Лекция 8.
Возбуждение волн внешним источником. Энергетические соотношения

1. Точное решение задачи в возбуждении в среде плоской гармонической волны
   а. Общее решение
   б. Предельные случаи
   в. Резонансное возбуждение волн внешним источником
2. Метод медленных амплитуд
   а. Уравнение для медленной амплитуды
   б. Уравнение для медленной амплитуды в резонансном случае
3. Поглощение энергии внешнего источника в диссипативных средах
   а. Общее выражение для диссипативных потерь энергии внешнего источника
   б. Примеры диссипативных систем
4. Энергетические соотношения для волн в линейной электродинамике сред с дисперсией
   а. Уравнения для медленных амплитуд электромагнитных волн, возбуждаемых внешним источником
   б. Энергетические соотношения
   в. Условия термодинамического равновесия
   г. Примеры
   д. Анизотропные среды
5. Импульс волн
   а. Вычисление импульса волн в электродинамике
   б. Вычисление импульса волн в общем случае

$$D(\hat{\omega},k)A(t,k)=F(t,k) \qquad F(t,k)=F_0(k)\exp(-i\omega t) \qquad D(\omega,k)=\prod_{m=1}^{n}\left(\omega-\omega_m(k)\right)$$

$$\boxed{A(t,k)=\int_0^t G(\tau,k)F(t-\tau,k)d\tau=\int_0^t G(t-\tau,k)F(\tau,k)d\tau} \qquad \boxed{G(t,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{C(\omega)}\frac{1}{D(\omega,k)}\exp(-i\omega\, t)d\omega}$$

$$A(t,k)=F_0(k)\sum_{m=1}^{n}\frac{\exp[-i\omega_m(k)t]-\exp(-i\omega t)}{\tilde{D}_m(k)[\omega_m(k)-\omega]} \qquad \tilde{D}_m(k)=\prod_{s=1,\ s\neq m}^{n}\left(\omega_m(k)-\omega_s(k)\right)=-\left(\frac{\partial D}{\partial\omega_m}\right)_{\omega=\omega_m}$$

Неустойчивая среда $A(t,k)\xrightarrow[t\to\infty]{}\dfrac{F_0(k)}{\tilde{D}_m(k)[\omega_m(k)-\omega]}\exp[\omega''_m(k)t]\exp[-i\omega'_m(k)t]$

Диссипативная среда $A(t,k)\xrightarrow[t\to\infty]{}-F_0(k)\left[\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{\tilde{D}_m(k)[\omega_m(k)-\omega]}\right]\exp(-i\omega t)$

$$\boxed{|\omega_m(k)-\omega|<<\omega \quad\longrightarrow\quad A(t,k)\approx F_0(k)\frac{\exp[-i\omega_m(k)t]-\exp(-i\omega t)}{\tilde{D}_m(k)[\omega_m(k)-\omega]}}$$

Нет диссипации $\omega=\omega_m(k)$ $\quad A(t,k)\approx -iF_0(k)\left(\dfrac{\partial D(\omega,k)}{\partial\omega}\right)^{-1} t\exp(-i\omega t)$

Есть диссипация $\begin{array}{l}\omega=\omega'_m(k)\\ |\omega''_m|<<\omega'_m\end{array}$ $\quad A(t,k)\approx iF_0(k)\left(\dfrac{\partial D'(\omega,k)}{\partial\omega}\right)^{-1}\dfrac{1-\exp\omega''_m t}{\omega''_m}\exp(-i\omega t)$

$$A(t,k)=\tilde{A}(t,k)\exp(-i\omega t) \qquad \left|\frac{d\tilde{A}}{dt}\right| << |\omega\tilde{A}| \qquad \hat{\omega}A(t,k)=\exp(-i\omega t)\hat{\omega}_M\tilde{A}(t,k),\ \ \hat{\omega}_M=\omega+i\frac{d}{dt}$$

$$D\left(\omega+i\frac{d}{dt},k\right)\tilde{A}(t,k)=F_0(k) \qquad D(\omega,k)\tilde{A}(t,k)+i\frac{\partial D(\omega,k)}{\partial\omega}\frac{d\tilde{A}(t,k)}{dt}=F_0(k)$$

