Теория линейных электрических цепей

Под **электрической цепью** понимают некоторую совокупность электротехнических устройств (элементов), соединенных между собой определенным образом.

В качестве устройств (элементов) могут использоваться источники, преобразователи и потребители электрической энергии

Линейные электрические цепи представляют собой частный случай электрических цепей и характеризуются тем, что вольт-амперные характеристики всех элементов цепи линейны, а состояние самой цепи описывается с помощью линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами.

В линейных электрических цепях между внешним воздействием и реакцией цепи существуют ***линейно-пропорциональные соотношения***.

[illegible] (1.1)

[illegible] (1.2)

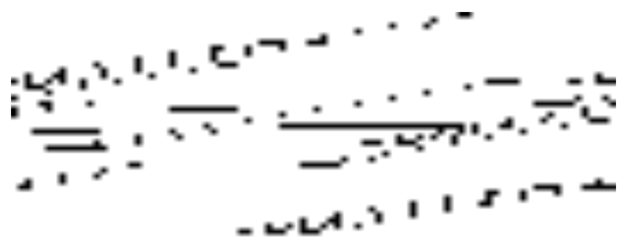
Принцип суперпозиции

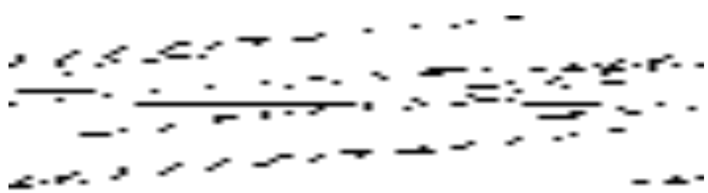
[illegible] (1.3)

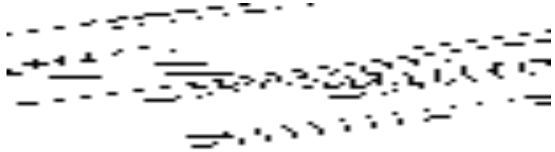
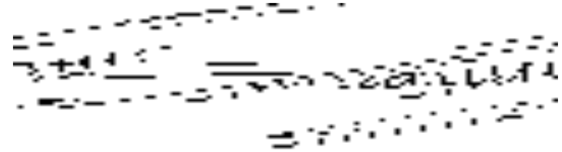
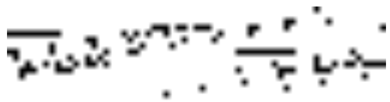
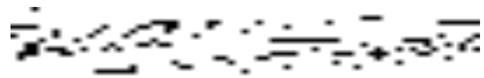
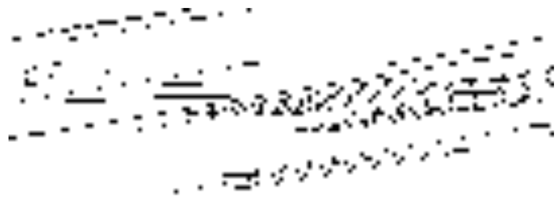
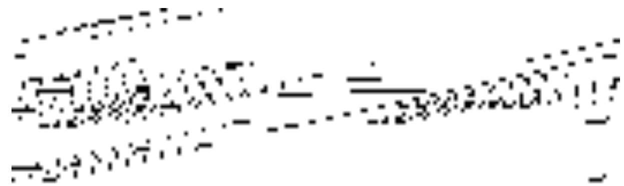
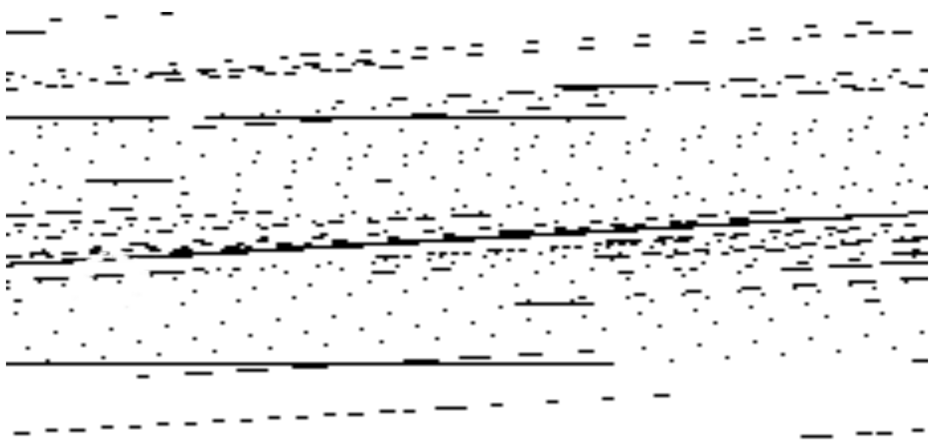
[illegible] (1.4)

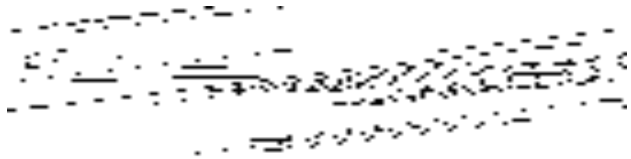
Свойство *дуальности*

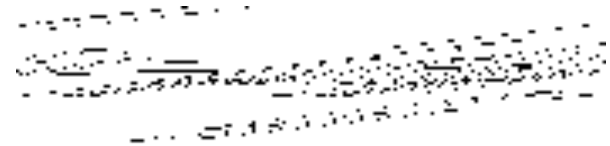
Под дуальностью понимают схожесть по структуре выражений, описывающих зависимость напряжения от тока для одного элемента цепи, и тока от напряжения – для другого. Соответственно сами элементы называются ***дуальными.***

