Лекция 3. Диэлектрическая проницаемость сред с временной и пространственной дисперсией

1. Комплексные тензоры проводимости и диэлектрической проницаемости
а. Интегральная формулировка материальных уравнений электродинамики
б. Комплексные проводимость и диэлектрическая проницаемость

2. Соотношения Крамерса-Кронига
а. Два свойства комплексных проводимости и диэлектрической проницаемости
б. Соотношения Крамерса-Кронига для проводимости
в. Соотношения Крамерса-Кронига для диэлектрической проницаемости
г. Применение соотношений Крамерса-Кронига
д. О материальных средах без временной дисперсии

3. Диэлектрическая проницаемость газа осцилляторов
а. Электронная теория диэлектрической проницаемости
б. Нормальная и аномальная дисперсия

4. Диэлектрическая проницаемость изотропной горячей плазмы в гидродинамическом приближении
а. Уравнения многожидкостной гидродинамики
б. Продольная и поперечная диэлектрические проницаемости изотропной плазмы

5. Диэлектрическая проницаемость плазмы в магнитном поле

$$\mathbf{j} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{E}\,, \quad \mathbf{D} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathbf{E}$$

$$j_i(t,\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t,t',\mathbf{r},\mathbf{r}') E_j(t',\mathbf{r}')\,,$$

$$D_i(t,\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t,t',\mathbf{r},\mathbf{r}') E_j(t',\mathbf{r}')\,.$$

$$\boxed{\begin{aligned} j_i(t,\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(t',\mathbf{r}')\,, \\ D_i(t,\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}') E_j(t',\mathbf{r}')\,. \end{aligned}}$$

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega,\mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$j_i(\omega,\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\mathbf{r}' \hat{\sigma}_{ij}(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}') \exp[i\omega(t-t') + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\, E_j(\omega,\mathbf{k})$$

$$j_i(\omega,\mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})\, E_j(\omega,\mathbf{k})$$

$$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\sigma}_{ij}(\tau,\boldsymbol{\rho}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})$$

$$D_i(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})\, E_j(\omega,\mathbf{k})$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \int_0^{\infty} d\tau \int d\boldsymbol{\rho} \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau,\boldsymbol{\rho}) \exp(i\omega\tau - i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(\tau,\boldsymbol{\rho}) = \hat{\sigma}_{ij}(\tau)\delta(\boldsymbol{\rho}), \qquad \sigma_{ij}(\omega) = \int_0^\infty d\tau \hat{\sigma}_{ij}(\tau)\exp(i\omega\tau), \quad \varepsilon_{ij}(\omega) = \int_0^\infty d\tau \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau)\exp(i\omega\tau).$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau,\boldsymbol{\rho}) = \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau)\delta(\boldsymbol{\rho}) .$$

$$\operatorname{Re}\varepsilon_{ij}(\omega) = \operatorname{Re}\varepsilon_{ij}(-\omega), \quad \operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(\omega) = -\operatorname{Im}\varepsilon_{ij}(-\omega),$$

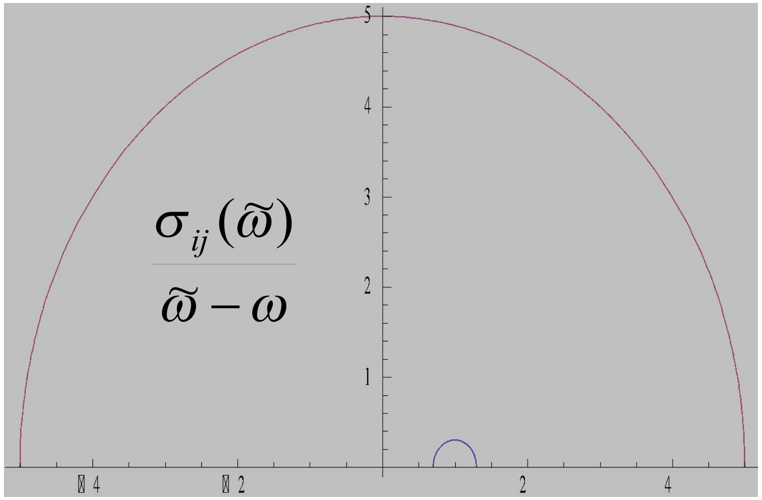
$$\operatorname{Re}\sigma_{ij}(\omega) = \operatorname{Re}\sigma_{ij}(-\omega), \quad \operatorname{Im}\sigma_{ij}(\omega) = -\operatorname{Im}\sigma_{ij}(-\omega).$$

$$\tau \to \infty \qquad \hat{\sigma}_{ij}(\tau) \to 0$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \sigma_{ij}(\omega) = 0\,, \quad \lim_{|\omega|\to\infty} \varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij}$$

$$\oint_\Gamma \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega} = \int_{-\infty}^{\omega-\mu} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega} + \int_{\omega+\mu}^{\infty} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega} + \int_{C_\mu} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega} + \int_{C_\infty} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega} = 0$$

