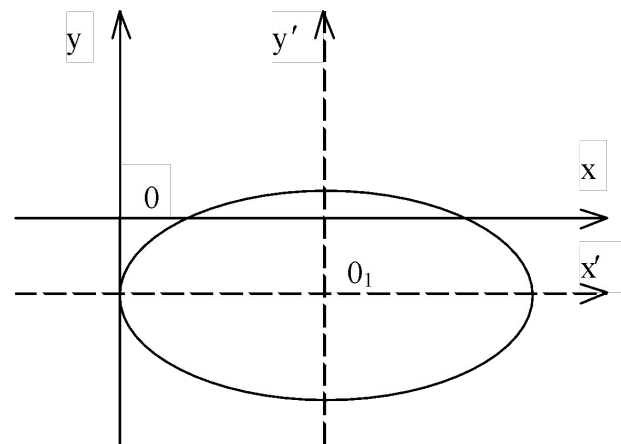
Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Уравнение в новой системе координат принимает вид:

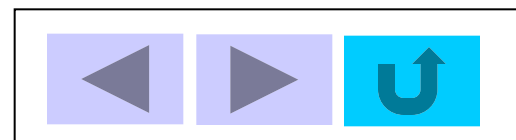
$$5x'^2 + 9y'^2 = 45 \rightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1$$

и определяет эллипс с полуосями $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, который в исходной системе координат имеет центр в точке $O_1(3, -1)$.



Решение [задачи 2](#)

Ответ: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Определим угол поворота осей по формуле (7):

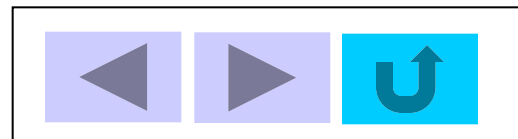
$$A = \frac{5}{4}, C = \frac{7}{4}, B = \frac{\sqrt{3}}{4}, A \neq C \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$$

Подвергнем уравнение кривой преобразованию:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = x' \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \frac{1}{2}, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = -x' \frac{1}{2} + y' \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Решение [задача 3](#)

Ответ: $x'^2 + 2y'^2 = 2.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

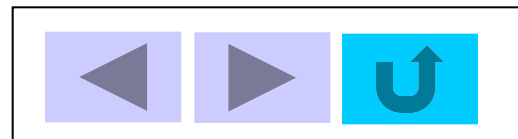
Получим уравнение эллипса:

$$\frac{5}{4} \left(x' \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x' \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y' \right) + \frac{7}{4} \left(-\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y' \right)^2 = 2$$

$$x'^2 + 2y'^2 = 2.$$

Решение [задача 3](#)

Ответ: $x'^2 + 2y'^2 = 2.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Перенесем начало координат в точку $O_1(x_0, y_0)$:
$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x' + x_0)^2 + (x' + x_0)(y' + y_0) + (y' + y_0)^2 - 2(x' + x_0) + 3(y' + y_0) &= 0, \\ x'^2 + x'y' + y'^2 + (2x_0 + y_0 - 2)x' + (x_0 + 2y_0 + 3)y' + & \\ + x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 - 2x_0 + 3y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Положим $2x_0 + y_0 - 2 = 0$, $x_0 + 2y_0 + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x_0 = 7/3 \text{ и } y_0 = -8/3.$$

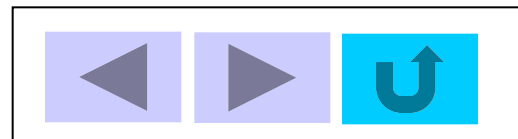
Координаты нового начала координат $O_1(7/3, -8/3)$.

Уравнение принимает вид $x'^2 + x'y' + y'^2 = 93/25$,

не содержит x' и y' в первой степени.

Решение [задача 4](#)

Ответ: $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Повернем оси координат на угол α ,

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\ y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha \end{cases}$$

$$(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot x''^2 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot x'' y'' + (\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot y''^2 = 93/25.$$

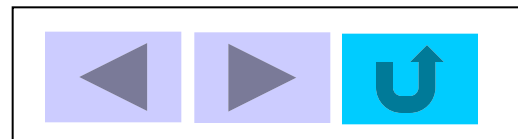
Пусть $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$, $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm 45^\circ$.

