

Формирование базовых компетенций студентов технического университета

НОЦ 4

**М.А.Вигура, О.А.Кеда, А.Ф.Рыбалко,
Н.М.Рыбалко, А.Б.Соболев**

**Математика
Поточная практика 7.4
Аналитическая геометрия
Кривые на плоскости**

**УГТУ-УПИ
2007г.**

Цель занятия:

- 1.** Овладеть соответствующим математическим аппаратом для дальнейшего изучения курса математики, демонстрировать и использовать математические методы в ходе изучения специальных дисциплин для будущей профессиональной деятельности.
- 2.** Научиться изображать кривые, заданные в полярных координатах.

Формируемые компетенции по ФГОС:

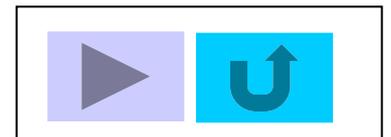
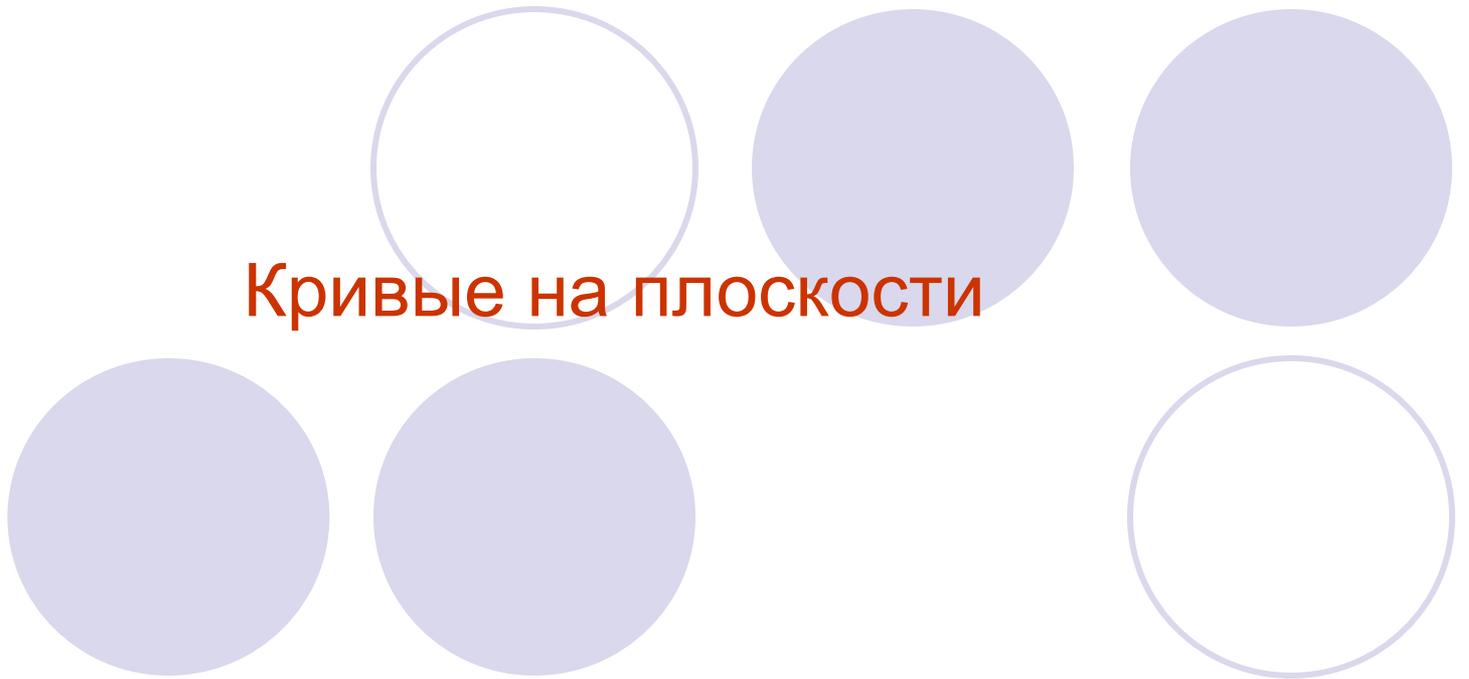
ОНК1: способность и готовность использовать фундаментальные математические законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и теоретического исследования.

ИК1: способность использовать современные средства вычислительной техники, коммуникаций и связи.

ИК4: готовность работать с информацией из различных источников (сбор, обработка, анализ, систематизация, представление).

СЛК3: способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Кривые на плоскости



Кривые на плоскости

1. Теоретическая

часть

2. Задачи

3. Решения задач

Оглавление



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

1. Линии в полярной системе координат

- [-полярные координаты на плоскости](#)
- [-связь полярных координат с декартовыми](#)
- [-уравнения линий в полярной системе координат](#)
- [-спирали](#)
- [-розы](#)

2. Параметрическое задание линий

- [-окружность](#)
- [-циклоида](#)
- [-астроида](#)

3. Кривые третьего порядка

- [-полукубическая парабола](#)
- [-локон Аньези](#)
- [-декартов лист](#)

4. Кривые четвертого порядка

- [-улитка Паскаля](#)
- [-кардиоида](#)
- [-лемниската Бернулли](#)

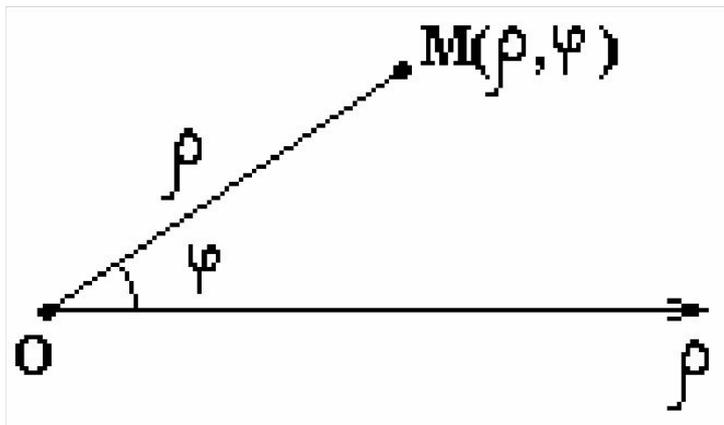


Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

1. Линии в полярной системе координат

Полярные координаты на плоскости



$$|\overrightarrow{OM}| = \rho$$

$$0 \leq \rho \leq \infty,$$

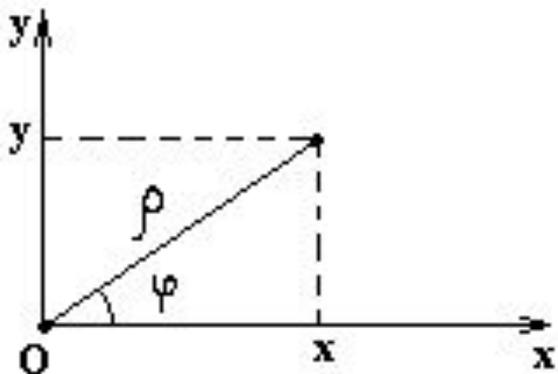
$$0 \leq \varphi \leq \infty$$



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Связь полярных координат с декартовыми