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{1}{\pi\, i} \mathbf{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega}$$



$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re}\sigma_{ij}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathrm{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega}, \\ \operatorname{Im}\sigma_{ij}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathrm{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\sigma_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega} d\tilde{\omega}. \end{aligned}}$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega)-\delta_{ij}=\frac{1}{\pi\, i}\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_{ij}(\tilde{\omega})-\delta_{ij}}{\tilde{\omega}-\omega}d\tilde{\omega}+i\frac{4\pi\sigma_{ij}(0)}{\omega}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\varepsilon_{ij}(\omega)-\delta_{ij}&=\frac{1}{\pi}\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij}(\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}-\omega}d\tilde{\omega},\\ \mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij}(\omega)&=-\frac{1}{\pi}\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon_{ij}(\tilde{\omega})-\delta_{ij}}{\tilde{\omega}-\omega}d\tilde{\omega}+\frac{4\pi\sigma_{ij}(0)}{\omega}.\end{aligned}}$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega)=(\varepsilon_0'+i\varepsilon_0'')\delta_{ij},\quad \sigma_{ij}(0)=\sigma_0$$

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\omega)=\frac{\omega_0^2}{4\pi}\frac{\nu}{\omega^2+\nu^2}\qquad \mathrm{Im}\,\sigma(\omega)=-\frac{1}{\pi}\frac{\omega_0^2\nu}{4\pi}\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tilde{\omega}-\omega)(\tilde{\omega}^2+\nu^2)}d\tilde{\omega}=\frac{\omega_0^2}{4\pi}\frac{\omega}{\omega^2+\nu^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma(\omega)&=i\frac{\omega_0^2}{4\pi}\frac{1}{\omega+i\nu},\\ \varepsilon(\omega)&=1-\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega+i\nu)}\end{aligned}}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}(\tau)=\sigma_{ij}^0\delta(\tau)\to\sigma_{ij}(\omega)=\sigma_{ij}^0$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega)=\delta_{ij}+\frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}^0\to\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau)=\delta_{ij}\delta(\tau)+4\pi\sigma_{ij}^0$$

$$j_i(\omega,\mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})\, E_j(\omega,\mathbf{k}) \qquad D_i(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})\, E_j(\omega,\mathbf{k})$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})$$

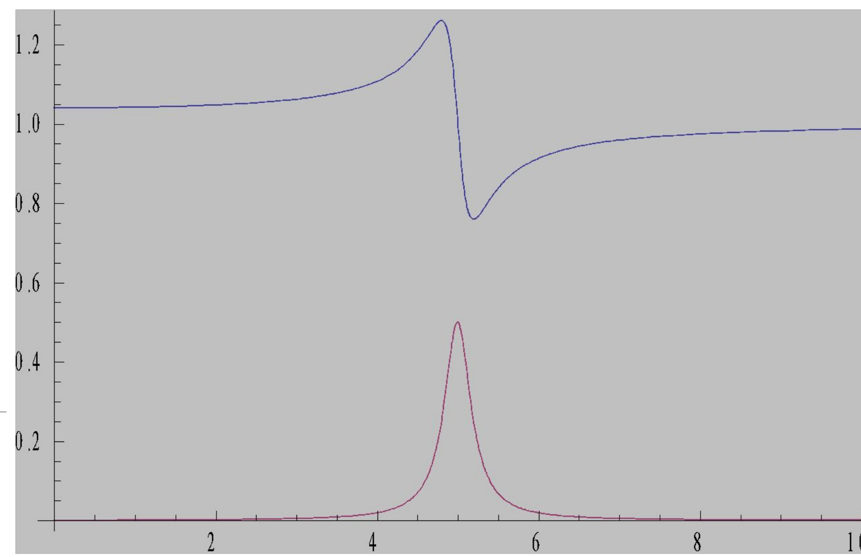
$$\mathbf{P}(t,\mathbf{r}) = en_0\mathbf{d}(t,\mathbf{r}) \qquad \boxed{\ddot{\mathbf{d}} + \gamma\,\dot{\mathbf{d}} + \omega_s^2\mathbf{d} = \frac{e}{m}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\exp[-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{d})]\}}$$