Возьмем $\alpha = 45^\circ$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$.

При этом $\frac{3}{2} x''^2 + \frac{1}{2} y''^2 = \frac{93}{25}$, т.е. исчез член $x' y'$.

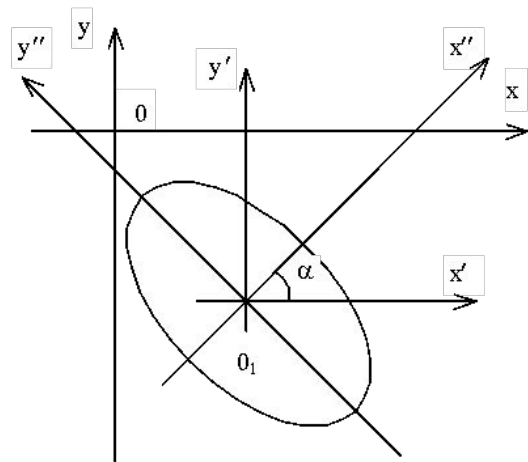
Решение [задача 4](#)

Ответ: $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

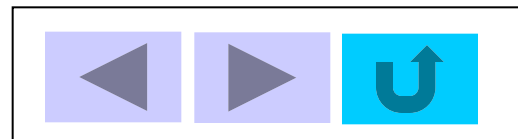


$$\frac{x''^2}{62/25} + \frac{y''^2}{186/25} = 1 \text{ - уравнение эллипса с полуосями}$$

$$a = \sqrt{62}/5 \approx 1,5; \quad b = \sqrt{186}/5 \approx 2,7$$

Решение [задача 4](#)

Ответ: $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Данная кривая центра не имеет, т.к. система

$$\begin{cases} 4x_0 - 2y_0 - 1 = 0, \\ -2x_0 + y_0 - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{несовместна.}$$

Не меняя начала координат, повернем оси на некоторый угол α ,

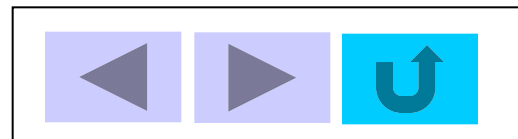
$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Перейдем к новым координатам:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 &= (4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) \cdot x'^2 + \\ &+ 2 \cdot (-4\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) \cdot x'y' + \\ &+ (4\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) \cdot y'^2 + \\ &+ 2 \cdot (-\cos\alpha - 7\sin\alpha) \cdot x' + 2 \cdot (\sin\alpha - 7\cos\alpha) \cdot y' + 7 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Решение [задачи 5](#)

Ответ:



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Подберем угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль.
 $4\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$

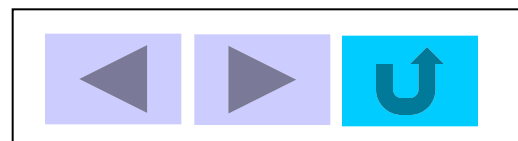
$$2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\cos^2\alpha = 0, \quad 2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \begin{cases} 2, \\ -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Возьмем первое решение (поворот осей на острый угол),}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Решение [задачи 5](#)

Ответ:



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Из (*) находим уравнение данной кривой в системе x', y' :

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0. \quad (**)$$

Параллельный перенос осей Ox', Oy' получим

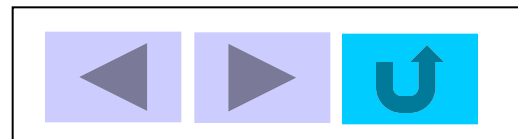
из (**) выделением полного квадрата:

$$5\left(y'^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}y'\right) - 6\sqrt{5}x' + 7 = 0$$

$$\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0.$$

Решение [задачи 5](#)

Ответ:



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Если $x' = x'' + \sqrt{5}/5$, $y' = y'' + \sqrt{5}/5$,

то в координатах (x'', y'') уравнение данной линии:

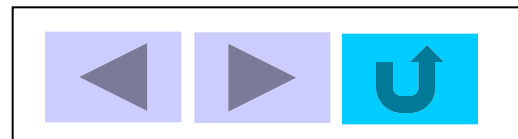
$$y'' = \frac{6\sqrt{5}}{5} x''^2.$$

Это парабола с параметром $p = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ и с вершиной в начале координат системы $x''y''$, симметричная относительно оси x'' в положительном направлении этой оси.