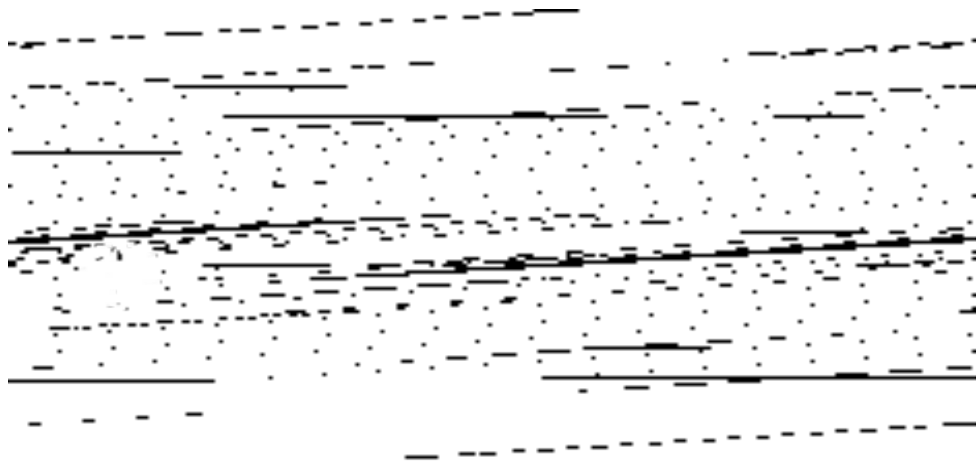










***Дуальными являются пары физических величин, понятий и законов электрических цепей, соответствующие друг другу в дуальных соотношениях*.**

Принцип взаимности (обратимости)

Сформулирован с помощью теоремы взаимности (обратимости): если эдс контура с номером i E_i вызывает в контуре с номером j ток I_j, то ***та же самая*** эдс, будучи помещена в контур с номером j, вызовет в контуре i ток I_i, равный току I_j.

Можно записать, что и .

Но поскольку и , то выполняется соотношение , что означает равенство сопротивлений передачи. Этот принцип лежит в основе понятия пассивного обратимого четырехполюсника

Формально любую электрическую цепь можно представить в виде многополюсника с числом пар внешних зажимов n.

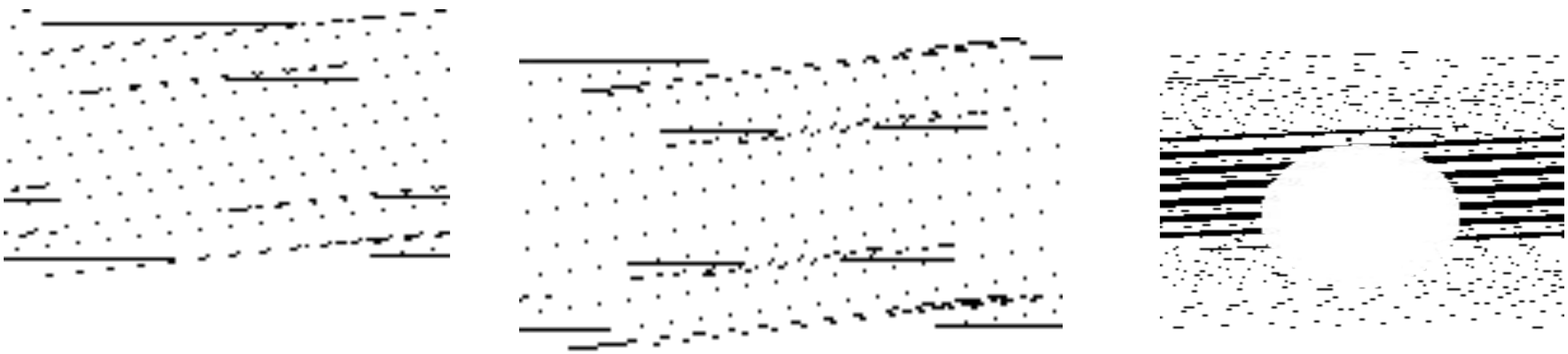


Рис. 1.2. Многополюсные цепи: *а* – двухполюсник; *б* – четырехполюсник; *в* – *n*-полюсник

Входные и передаточные характеристики

Формально под ***передаточной*** функцией подразумевается комплексный переменный коэффициент, устанавливающий линейную алгебраическую зависимость между выходной величиной (ток или напряжение в цепи) и входной величиной (ток или напряжение, подаваемые к входным зажимам).

На практике наиболее информативными с точки зрения анализа передающих свойств исследуемой цепи являются графики частотной зависимости модуля и аргумента передаточной функции, называемые ***амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками*** (АЧХ и ФЧХ) соответственно.

Если анализ работы цепи производится в большом частотном диапазоне, то описанные частотные характеристики целесообразно изображать не в линейном, а в логарифмическом масштабе, в котором по горизонтальной оси откладывают десятичный логарифм частоты, а по вертикальной – значение . Эта величина оценивается в децибелах.

ДВУХПОЛЮСНИКИ

Двухполюсником можно назвать любую электрическую цепь, взаимодействующую с внешней по отношению к ней схемой посредством двух зажимов. При этом свойства двухполюсников определяют характеристики всей цепи.

Двухполюсник, как и любая линейная электрическая цепь, может быть как активным, так и пассивным. Пассивным он является в том случае, если энергия, отданная им во внешнюю цепь, ни при каких условиях не превышает той, что была подведена к нему за все предшествующее время.