$$\mathbf{P}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\omega,\mathbf{k})\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\ \ \mathbf{P}(\omega,\mathbf{k}) = -\frac{e^2 n_0}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega}\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) + 4\pi\ \mathbf{P}(t,\mathbf{r}) \quad \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}\ , \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega} \quad \omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{s\alpha}^2 + i\gamma_\alpha\omega}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega^2 - \omega_s^2)}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i\frac{\omega_0^2\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_s^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$



$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla\left(N_\alpha \mathbf{V}_\alpha\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{V}_\alpha \nabla\right)\mathbf{V}_\alpha = -V_{\gamma\alpha}^2 \frac{\nabla N_\alpha}{N_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}\right]\right\} - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha .$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha \mathbf{V}_\alpha ,$$

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha ,$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{j}_\alpha}{\partial t^2} = V_{\gamma\alpha}^2 \nabla(\nabla \mathbf{j}_\alpha) + \frac{\omega_{L\alpha}^2}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nu_\alpha \frac{\partial \mathbf{j}_\alpha}{\partial t}}$$

$$\boxed{\mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = i\frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega}{4\pi\left[\omega\left(\omega + i\nu_\alpha\right) - k^2 V_{\gamma\alpha}^2\right]}\left[\mathbf{E}^l + \left(1 - \frac{k^2 V_{\gamma\alpha}^2}{\omega\left(\omega + i\nu_\alpha\right)}\right)\mathbf{E}^{tr}\right]}$$

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_\alpha) - k^2 V_{\gamma\alpha}^2} \qquad \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_\alpha) - k^2 V_{\gamma\alpha}^2}\left(1 - \frac{k^2 V_{\gamma\alpha}^2}{\omega\left(\omega + i\nu_\alpha\right)}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}^l(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{k})}$$

$$\boxed{\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_\alpha)}}$$

$$\mathbf{E}^{l} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})}{k^2} \rightarrow E_i^l = \frac{k_i k_j}{k^2} E_j, \qquad \mathbf{E}^{tr} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^l \rightarrow E_i^{tr} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) E_j,$$

$$D_i(\omega,\mathbf{k}) = \left[\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})\frac{k_i k_j}{k^2} + \varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\right] E_j(\omega,\mathbf{k})$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k}) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} - \Omega_\alpha\left[\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{b}_0\right] = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E} - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_{0\alpha} \mathbf{V}_\alpha$$

$$i(\omega + i\nu_\alpha)\mathbf{j}_\alpha(\omega,\mathbf{k}) + \Omega_\alpha\left[\mathbf{j}_\alpha(\omega,\mathbf{k})\cdot\mathbf{b}_0\right] = -\frac{\omega_{L\alpha}^2}{4\pi}\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})$$

$$j_{\alpha x} = i\frac{(4\pi)^{-1}\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2}[(\omega + i\nu_\alpha)E_x + i\Omega_\alpha E_y],$$

$$j_{\alpha y} = i\frac{(4\pi)^{-1}\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2}[(\omega + i\nu_\alpha)E_y - i\Omega_\alpha E_x],$$

$$j_{\alpha z} = i\frac{(4\pi)^{-1}\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)}E_z.$$

$$\boxed{j_i(\omega,\mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k}),\ \ i,j = x,y,z}$$

$$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \sigma_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(\omega) & \sigma_{xy}(\omega) & 0 \\ \sigma_{yx}(\omega) & \sigma_{yy}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(\omega) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{xx}(\omega) = \sigma_{yy}(\omega) = (4\pi)^{-1} i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2(\omega + i\nu_\alpha)}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2},$$

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\sigma_{yx}(\omega) = -(4\pi)^{-1}\sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2\Omega_\alpha}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2},$$

$$\sigma_{zz}(\omega) = (4\pi)^{-1} i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega + i\nu_\alpha}.$$

$$\varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_{yy}(\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2(\omega + i\nu_\alpha)}{\omega\,[(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2]},$$

$$\varepsilon_{xy}(\omega) = -\varepsilon_{yx}(\omega) = -i\sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2\Omega_\alpha}{\omega\,[(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2]},$$

$$\varepsilon_{zz}(\omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega\,(\omega + i\nu_\alpha)},$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0.$$