Координаты вершины в системе $x'y'$ $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ а в системе $xу$ $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

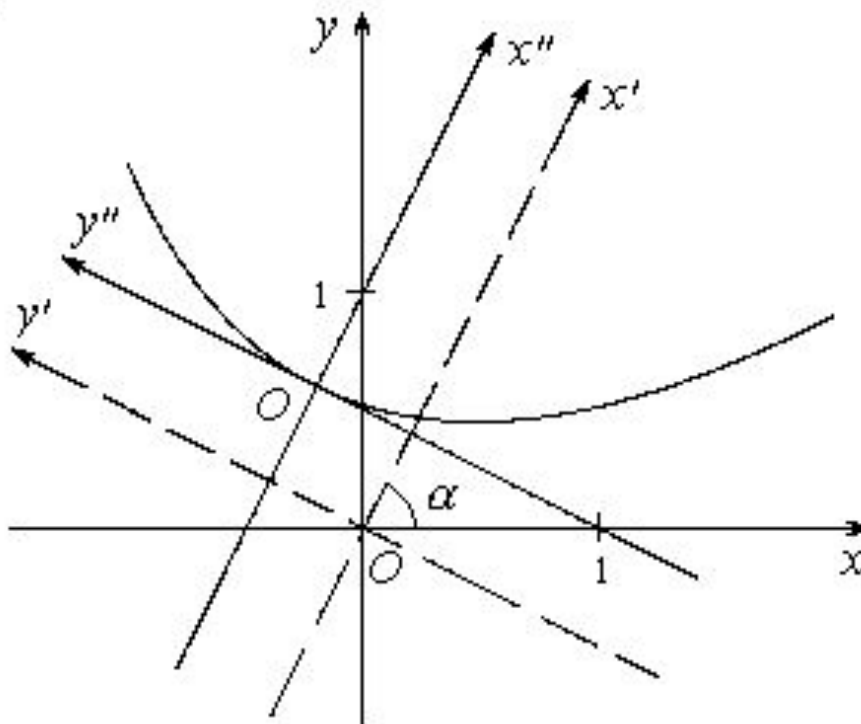
Решение [задачи 5](#)

Ответ:



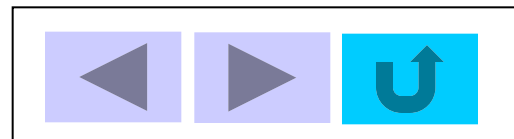
Преобразования координат

[Оглавление:](#)



Решение [задачи 5](#)

Ответ:



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Система для нахождения центра кривой в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} 4x_0 - 2y_0 + 2 = 0, \\ -2x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$2x_0 - y_0 + 1 = 0$, линия имеет бесконечно много центров, составляющих прямую $2x - y + 1 = 0$.

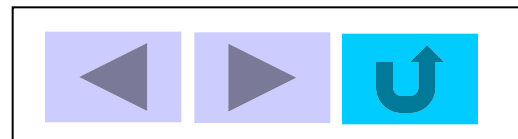
$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = (2x - y + 3)(2x - y - 1) = 0$$

Пара параллельных прямых:

$$2x - y + 3 = 0 \text{ и } 2x - y - 1 = 0.$$

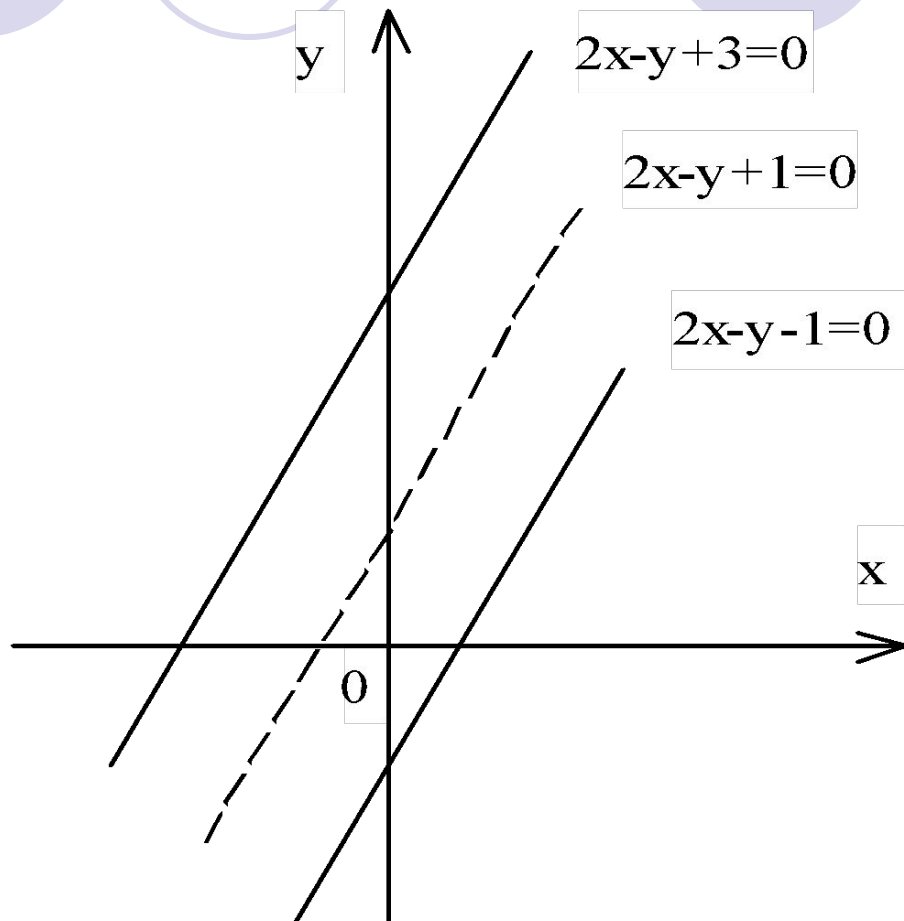
Решение [задачи 6](#)

Ответ: $2x - y + 3 = 0$ и $2x - y - 1 = 0$.



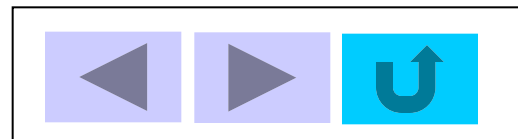
Преобразования координат

[Оглавление:](#)



Решение [задачи 6](#)

Ответ: $2x - y + 3 = 0$ и $2x - y - 1 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Уравнение $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y + 12 = 0$

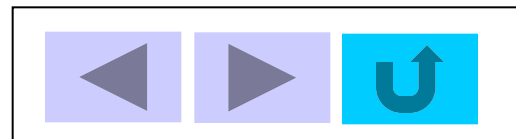
приводится к каноническому виду $x'^2 + 4y'^2 + 4 = 0$,

$$\text{или } \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = -1.$$

Это уравнение похоже на каноническое уравнение эллипса. Однако оно не определяет на плоскости никакого действительного образа, так как для любых действительных чисел x', y' левая часть его не отрицательна, а справа стоит -1 . Такое уравнение и аналогичные ему называются уравнениями **мнимого эллипса**.

Решение [задачи 7](#)

Ответ: Мнимый эллипс



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Пусть в некоторой системе координат $x'O_1y'$ парабола имеет канонический вид $y'^2 = 2px'$.

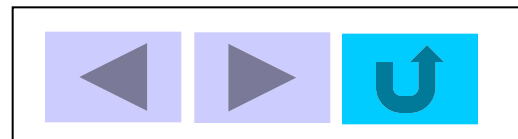
Если прямая $y = x - 1$ является ее директрисой, то оси системы координат $x'O_1y'$ параллельны директрисе.

Координаты вершины параболы (совпадает с новым началом координат O_1) найдем как середину отрезка нормали к директрисе $D: x - y - 1 = 0$, проходящей через фокус $F(2, -1)$.

Ось O_1x' задается уравнением $y = -x + b$, $-1 = -2 + b \Rightarrow$
 $b = 1$, $O_1x': y = -x + 1$.