По количеству элементов, составляющих схему двухполюсника, они подразделяются на одноэлементные, двухэлементные (*RL*-, *RC*- и *LC*-двухполюсники), трехэлементные (*RLC*-двухполюсники) и т. д.

Двухполюсники, схемы которых включают резистивные сопротивления, называются диссипативными. В них происходит потеря подводимой энергии за счет превращения ее в тепловую с дальнейшим рассеянием этой энергии в пространстве.

Двухполюсники, схемы которых состоят только лишь из реактивных элементов (индуктивностей и емкостей), носят название реактивных двухполюсников.

Любой двухполюсник может быть охарактеризован своей входной функцией , которая представляет собой либо входное сопротивление , либо входную проводимость .

Реактивные *LC*-двухполюсники

К простейшим реактивным двухполюсникам можно отнести катушку индуктивности и конденсатор.

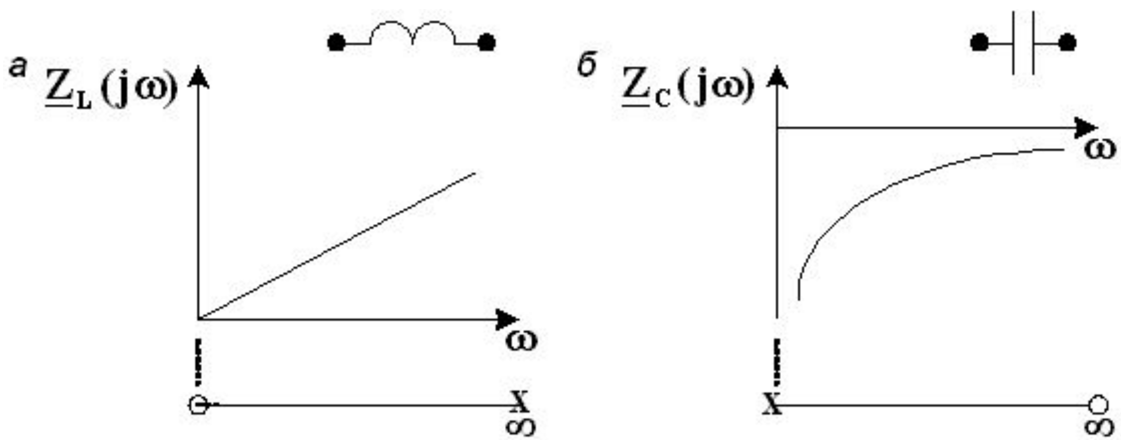
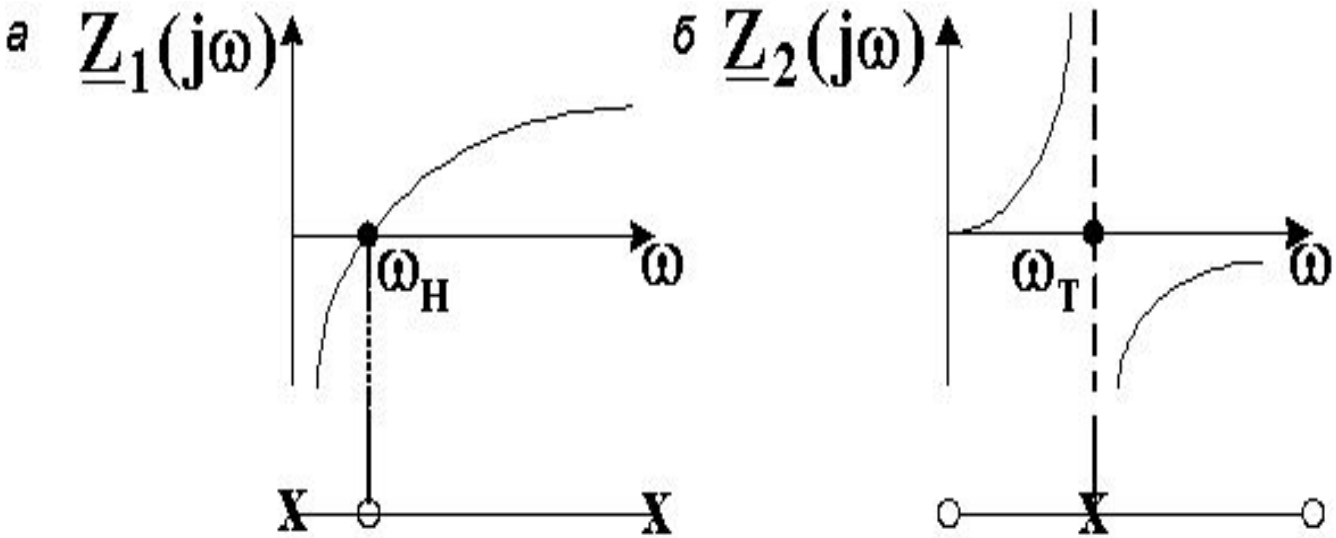


Рис. 2.1. Частотная зависимость входного сопротивления: *а* – для индуктивного элемента; *б* – для емкостного элемента

К простейшим *LC*-двухполюсникам можно отнести также последовательный и параллельный колебательный контур. Зависимости их сопротивлений от частоты представлены на рис. 2.2.



2.2. Частотная зависимость входного сопротивления: *а* – для последовательного контура; *б* – для параллельного контура

Здесь ,

где - частота резонанса напряжений последовательного колебательного контура;

где - частота резонанса напряжений параллельного контура.