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$



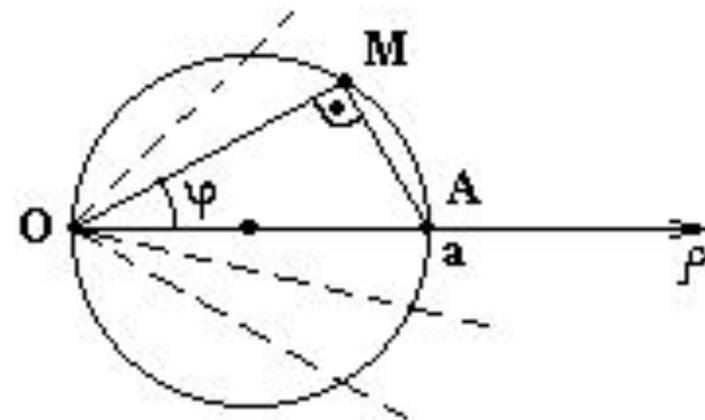
Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Уравнения линий в полярной системе координат

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \text{ - каноническое уравнение}$$

окружности с центром
в точке $(a/2, 0)$ и радиусом $a/2$,



$$\rho = a \cos \varphi, \quad a = \text{const} > 0.$$



Уравнения линий в полярной системе координат

$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$ - кривые второго порядка, если полюс находится в фокусе, полярная ось направлена из фокуса к ближайшей вершине (для гиперболы этим уравнением определяется только одна ветвь); p - фокальный параметр, e - эксцентриситет кривой.



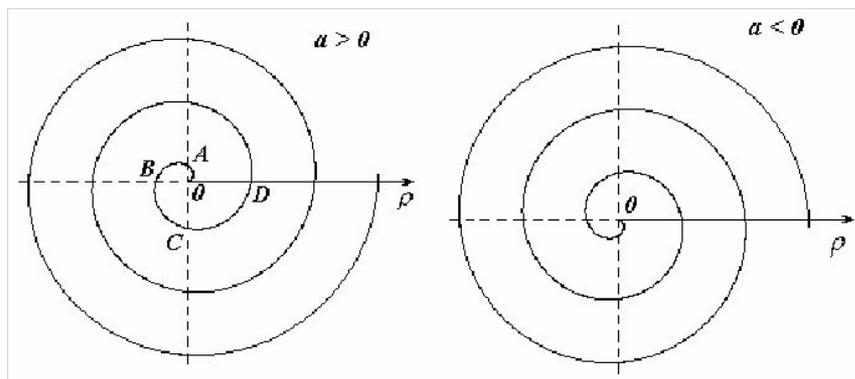
Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Спирали

Архимедова спираль - путь, описываемый точкой, движущейся с постоянной скоростью по лучу, вращающемуся около полюса O , с постоянной скоростью

$$\omega, \quad a = \frac{v}{\omega} :$$



$$\rho = a\varphi, \quad 0 < \varphi < \infty, \quad \rho \in R.$$



Спирали

Гиперболическая спираль:

$$\rho = \frac{a}{\varphi}, \quad \varphi \in (0, \infty), \quad \rho \in R.$$

Логарифмическая спираль:

$$\rho = a^\varphi, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \varphi \in [0, \infty), \quad \rho \in R.$$



Кривые на плоскости

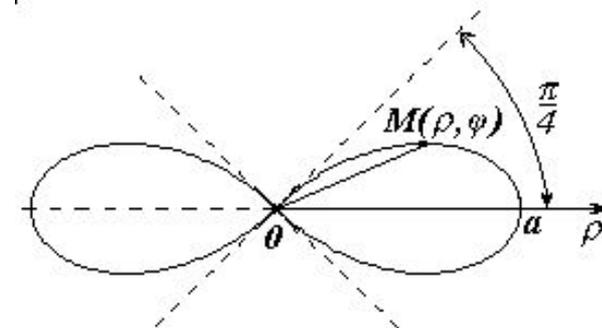
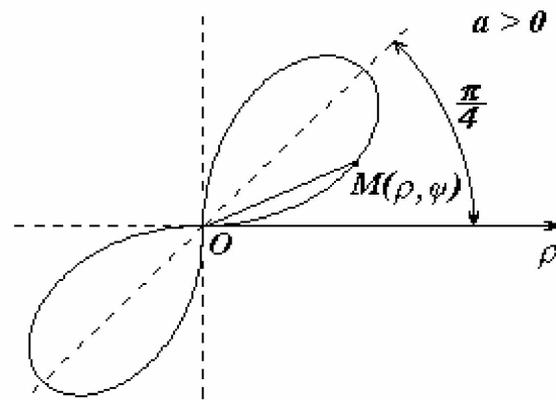
[Оглавление:](#)

Розы

Двухлепестковые розы:

$$\rho = a \sin 2\varphi, \quad a > 0; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a.$$

$$\rho = a \cos 2\varphi, \quad a > 0; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a.$$



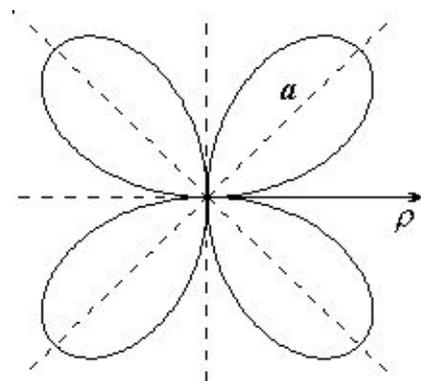
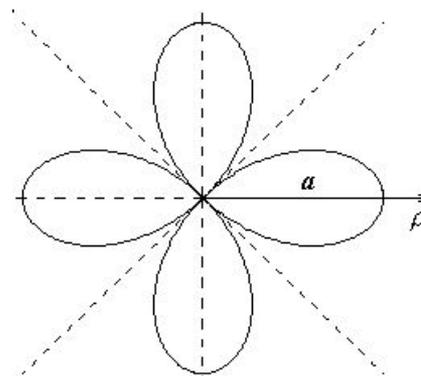
Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Четырехлепестковые розы:

$$\rho = a|\cos 2\varphi|; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

$$\rho = a|\sin 2\varphi|; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

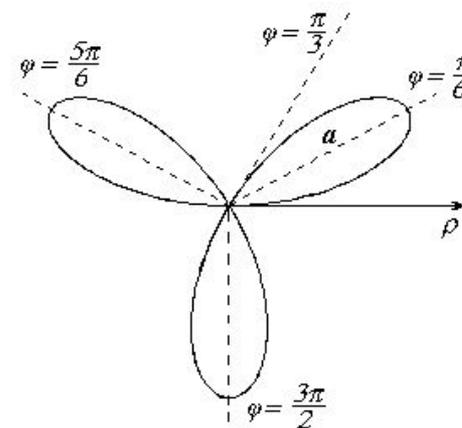


Кривые на плоскости

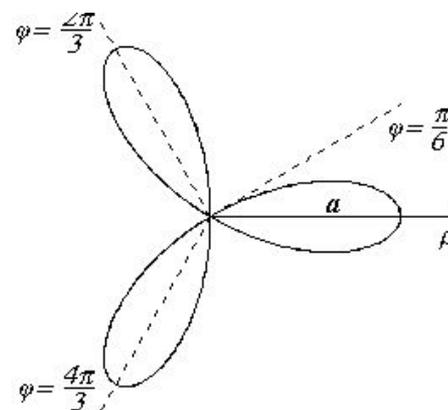
[Оглавление:](#)