$$D(\omega,k)=D'(\omega,k)+iD''(\omega,k)$$

$$D(\omega'+i\omega'',k)=D'(\omega',k)+i\omega''\frac{\partial D'(\omega',k)}{\partial\omega}+iD''(\omega',k)=0$$

$$D'(\omega',k)=0 \qquad \omega_m''(k)=-D''(\omega_m',k)\left(\frac{\partial D'(\omega_m',k)}{\partial\omega}\right)^{-1} \qquad \boxed{D''(\omega,k)\left(\frac{\partial D'(\omega,k)}{\partial\omega}\right)>0}$$

$$\omega=\omega_m'(k) \qquad \frac{d\tilde{A}(t,k)}{dt}-\omega_m''(k)\tilde{A}(t,k)=-iF_0(k)\left(\frac{\partial D'(\omega,k)}{\partial\omega}\right)^{-1}$$

$$\frac{dW}{dt}-2\omega_m''(k)W=i\left(\frac{\partial D'(\omega,k)}{\partial\omega}\right)^{-1}[F_0^*(k)\tilde{A}(t,k)-F_0(k)\tilde{A}^*(t,k)] \qquad W=|\tilde{A}(t,k)|^2$$

$$\boxed{Q(t,k)=i\left(\frac{\partial D'(\omega,k)}{\partial\omega}\right)^{-1}[F_0^*(k)\tilde{A}(t,k)-F_0(k)\tilde{A}^*(t,k)]}$$

$$\tilde{A}(k)=F_0(k)/D(\omega,k) \qquad Q(k)=2\left(\frac{\partial D'(\omega,k)}{\partial\omega}\right)^{-1}\frac{D''(\omega,k)}{[D'(\omega,k)]^2+[D''(\omega,k)]^2}|F_0(k)|^2$$

$$\omega=\omega_m'(k) \qquad Q(k)=\left(\frac{\partial D'(\omega_m',k)}{\partial\omega}\right)^{-2}\frac{2}{|\omega_m''(k)|}|F_0(k)|^2$$

$$Q=\frac{\nu_e}{(\omega^2-\omega_S^2)^2+\nu_e^2\omega^2}\,|F_0|^2 \qquad \omega_S=\sqrt{\omega_{Le}^2+k^2V_{\gamma e}^2} \qquad Q=\frac{1}{2\omega_S^2}\frac{\nu_e/2}{(\omega-\omega_S)^2+(\nu_e/2)^2}\,|F_0|^2$$

$$Q=\frac{1}{2\omega_S^2}\frac{\nu'/2}{(\omega-\omega_S)^2+(\nu'/2)^2}\,|F_0|^2,\quad \nu'=\nu_e\frac{\omega_{Le}^2}{\omega_S^2} \qquad \omega_S=\sqrt{\omega_{Le}^2+k^2c^2}$$

$$Q=\frac{1}{2\omega_S^2}\frac{\nu_i/2}{(\omega-\omega_S)^2+(\nu_i/2)^2}\,|F_0|^2 \qquad \omega_S^2=\omega_i^2\frac{k^2r_{De}^2}{1+k^2r_{De}^2} \qquad \boxed{Q_0=\iint Q(\omega,k)\,d\omega\,dk}$$

$$\mathbf{j}_0(t,\mathbf{r})=\frac{1}{2}\Big(\mathbf{j}_0(\mathbf{k})\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+\mathbf{j}_0^*(\mathbf{k})\exp(i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\Big)$$

$$\rho_0(t,\mathbf{r})=\frac{1}{2}\Big(\rho_0(\mathbf{k})\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+\rho_0^*(\mathbf{k})\exp(i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\Big) \qquad \rho_0(\mathbf{k})=\omega^{-1}\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}_0(\mathbf{k})$$