Независимо от степени сложности схемы двухполюсников можно указать ряд закономерностей, характеризующих их общие свойства:

1) число резонансных частот любого реактивного двухполюсника на единицу меньше общего числа реактивных элементов в его схеме;

2) частоты резонансов напряжений и токов реактивного двухполюсника чередуются: между любыми двумя резонансами напряжений имеется один резонанс токов, и между любыми двумя резонансами токов находится резонанс напряжений;

3) при резонансе напряжений характер реактивности двухполюсника меняется с емкостного на индуктивный, а при резонансе токов – с индуктивного на емкостной. У многоэлементных реактивных двухполюсников характер реактивности контура изменяется с ростом частоты не один раз;

4) при возрастании частоты реактивное сопротивление двухполюсника в точках непрерывности возрастает (с учетом знака реактивного сопротивления);

5) если в схеме двухполюсника есть путь для прохождения постоянного тока, то первым наступает резонанс токов, а если такого пути нет, первым наступает резонанс напряжений;

6) зависимость сопротивления любого реактивного двухполюсника от частоты можно представить формулой Фостера:

[illegible]

где m – число резонансов напряжений; n – число резонансов токов.

Значения резонансных частот определяются следующим образом.

Для конкретной схемы двухполюсника составляется формула зависимости входного сопротивления от частоты в виде одной дроби. Тогда, приравняв числитель полученной дроби к нулю, можно найти частоты резонансов напряжений в схеме двухполюсника. Если же приравнять нулю знаменатель полученной дроби, можно определить частоты резонансов токов.

7) в зависимости от характера реактивности входного сопротивления при частотах вблизи нуля и на бесконечности ($\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$) все двухполюсники подразделяют на 4 класса. Каждому классу соответствует конкретный вид зависимости сопротивления от частоты.

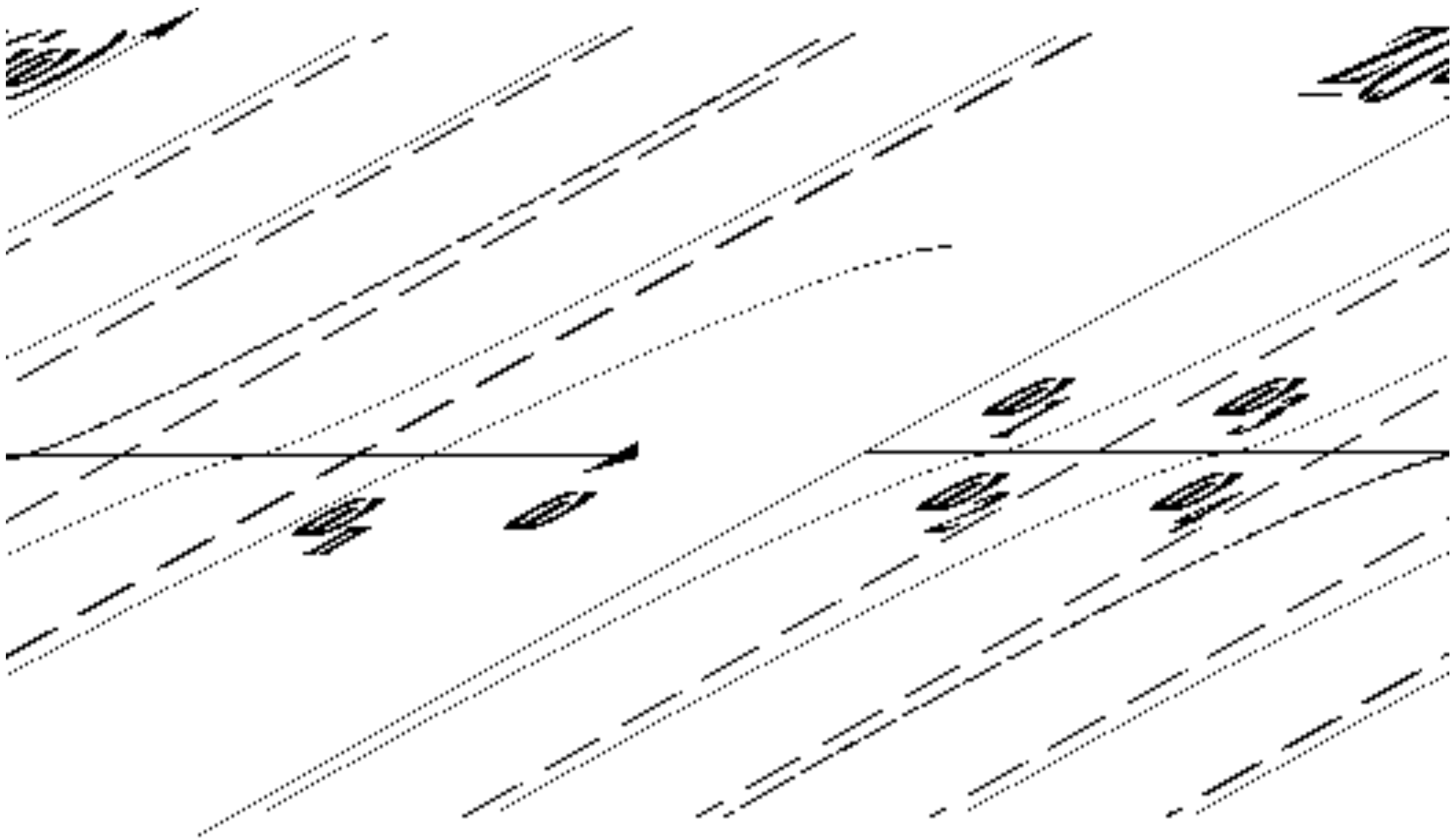


Рис. 2.4. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 1-го класса от частоты