Трехлепестковые розы

$$\rho = a \sin 3\varphi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad a > 0$$

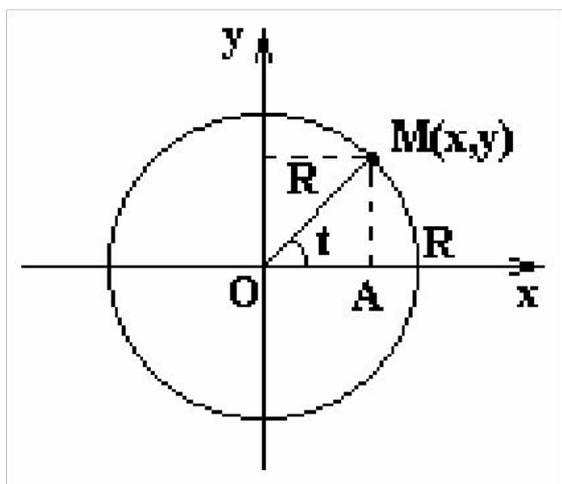


$$\rho = a \cos 3\varphi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad a > 0$$



2. Параметрическое задание линий

Окружность



$$x^2 + y^2 = R^2,$$

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases}$$

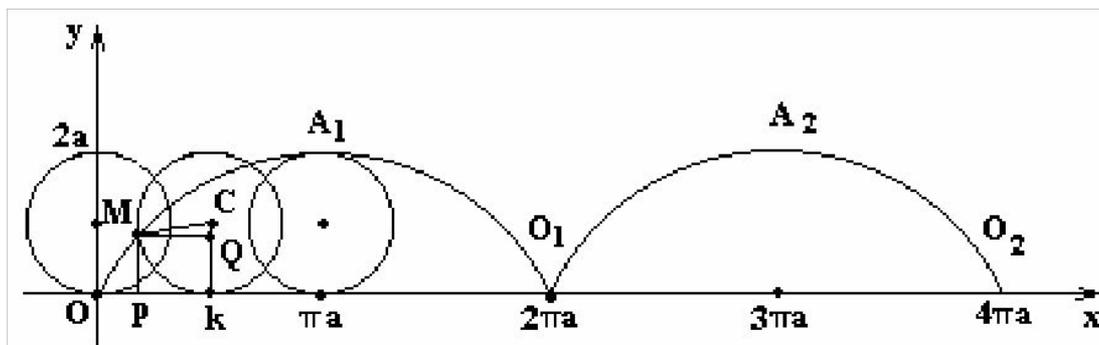
t - угол, который составляет радиус-вектор точки M с осью Ox .



Циклоида

Циклоида - кривая, описываемая точкой круга, катящегося без скольжения по прямой линии.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad -\infty < t < \infty.$$



Длина дуги $OA_1O_1 = 8a$, а площадь одной арки $S = 3\pi a^2$.



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Астроида

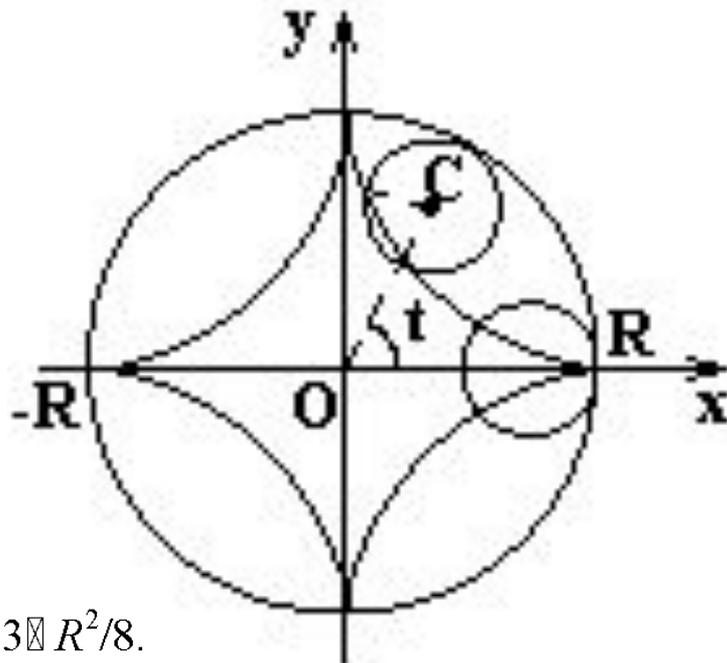
Астроида - кривая, которую описывает точка окружности радиуса $R/4$, когда окружность катится без скольжения внутри окружности радиуса R .

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

$$\begin{cases} x = R \cos^3 t, \\ y = R \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Длина астроиды $L = 6R$,

а площадь, ограниченная астроидой, $S = 3 \cdot R^2/8$.



Кривые на плоскости

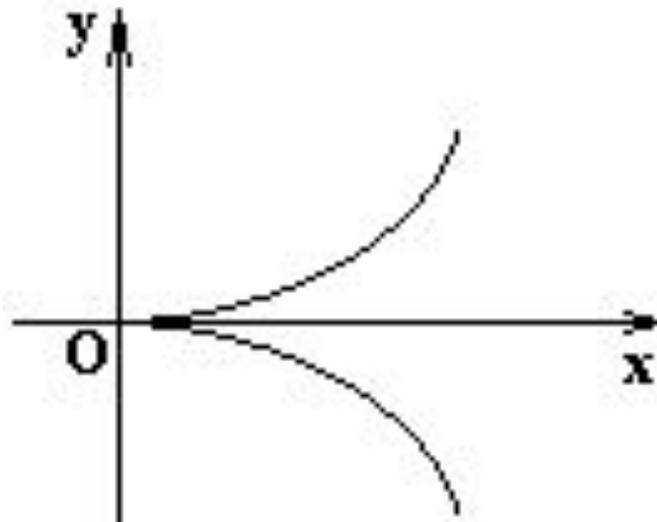
[Оглавление:](#)

3. Кривые третьего порядка

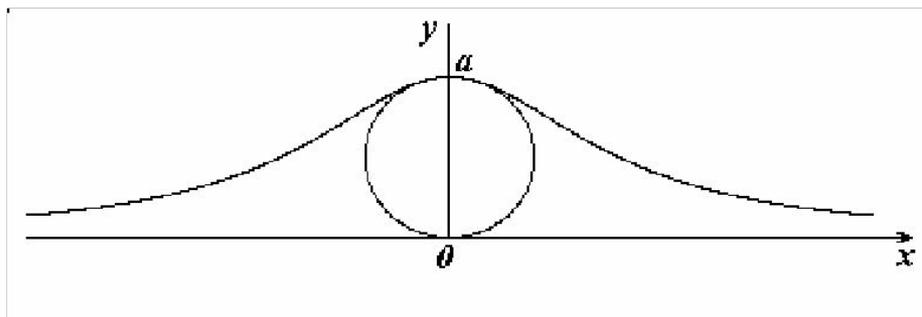
Полукубическая парабола

$$a^2 x^3 - y^2 = 0, a > 0.$$

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = at^3, \end{cases} \text{ где } -\infty < t < \infty.$$



Локоп Аньези



$$x^2 y = a^2 (a - y).$$

$$\rho \sin \varphi = \frac{a^3}{a^2 + \rho^2 \cos \varphi}.$$

Локоп Аньези имеет асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Точки перегиба $(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4})$.