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r})=\frac{1}{2}\Big(\widetilde{\mathbf{E}}(t,\mathbf{k})\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+\widetilde{\mathbf{E}}^*(t,\mathbf{k})\exp(i\omega t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\Big)$$

$$Q(t,\mathbf{k})=-\langle\mathbf{j}_0(t,\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\rangle=-\frac{1}{4}\Big(\mathbf{j}_0(\mathbf{k})\cdot\widetilde{\mathbf{E}}^*(t,\mathbf{k})+\mathbf{j}_0^*(\mathbf{k})\cdot\widetilde{\mathbf{E}}(t,\mathbf{k})\Big)$$

$$i\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{D}(t,\mathbf{r})=4\pi\rho_0(t,\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r})=\varepsilon^l(\hat{\omega},\hat{\mathbf{k}})\mathbf{E}^l(t,\mathbf{r})+\varepsilon^{tr}(\hat{\omega},\hat{\mathbf{k}})\mathbf{E}^{tr}(t,\mathbf{r})$$

$$\Big[\,\hat{\mathbf{k}}\cdot[\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{E}(t,\mathbf{r})]\,\Big]+\frac{\hat{\omega}^2}{c^2}\mathbf{D}(t,\mathbf{r})=-\frac{4\pi}{c^2}i\hat{\omega}\,\mathbf{j}_0(t,\mathbf{r})$$

$$i\hat{\omega}_M\varepsilon^l(\hat{\omega}_M,\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{E}}_l(t,\mathbf{k})=4\pi\,\mathbf{j}_0^l(\mathbf{k}),$$

$$i\hat{\omega}_M\left(\varepsilon^{tr}(\hat{\omega}_M,\mathbf{k})-\frac{k^2c^2}{\hat{\omega}_M^2}\right)\widetilde{\mathbf{E}}_{tr}(t,\mathbf{r})=4\pi\,\mathbf{j}_0^{tr}(\mathbf{k}).$$

$$i\omega\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{E}}_{l}(t,\mathbf{k})-\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})]\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}_{l}(t,\mathbf{k})}{dt}=4\pi\,\mathbf{j}_{0}^{l}(\mathbf{k})$$

$$i\omega\left(\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^{2}c^{2}}{\omega^{2}}\right)\widetilde{\mathbf{E}}_{tr}(t,\mathbf{r})-\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^{2}c^{2}}{\omega^{2}}\right)\right]\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}_{tr}(t,\mathbf{r})}{dt}=4\pi\,\mathbf{j}_{0}^{tr}(\mathbf{k})$$

$$D(\omega,\mathbf{k})\equiv D^{l}(\omega,\mathbf{k})=\omega\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})=0$$

$$D(\omega,\mathbf{k})\equiv D^{tr}(\omega,\mathbf{k})=\omega\left(\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^{2}c^{2}}{\omega^{2}}\right)=0$$

$$D(\omega,k)\widetilde{A}(t,k)+i\frac{\partial D(\omega,k)}{\partial\omega}\frac{d\widetilde{A}(t,k)}{dt}=F_{0}(k)$$

$$\frac{dW_{l}}{dt}+2\omega[\operatorname{Im}\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})]\left(\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\operatorname{Re}\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})]\right)^{-1}W_{l}=Q_{l}(t,\mathbf{k})$$

$$\frac{dW_{tr}}{dt}+2\omega[\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})]\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\operatorname{Re}\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^{2}c^{2}}{\omega^{2}}\right)\right]\right)^{-1}W_{tr}=Q_{tr}(t,\mathbf{k})$$

$$\boxed{\begin{aligned}W_{l}(t,\mathbf{k})&=\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\operatorname{Re}\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})]\frac{|\widetilde{E}_{l}(t,\mathbf{k})|^{2}}{16\pi}\\W_{tr}(t,\mathbf{k})&=\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\operatorname{Re}\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^{2}c^{2}}{\omega^{2}}\right)\right]\frac{|\widetilde{E}_{tr}(t,\mathbf{k})|^{2}}{16\pi}\end{aligned}}$$