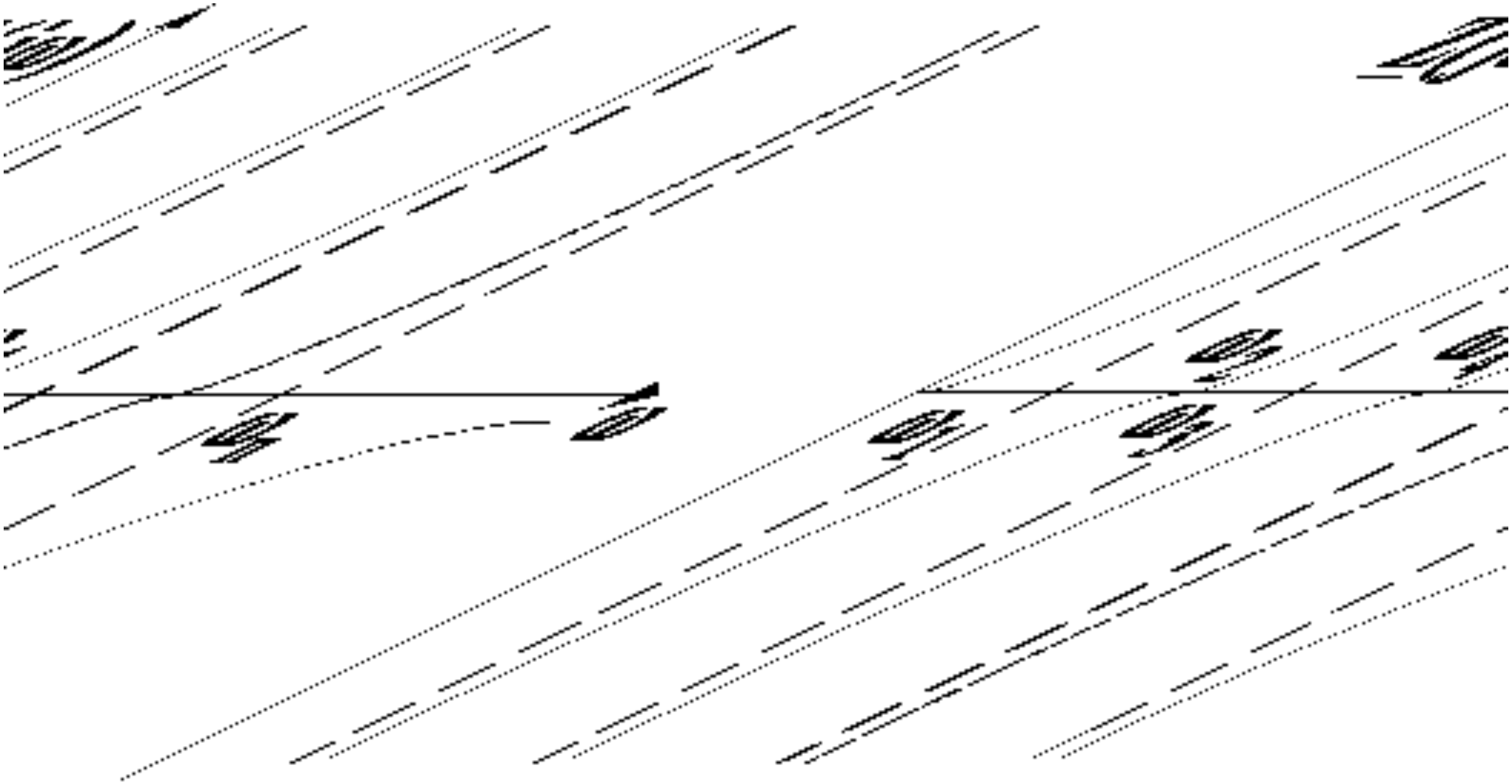


Рис. 2.5. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 2-го класса от частоты