Площадь между локоном Аньези и асимптотой $S = \pi a^2$.



Кривые на плоскости

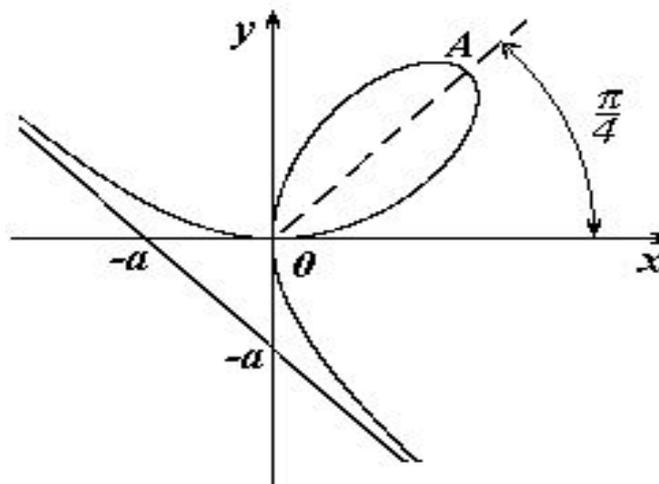
[Оглавление:](#)

Декартов лист

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0;$$

$$\rho = \frac{3}{2}a \left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \right).$$

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, & -\infty < t < -1, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, & -1 < t < \infty. \end{cases}$$



Декартов лист имеет асимптоту $x+y+a=0$ или $\rho = \frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}$.

Точка $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$. Площадь петли декартова листа $S = \frac{3a^2}{2}$.



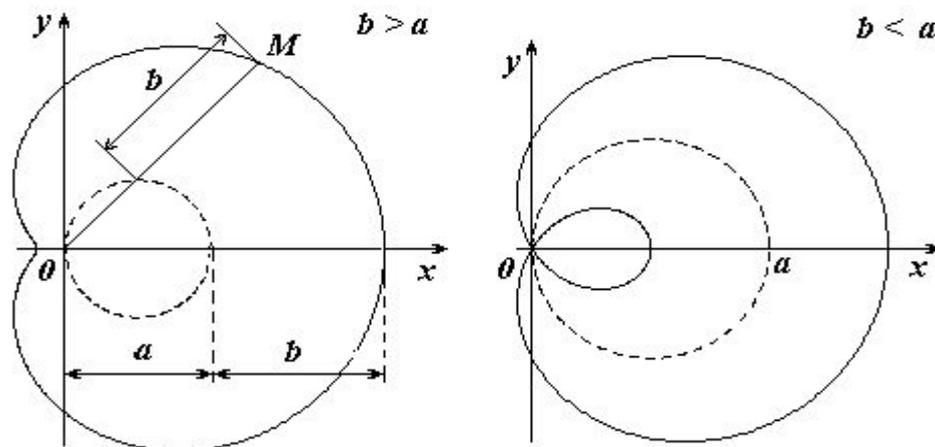
4. Кривые четвертого порядка

Улитка Паскаля

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2),$$

$$\rho = a \cos \varphi + b,$$

$$\begin{cases} x = a \cos t (\cos t + b), \\ y = \sin t (\sin t + b), \quad 0 \leq t < 2\pi. \end{cases}$$



Улитка Паскаля получается при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки окружности на постоянный отрезок b .

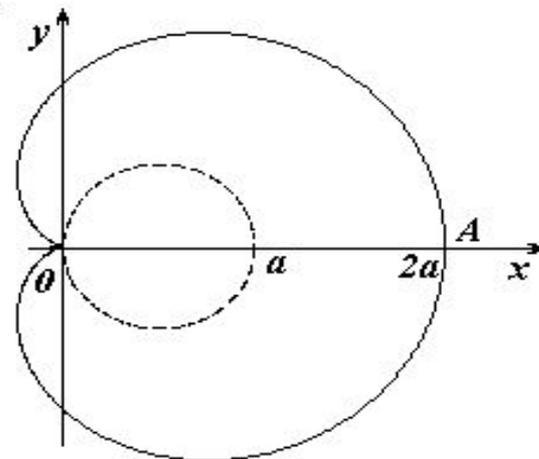


Кардиоида

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2y^2 = 0,$$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0,$$

$$\begin{cases} x = a \cos t (1 + \cos t), \\ y = a \sin t (1 + \cos t), \quad 0 \leq t < 2\pi. \end{cases}$$



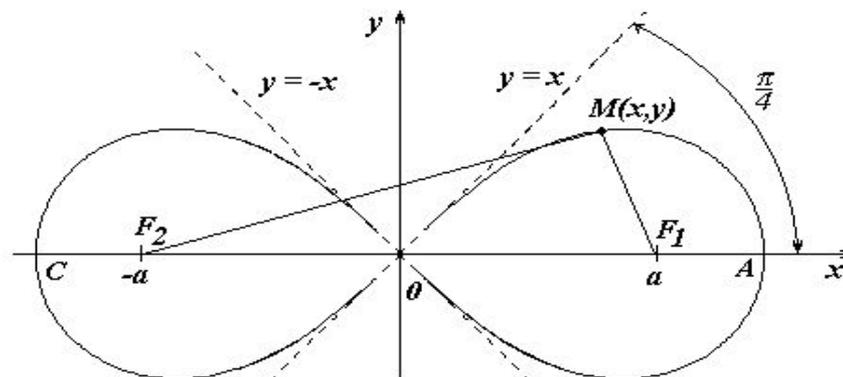
Кардиоида является частным случаем улитки Паскаля при $a=b$.

Вершина кардиоиды находится в точке $A(2a, 0)$. Укажем, что площадь

кардиоиды $S = \frac{3\pi a^2}{2}$, а длина $L=8a$.



Лемниската Бернулли



Лемниската Бернулли - геометрическое место точек, расстояние которых от двух данных точек (фокусов) является постоянной величиной, равной квадрату половины межфокусного расстояния.

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0.$$

Вершины кривой находятся в точках $A(a\sqrt{2}, 0)$; $C(-a\sqrt{2}, 0)$.

Площадь каждой петли $S = a^2$.



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Задача №:

<u>1</u>	<u>11</u>
<u>2</u>	<u>12</u>
<u>3</u>	<u>13</u>
<u>4</u>	<u>14</u>
<u>5</u>	<u>15</u>
<u>6</u>	
<u>7</u>	
<u>8</u>	
<u>9</u>	
<u>10</u>	



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Решение задачи №:

1	11
2	12
3	13
4	14
5	15
6	
7	
8	
9	
10	



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Найдите полярный угол отрезка, направленного из точки $(5, \sqrt{3})$ в точку $(6, 2\sqrt{3})$.