Решение [задачи 8](#)

Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Координаты точки K пересечения директрисы и оси O_1x' :

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightarrow x_K = 1, y_K = 0.$$

$$p = KF = \sqrt{2}, y'^2 = 2\sqrt{2} \cdot x'.$$

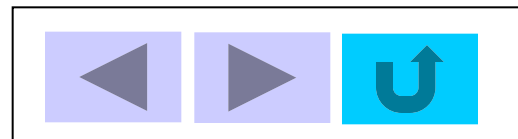
Координаты нового начала координат $O_1(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; y_0 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Оси новой системы координат повернуты относительно старой на угол (-45°) .

Решение [задачи 8](#)

Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

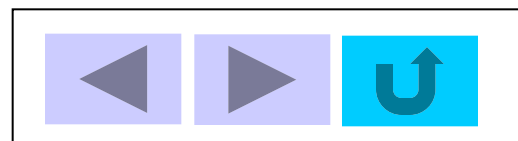
$$\text{Если } \begin{cases} x' = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cos(-45^\circ) + \left(y + \frac{1}{2}\right) \sin(-45^\circ), \\ y' = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \sin(-45^\circ) + \left(y + \frac{1}{2}\right) \cos(-45^\circ) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 2), \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y - 1), \end{cases}$$

$$\text{то } y'^2 = 2\sqrt{2} \cdot x' \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y - 1)^2 = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 2),$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0.$$

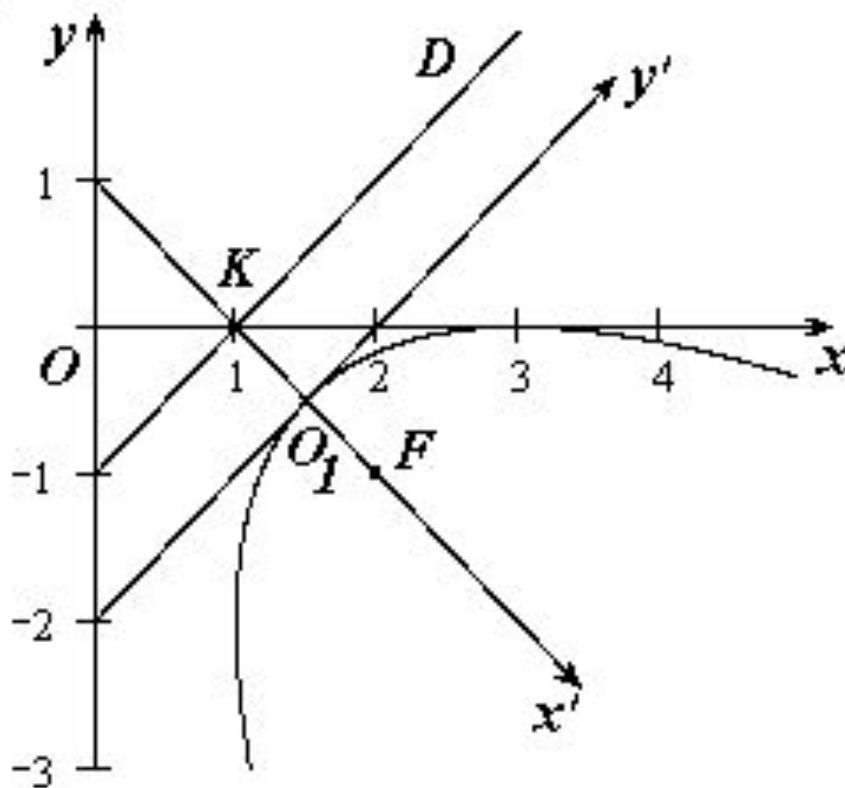
Решение [задачи 8](#)

Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.



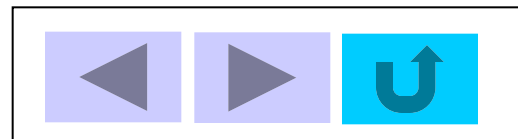
Преобразования координат

[Оглавление:](#)



Решение [задачи 8](#)

Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Если $D_1: y = 3x + 3$,

то новая ось координат Ox' имеет вид

$$y = (-1/3)x + b,$$

проходит через точку $F(2, -3)$:

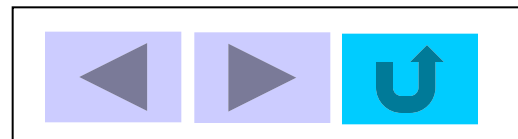
$$-3 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -7/3,$$

и Ox' задается уравнением

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}, \quad 3y + x + 7 = 0.$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

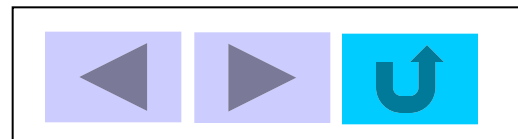
Пусть начало новой системы координат находится в точке $O_1(x_0, y_0)$.