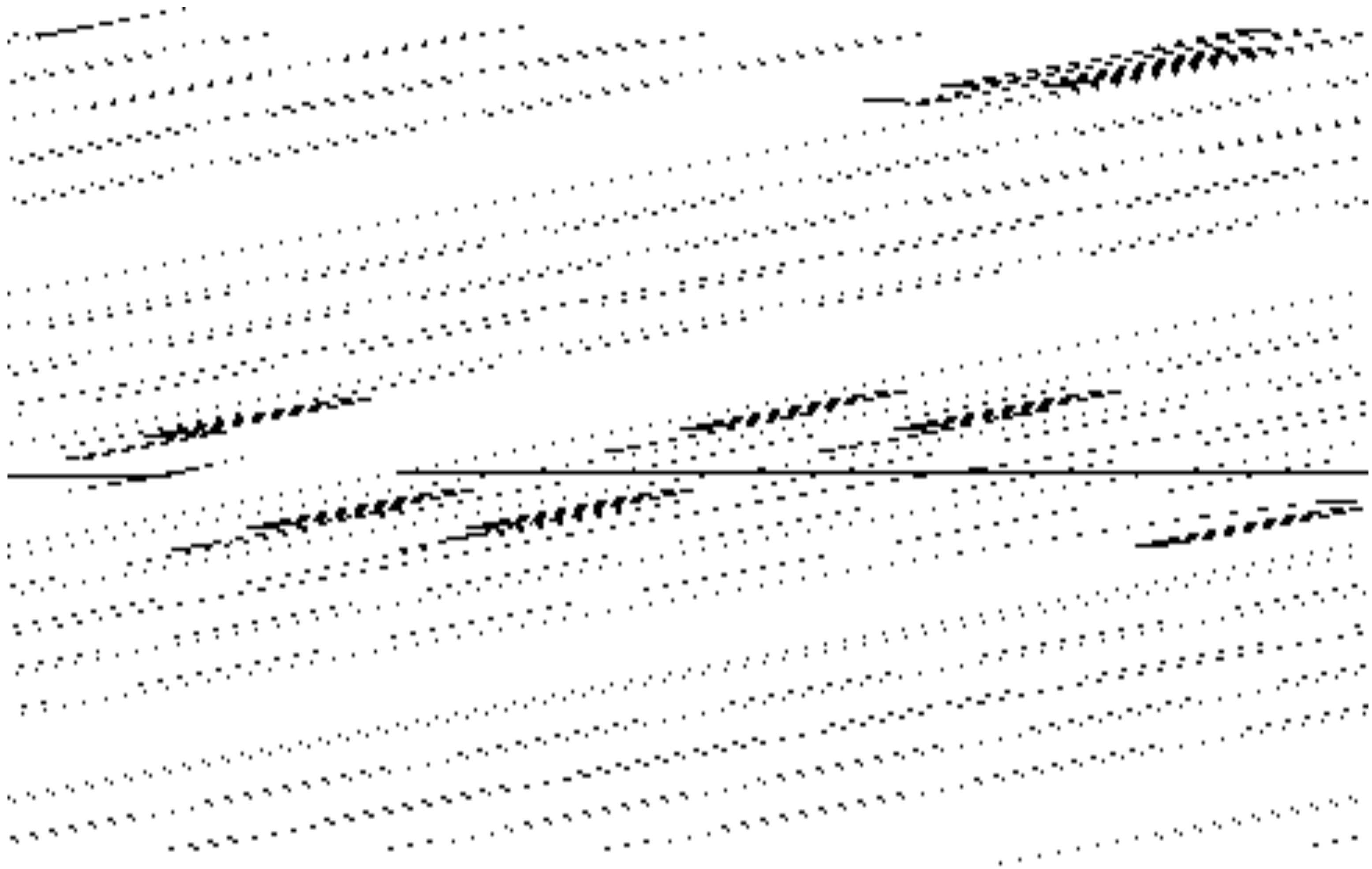


Рис. 2.6. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 3-го класса от частоты

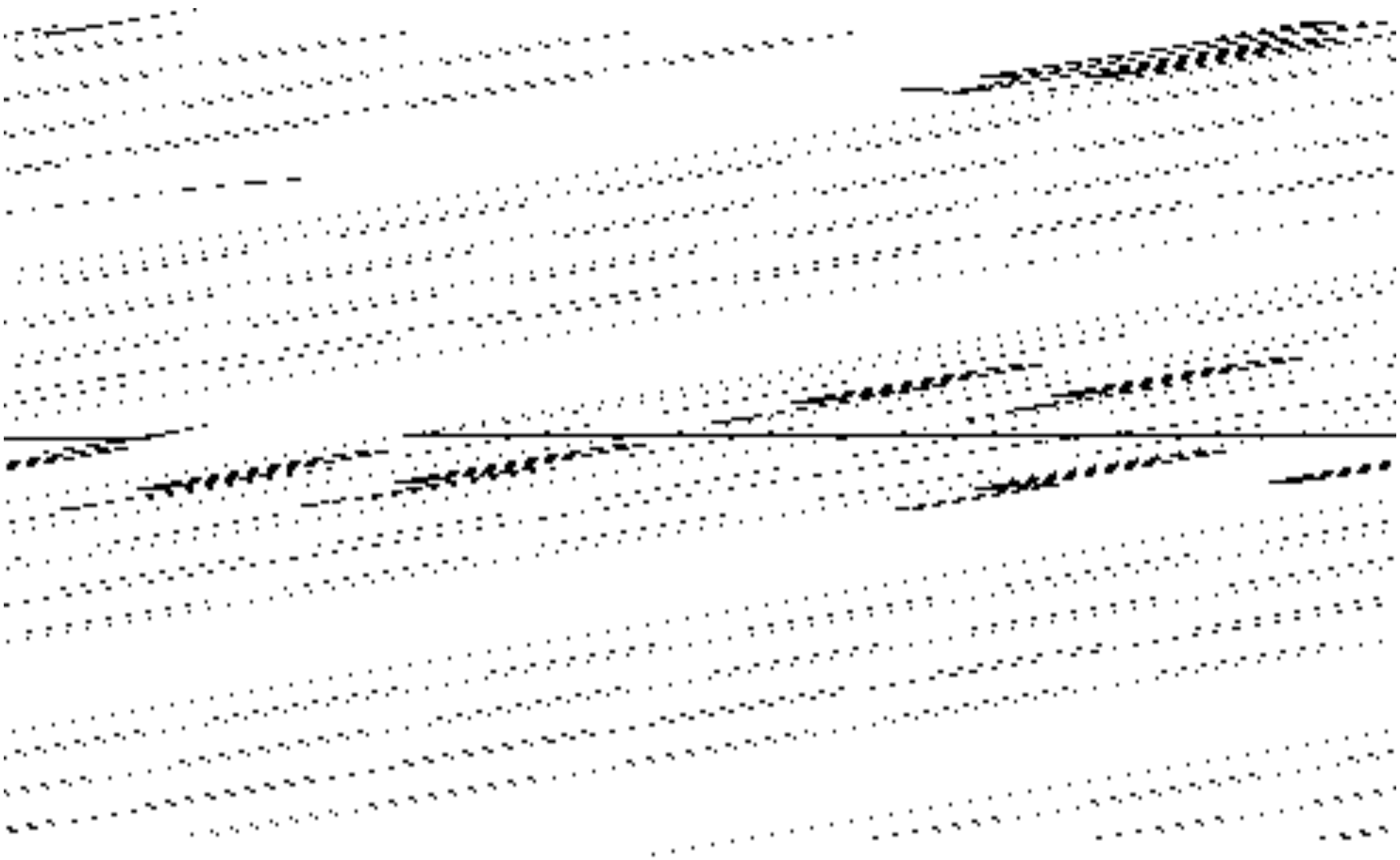


Рис. 2.7. Зависимость входного сопротивления двухполюсника 4-го класса от частоты