Задача 1

Ответ: 60°

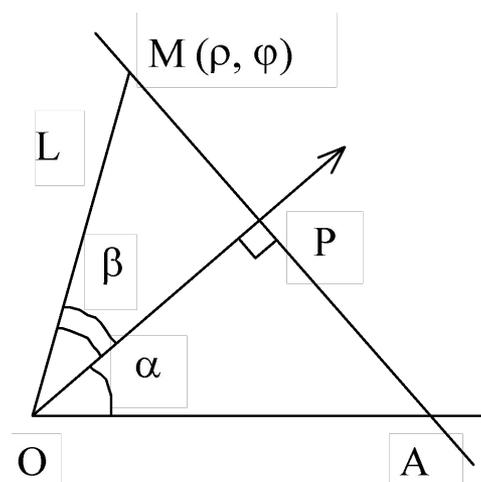
[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение прямой в полярных координатах, считая известными расстояние p от полюса до прямой и угол α от полярной оси до луча, направленного из полюса перпендикулярно к прямой.



Задача 2

Ответ: $\rho \cos(\phi - \alpha) = p$

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Найдите полярное уравнение кривой $x = a$, $a > 0$ и изобразите ее.

Задача 3

Ответ: $\rho = a/\cos\phi$

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Найдите полярное уравнение кривой $y = b$, $b > 0$ и изобразите ее.

Задача 4

Ответ: $\rho = b/\sin\phi$

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Найдите полярное уравнение кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$$

и изобразите ее.

Задача 5

Ответ: $\rho = \frac{|a|}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}$

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Постройте в полярной системе координат линию $\rho = 2a \cdot \sin\varphi$,
 $a > 0$.

Задача 6

Ответ: Окружность

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Постройте в полярной системе координат линию

$$\rho = 2 + \cos\varphi.$$

Задача 7

Ответ: Улитка Паскаля

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Постройте в полярной системе координат линию

$$\rho = a \sin 2\varphi, \quad a > 0; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a.$$

Задача 8

Ответ: Двухлепестковая роза

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Постройте в полярной системе координат линию $\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$

Задача 9

Ответ: Правая ветвь гиперболы

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Постройте в полярной системе координат линию

$$\rho^2 \cdot \sin 2\varphi = a^2.$$

Задача 10

Ответ: Гипербола

[Решение:](#)



Какая линия задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Задача 11

Ответ: Эллипс

[Решение:](#)



Какая линия задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Задача 12

Ответ: Парабола

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Какая линия задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \cos t, \\ y = 3 + 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Задача 13

Ответ: Окружность

[Решение:](#)



Какая линия задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 1 - 4t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Задача 14

Ответ: Парабола

[Решение:](#)



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

Выведите уравнение астроида в полярной системе координат.

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

Задача 15

Ответ:

$$\rho = \frac{a}{\left((\cos t)^{\frac{2}{3}} + (\sin t)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

[Решение:](#)



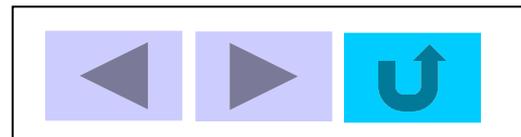
Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$$\rho = \sqrt{(6 - 5)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2,$$
$$\cos \varphi = 1/2, \sin \varphi = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Решение [задачи 1](#)

Ответ: 60°

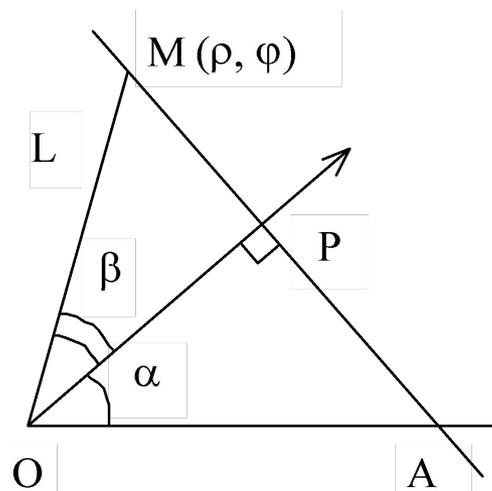


Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

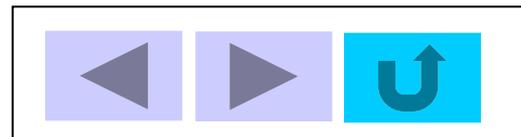
$$OP = p, \angle POA = \alpha, \angle POM = \beta, \varphi = \alpha + \beta, M(\rho, \varphi) \in L.$$

Точка M лежит на прямой L в том и только в том случае, когда проекция точки M на луч OP совпадает с точкой P , т.е. когда $p = \rho \cdot \cos \beta$.
 $L: \rho \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p.$



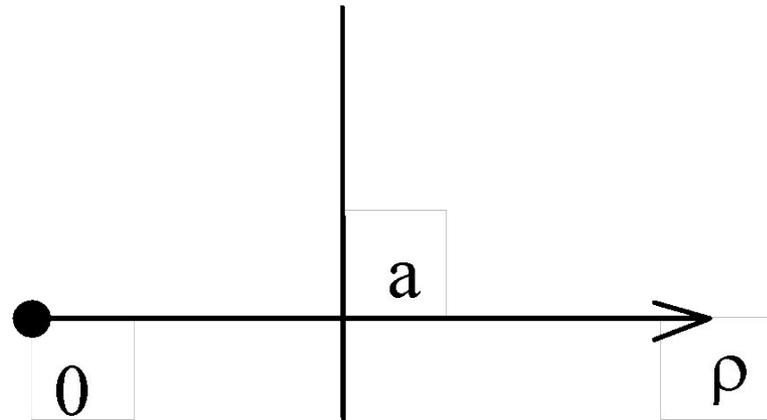
Решение [задачи 2](#)

Ответ: $\rho \cos(\varphi - \alpha) = p$



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)



$$\rho \cdot \cos\varphi = a \rightarrow \rho = a/\cos\varphi.$$

Решение [задача 3](#)

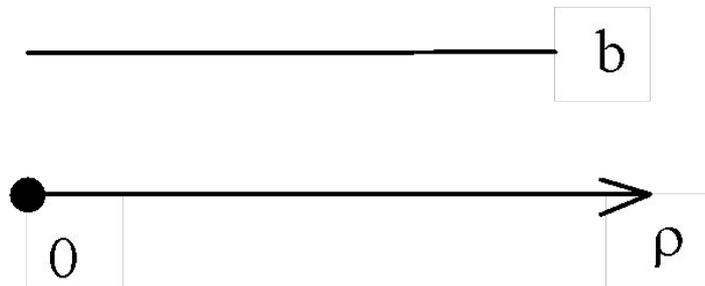
Ответ: $\rho = b/\sin\varphi$



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$$\rho \cdot \sin\varphi = b \rightarrow \rho = b/\sin\varphi.$$



Решение [задача 4](#)