Точка K - точка пересечения директрисы D_1 и оси Ox'' :

$$\begin{cases} 3x - y + 3 = 0, \\ 3y + x + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x_K = -\frac{8}{5}, y_K = -\frac{9}{5}.$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

В новых осях координат $Ox'y'$ гипербола имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

KF - расстояние от фокуса $F(2, -3)$ до директрисы

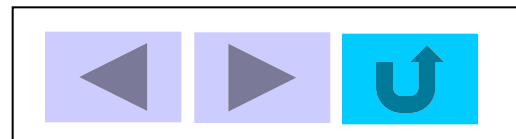
$$D_1: 3x - y + 3 = 0.$$

$$KF = \left| \frac{3 \cdot (2) - (-3) + 3}{\sqrt{9+1}} \right| = \frac{12}{\sqrt{10}}, \quad O_1K = \frac{a}{e} = \frac{a}{\sqrt{5}}, \quad O_1F = c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$O_1K = O_1F - KF \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{5}} = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{12}{\sqrt{10}},$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

По условию $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}, \quad b^2 = 4a^2,$

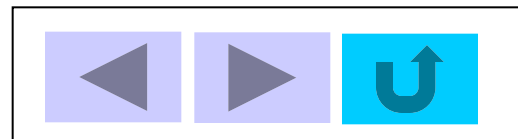
$$\frac{a}{\sqrt{5}} = a\sqrt{5} - \frac{12}{\sqrt{10}} \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad b^2 = 18.$$

Уравнение гиперболы в новых координатах имеет вид

$$\frac{x'^2}{9/2} - \frac{y'^2}{18} = 1.$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0.$



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

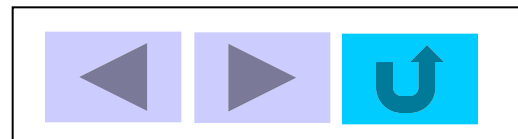
Координаты нового центра найдем, зная что точка K делит отрезок O_1F в отношении

$$\lambda = \frac{O_1K}{KF} = \frac{a/\sqrt{5}}{12/\sqrt{10}} = \frac{1}{4}:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_K = \frac{x_0 + \frac{1}{4}x_F}{1 + 1/4}, \\ y_K = \frac{y_0 + \frac{1}{4}y_F}{1 + 1/4}, \end{array} \right. \quad \text{откуда} \quad \begin{array}{l} x_0 = -\frac{5}{2}, \\ y_0 = -\frac{3}{2}. \end{array}$$