Установившийся режим

$$\omega[\operatorname{Im}\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})]\frac{|\widetilde{E}_{l}(\mathbf{k})|^{2}}{8\pi}=Q_{l}(\mathbf{k}),\quad\omega[\operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})]\frac{|\widetilde{E}_{tr}(\mathbf{k})|^{2}}{8\pi}=Q_{tr}(\mathbf{k})$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})>0,\quad \operatorname{Im}\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})>0$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\operatorname{Re}\varepsilon^{l}(\omega,\mathbf{k})]>0\,,\qquad \frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\operatorname{Re}\varepsilon^{tr}(\omega,\mathbf{k})-\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\right]>0$$

$$\varepsilon^{l}=\varepsilon^{tr}=1-\omega_{Le}^2/\omega^2$$

$$W_l(t,\mathbf{k})=\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}+\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}$$

$$W_{tr}(t,\mathbf{k})=\left(1+\frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\frac{|\tilde{E}_{tr}(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}+\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\frac{|\tilde{E}_{tr}(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}$$

$$\boxed{W_l(t,\mathbf{k})=\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{8\pi},\quad W_{tr}(t,\mathbf{k})=\frac{|\tilde{E}_{tr}(t,\mathbf{k})|^2}{8\pi}.}$$

$$\varepsilon^{l}=1-\omega_{Li}^2/\omega^2+\omega_{Le}^2/k^2V_{\gamma e}^2$$

$$W_l(t,\mathbf{k})=\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}+\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}+\frac{\omega_{Le}^2}{k^2V_{\gamma e}^2}\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}$$

$$\boxed{W_l(t,\mathbf{k})=\left(1+\frac{\omega_{Le}^2}{k^2V_{\gamma e}^2}\right)\frac{|\tilde{E}_l(t,\mathbf{k})|^2}{8\pi}}$$

$$\frac{dW(t,k)}{dt}-i\frac{\omega}{16\pi}[\varepsilon_{ij}(\omega,k)-\varepsilon_{ji}^{*}(\omega,k)]\tilde{E}_i^{*}(t,k)\tilde{E}_j(t,k)=Q(t,k)$$

$$\boxed{W(t,k)=\frac{1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\omega\left(\varepsilon'_{ij}(\omega,k)-\frac{(k^2\delta_{ij}-k_ik_j)c^2}{\omega^2}\right)\right]\tilde{E}_i(t,k)\tilde{E}_j^{*}(t,k)}$$

$$W=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}+\varepsilon_{\perp}\pm g\right)A^2=\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\perp}A^2,\quad A^2=|\tilde{E}_x|^2+|\tilde{E}_y|^2$$

$$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}^2)/8\pi$$

$$\mathbf{\Pi}(t,\mathbf{k}) = -\langle \rho_0(t,\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{4}\left(\rho_0(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*(t,\mathbf{k}) + \rho_0^*(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(t,\mathbf{k}) \right) = \frac{d\mathbf{P}_l(t,\mathbf{k})}{dt}$$

$$i\varepsilon^l(\hat{\omega}_M,\mathbf{k})\,\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}_l(t,\mathbf{k}) = 4\pi\rho_0(\mathbf{k}) \qquad i\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}_l(t,\mathbf{k}) - \frac{\partial\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})}{\partial\omega}\frac{d}{dt}\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{E}}_l(t,\mathbf{k}) = 4\pi\,\rho_0(\mathbf{k})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\omega}[\operatorname{Re}\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})]\frac{|E_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi}\right] + 2\mathbf{k}\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})]\,|E_l(t,\mathbf{k})|^2 = \mathbf{\Pi}(t,\mathbf{k})$$

$$\boxed{\mathbf{P}_l(t,\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\operatorname{Re}\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k})]\frac{|E_l(t,\mathbf{k})|^2}{16\pi} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}W_l(t,\mathbf{k})}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{r}_0 \qquad \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \sim \exp[-i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u})t] \qquad \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$W_{\text{Cp.}} + W_{\text{T.}} = Const, \;\; \mathbf{P}_{\text{Cp.}} + \mathbf{P}_{\text{T.}} = Const$$

$$\delta W_{\text{Cp.}} = W, \;\; \delta\mathbf{P}_{\text{Cp.}} = \mathbf{P}, \;\; \delta W_{\text{T.}} = m\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{u}, \;\; \delta\mathbf{P}_{\text{T.}} = m\delta\mathbf{u}$$

$$W + m\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{u} = 0, \;\; \mathbf{P} + m\delta\mathbf{u} = 0.$$

$$\mathbf{k}\,W = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{P}$$

$$\boxed{\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})}W}$$

$$W = \hbar\omega(\mathbf{k}) \qquad \mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}$$