Ответ: $\rho = b/\sin\varphi$



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

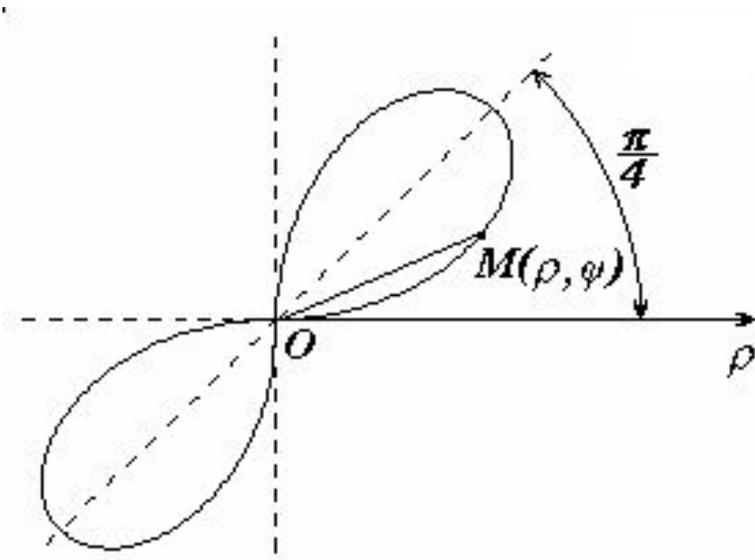
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$$

$$xy \geq 0, \quad \rho^4 = a^2 \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \rightarrow$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi, \quad \sin 2\varphi \geq 0.$$

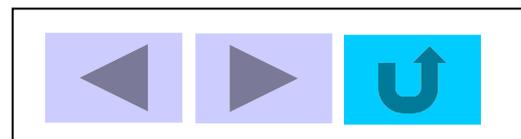
$$\rho = \frac{|a|}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}, \quad \varphi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$$

- двухлепестковая роза



Решение [задача 5](#)

Ответ: $\rho = \frac{|a|}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin 2\varphi}$

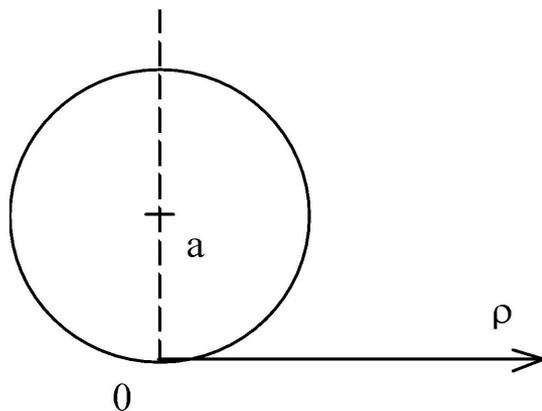


Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

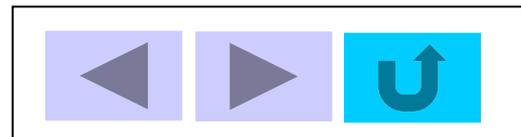
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, x^2 + y^2 - 2ay = 0, x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

- окружность со смещенным центром:



Решение [задача 6](#)

Ответ: Окружность



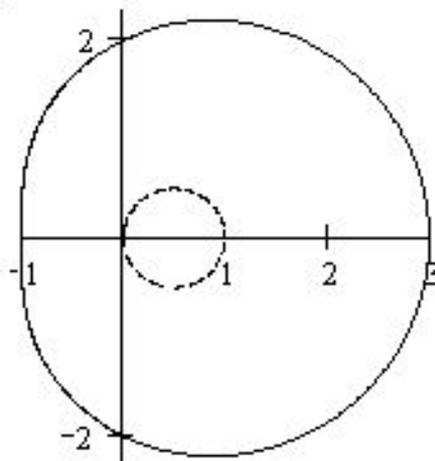
Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$\rho = 2 + \cos\varphi$ - улитка Паскаля получается, если каждый радиус-вектор окружности $\rho = \cos\varphi$ увеличить на два.

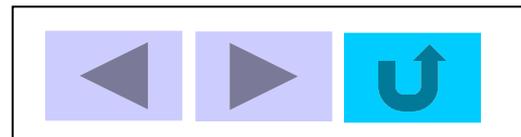
Найдем координаты контрольных точек:

$$\varphi = 0, \rho = 3; \quad \varphi = \pi/2, \rho = 2; \quad \varphi = \pi, \rho = 1.$$



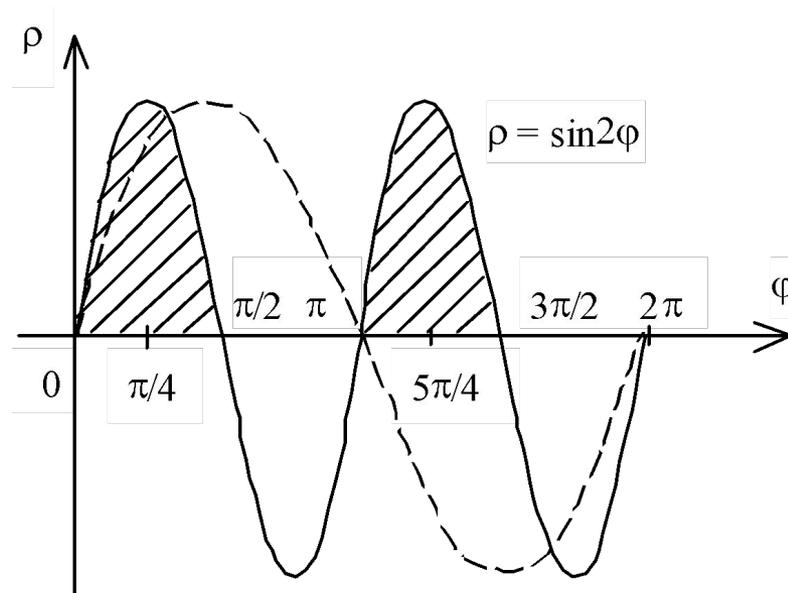
Решение [задачи 7](#)

Ответ: Улитка Паскаля



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)



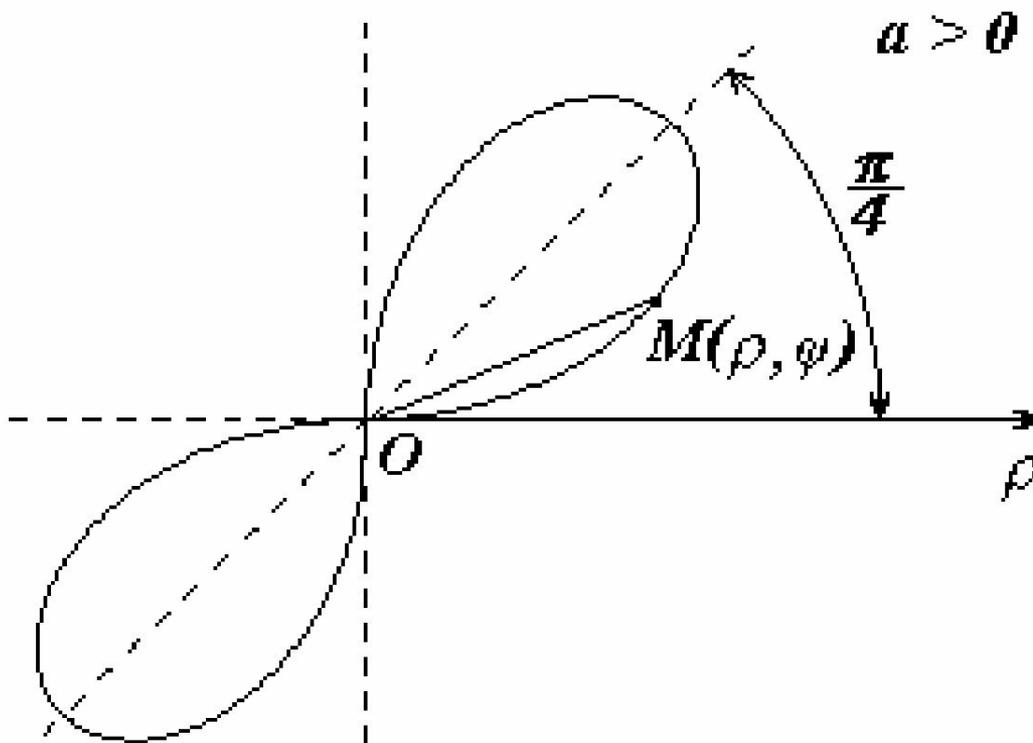
Решение [задачи 8](#)