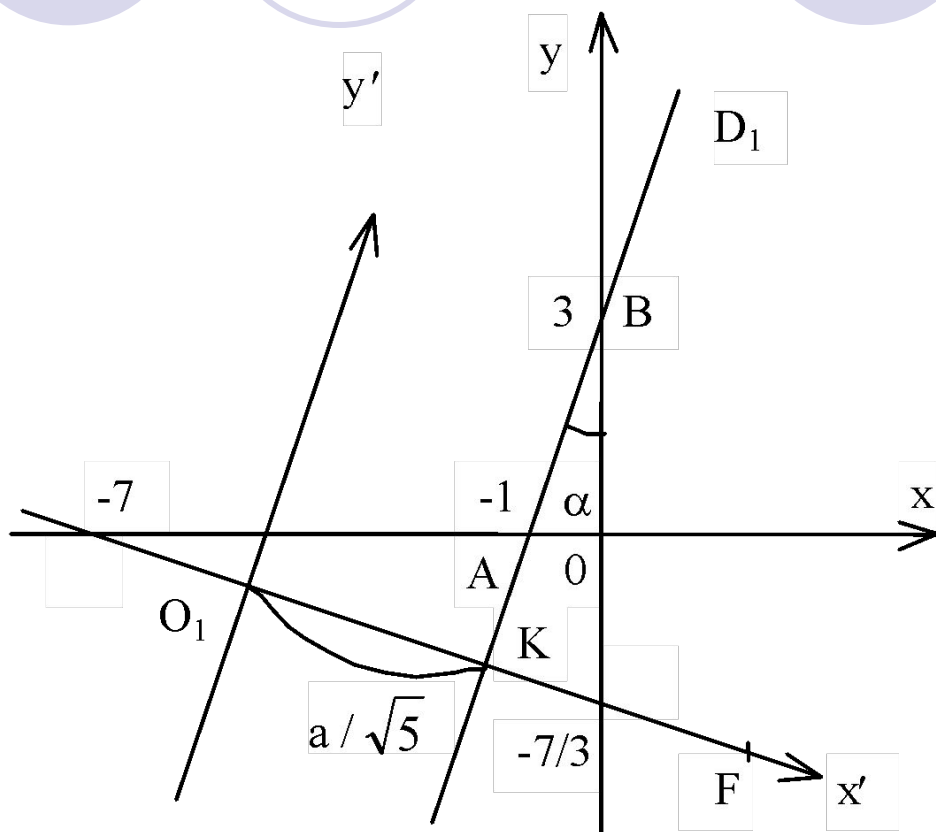
Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0$.



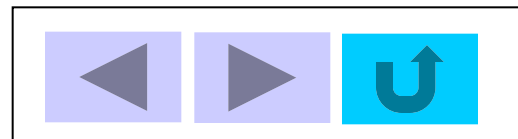
Преобразования координат

[Оглавление:](#)



Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Из ΔABO : $\sin\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$.

Так как поворот совершается на угол $(-\alpha)$:

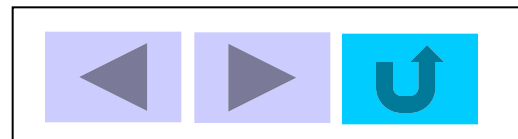
$$\sin(-\alpha) = -1/\sqrt{10}, \quad \cos(-\alpha) = 3/\sqrt{10},$$

то формулы преобразований координат принимают вид:

$$\begin{cases} x' = \left(x + \frac{5}{2}\right) \frac{3}{\sqrt{10}} + \left(y + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \\ y' = -\left(x + \frac{5}{2}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \left(y + \frac{3}{2}\right) \frac{3}{\sqrt{10}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x - y + 6), \\ y' = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y + 7) \end{cases}$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0$.



Преобразования координат

[Оглавление:](#)

Уравнение гиперболы:

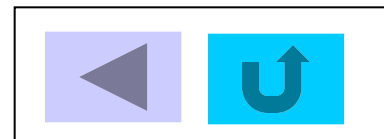
$$\frac{\frac{1}{10}(3x - y + 6)^2}{9/2} - \frac{\frac{1}{10}(x + 3y + 7)^2}{18} = 1,$$

$$4(3x - y + 6)^2 - (x + 3y + 7)^2 = 180,$$

$$7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0.$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $7x^2 - y^2 - 6xy - 18y + 26x + 17 = 0.$



В результате студент должен уметь:

- 1. Записать формулы преобразования координат при параллельном переносе и повороте осей.**

- 2. Приводить общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью преобразования координат.**

Перечень источников, список дополнительной литературы по теме.

1. Сборник задач по математике для вузов: В 4 ч. Ч. 1: Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, И. Б. Кожухов и др. / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.: ил.; 21 см. - ISBN 5-940520-34-0.
2. Клетеник, Давид Викторович. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. Н.В. Ефимова. - 15-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1998. - 223с. - ISBN 5-02-015080-0.
3. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. - 304с.: ил.; 22 см. - ISBN 5-329-00326-1.
4. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры: Сб. комплектов вариантов задач по курсу "Высшая математика". Ч. 1 / Урал. гос. техн. ин-т; Сост. О. А. Белослудцев, М. А. Вигура, Н. В. Кожевников, А. Ф. Рыбалко и др. ; Науч. ред. С. И. Машаров. - Екатеринбург: УГТУ, 1997. - 110 с. - ISBN 5-230-17046-8.