Ответ: двухлепестковая роза



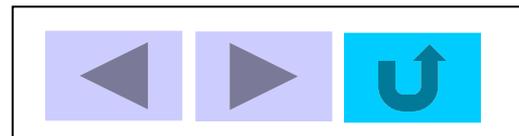
Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)



Решение [задачи 8](#)

Ответ: двухлепестковая роза



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$$4 - 5 \cdot \cos \varphi > 0, \quad \cos \varphi < 4/5, \quad \varphi \in (\arccos(4/5), 2\pi - \arccos(4/5)).$$

По условию $\rho \cdot (4 - 5 \cdot \cos \varphi) = 9$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} \left(4 - 5 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 9,$$

$$4\sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 9, \quad 16(x^2 + y^2) = (5x + 9)^2,$$

$$16x^2 + 16y^2 = 25x^2 + 90x + 81,$$

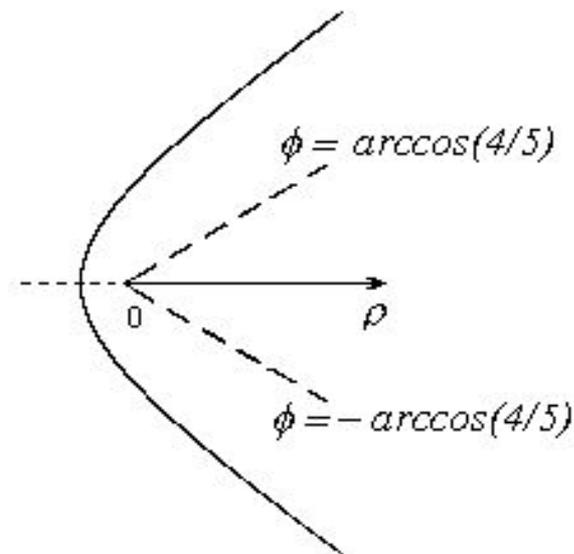
$$9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0,$$

$$9(x + 5)^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow$$

$$\frac{(x + 5)^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ — правая ветвь гиперболы}$$

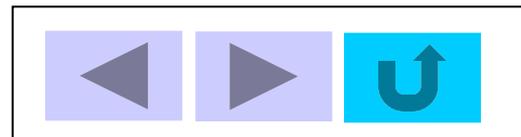
при указанных φ .

(Можно по точкам $\varphi = \pi$: $\rho = 9/10$)



Решение [задачи 9](#)

Ответ: Правая ветвь параболы



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

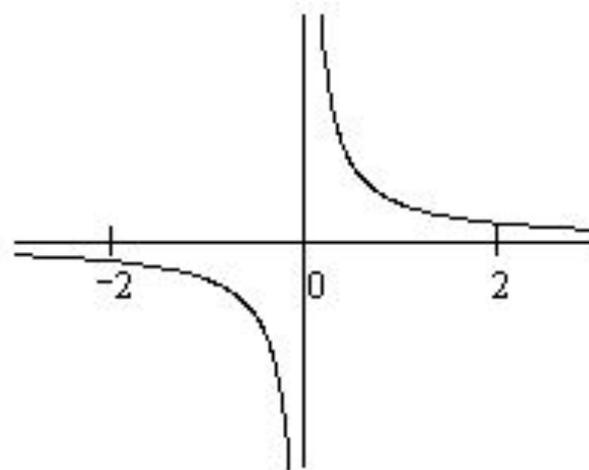
$$\rho^2 \cdot \sin 2\varphi = a^2$$

$$\sin 2\varphi \geq 0, \quad \varphi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2].$$

$$\rho = \frac{|a|}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

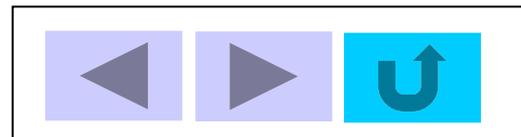
$$\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

$$y = \frac{a^2}{x} - \text{гипербола}$$



Решение [задачи 10](#)

Ответ: Гипербола



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad - \text{ эллипс.}$$

Решение [задачи 11](#)

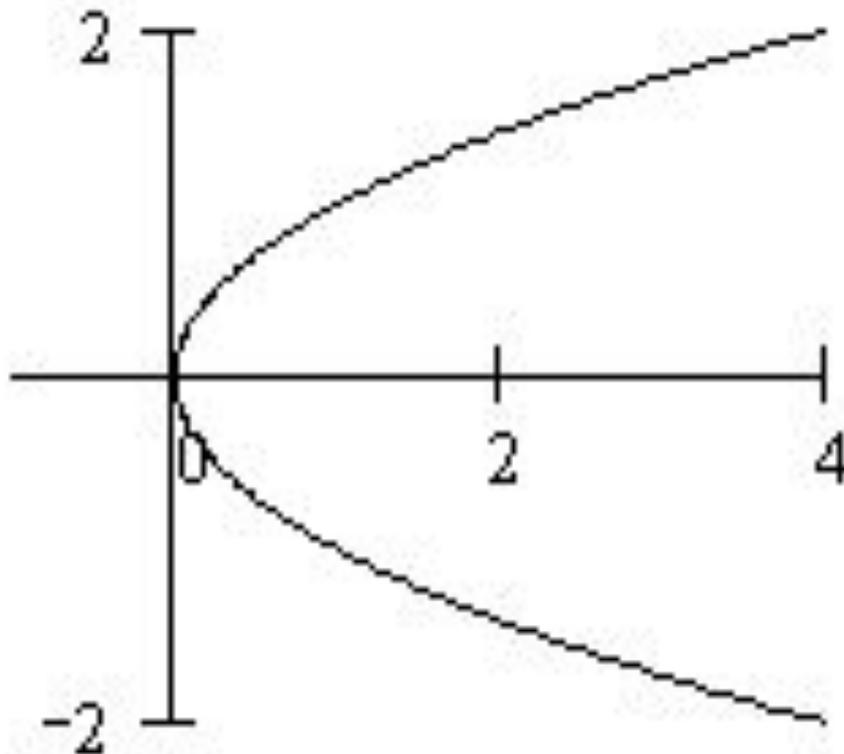
Ответ: Эллипс



Кривые на плоскости

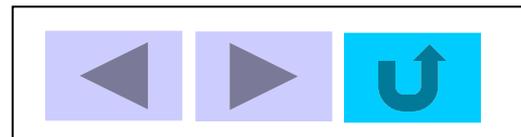
[Оглавление:](#)

$$y^2 = x - \text{парабола.}$$



[Решение задачи 12](#)

Ответ: Парабола



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \text{ — окружность.}$$

Решение [задачи 13](#)

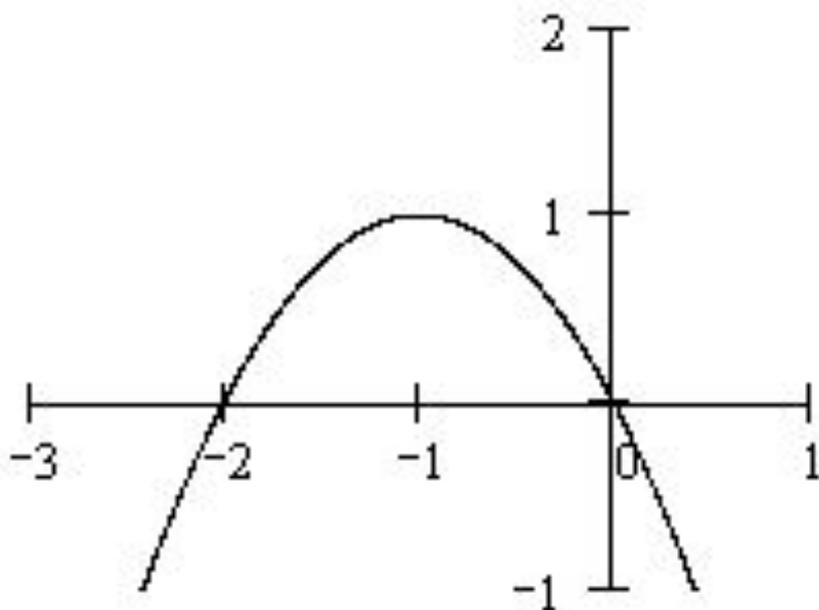
Ответ: Окружность



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$y = -x^2 - 2x$, $y - 1 = -(x + 1)^2$ – парабола с вершиной в точке $(-1, 1)$.



[Решение задачи 14](#)

Ответ: Парабола



Кривые на плоскости

[Оглавление:](#)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t, \quad \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2 t;$$

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ – уравнение астроида в декартовых координатах.

Для перехода к полярным координатам учтем, что $x = \rho \cos t$,
 $y = \rho \sin t$,

$$\rho^{\frac{2}{3}} \left((\cos t)^{\frac{2}{3}} + (\sin t)^{\frac{2}{3}} \right) = a^{\frac{2}{3}},$$

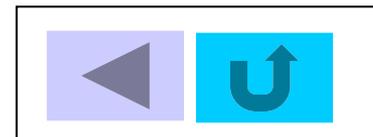
$$\rho^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(\cos t)^{\frac{2}{3}} + (\sin t)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\rho = \frac{a}{\left((\cos t)^{\frac{2}{3}} + (\sin t)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Решение [задачи 15](#)

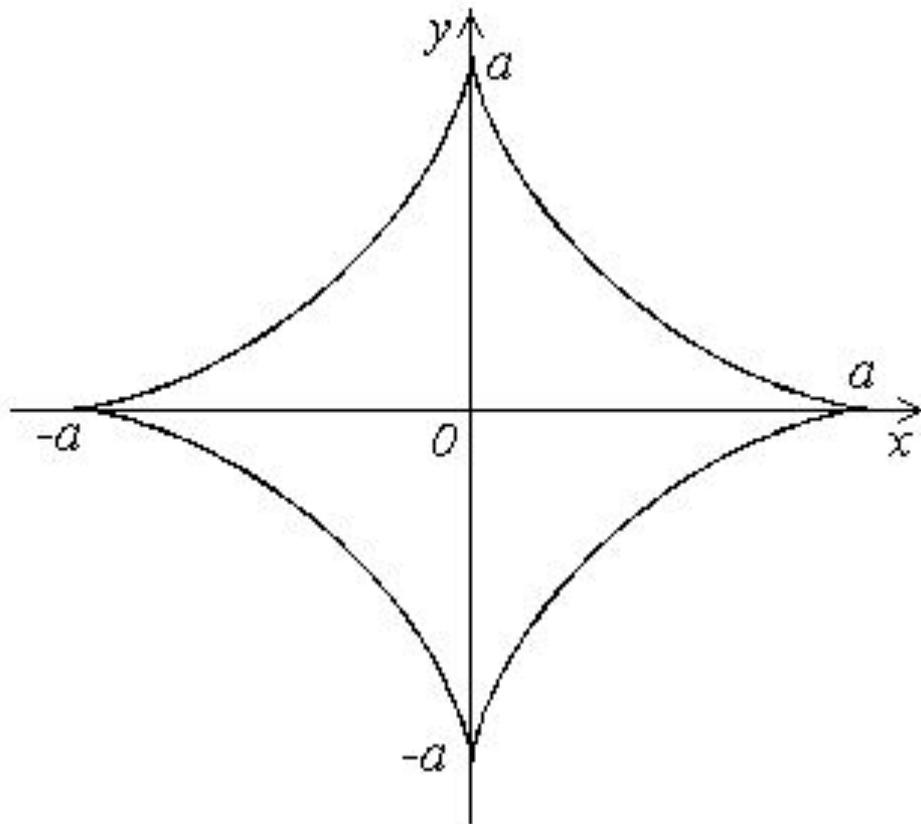
Ответ:

$$\rho = \frac{a}{\left((\cos t)^{\frac{2}{3}} + (\sin t)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}$$



Кривые на плоскости

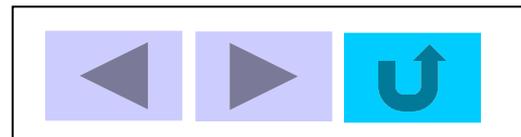
[Оглавление:](#)



[Решение задачи 15](#)

Ответ:

$$\rho = \frac{a}{\left((\cos t)^{\frac{2}{3}} + (\sin t)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}$$



В результате студент должен уметь:

- 1. Записать формулы преобразования декартовых координат к полярным и обратно.**
- 2. Изображать кривые, заданные в полярных координатах.**
- 3. Изображать кривые, заданные параметрически.**
- 4. Узнавать кривые более высокого порядка.**

Перечень источников, список дополнительной литературы по теме.

1. Сборник задач по математике для вузов: В 4 ч. Ч. 1: Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, И. Б. Кожухов и др. / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.: ил.; 21 см. - ISBN 5-940520-34-0.
2. Клетеник, Давид Викторович. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. Н.В. Ефимова. - 15-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1998. - 223с. - ISBN 5-02-015080-0.
3. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. - 304с.: ил.; 22 см. - ISBN 5-329-00326-1.
4. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры: Сб. комплектов вариантов задач по курсу "Высшая математика". Ч. 1 / Урал. гос. техн. ин-т; Сост. О. А. Белослудцев, М. А. Вигура, Н. В. Кожевников, А. Ф. Рыбалко и др. ; Науч. ред. С. И. Машаров. - Екатеринбург: УГТУ, 1997. - 110 с. - ISBN 5-230-17046-8.