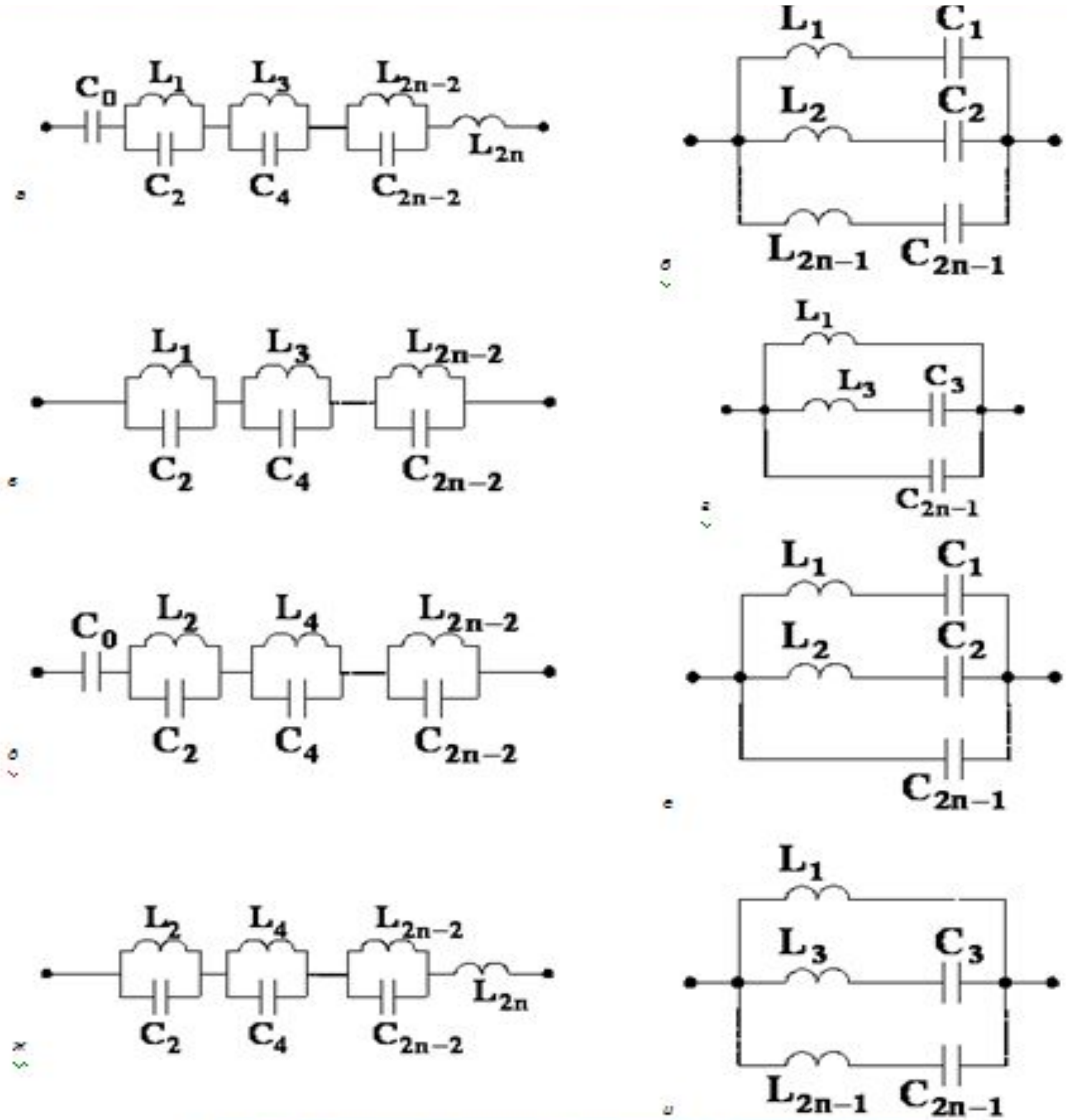


Рис. 2.8. Канонические схемы двухполюсников

Сопротивления новой схемы при преобразовании параллельно-последовательного соединения ветвей в параллельное (рис. 2.9) вычисляются с помощью коэффициентов перехода:

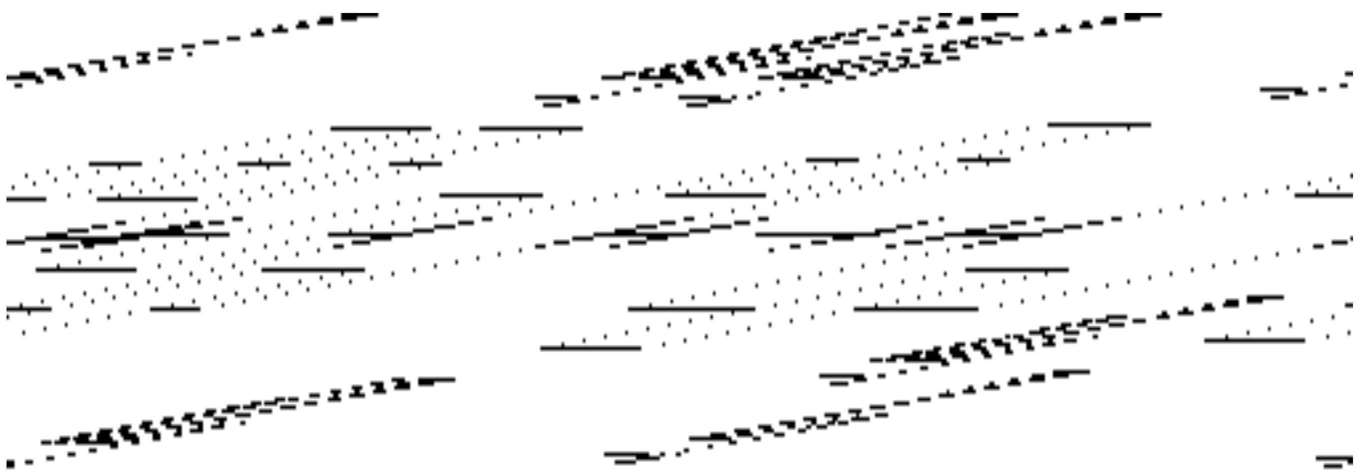


Рис. 2.9. Эквивалентное преобразование двухполюсника

В случае обратного перехода от параллельного соединения ветвей схемы к последовательно-параллельному (рис. 2.10), коэффициенты перехода вычисляются по формулам:

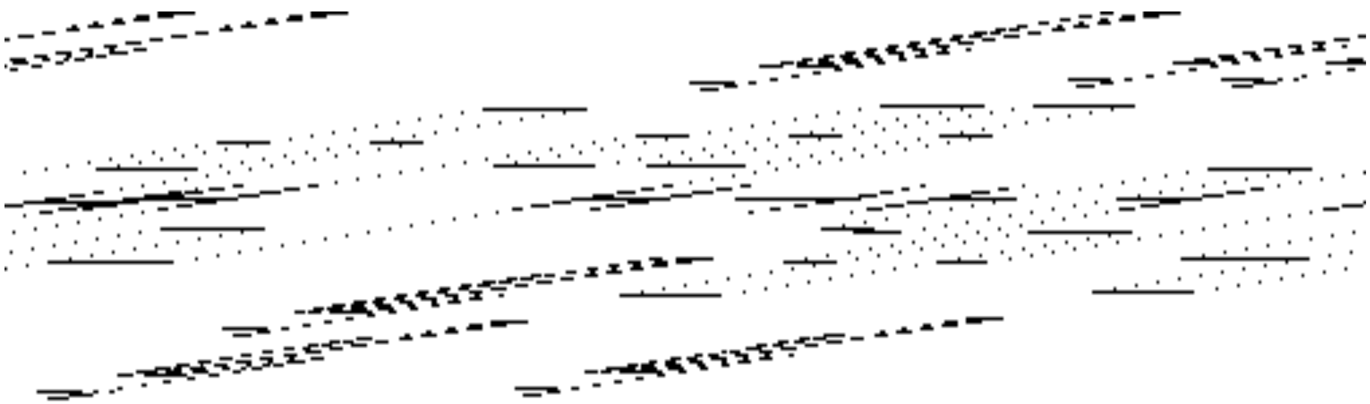


Рис. 2.10. Эквивалентное преобразование двухполюсника

Эквивалентными называются двухполюсники, имеющие различную структуру (схему), но одинаковую характеристику на всем диапазоне частот. Логично, что у эквивалентных двухполюсников резонансные частоты совпадают.

Обратные двухполюсники – к ним относятся ***двухполюсники с входными сопротивлениями*** [illegible] ***и*** [illegible] ***, произведение которых является действительным положительным числом*** [illegible] ***, не зависящим от частоты,*** т. е.

[illegible]

При этом сопротивление

[illegible] (2.3)

В основе построения схемы обратного двухполюсника и определения ее параметров лежит свойство дуальности линейных электрических цепей. Практически это построение сводится к замене последовательного соединения ее элементов (сопротивлений) параллельным соединением обратных (дуальных) элементов (сопротивлений), номинальные величины которых определяются с помощью той же формулы (2.3).

ЗАДАЧА: для реактивного двухполюсника построить схему обратного двухполюсника и рассчитать его элементы.

Схема реактивного двухполюсника приведена на рис. 1.

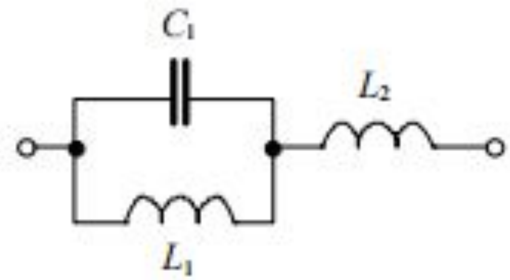
а)


Рис. 1. Исходный реактивный двухполюсник.

Значения элементов двухполюсников:

$L_1 = 10$ мГн; $C_1 = 0.3$ мкФ;

$L_2 = 18$ мГн.

Коэффициент перехода $R^2 = k = 0.7$ Ом^2.

Для решения задачи нужно выполнить следующее:

используя правила, построить схему обратного двухполюсника относительно заданного;

рассчитать значения элементов обратного двухполюсника по данным исходного двухполюсника при указанном коэффициенте перехода (отношении между значениями элементов двухполюсников);

определить все резонансные частоты и характеры резонансов исходного и обратного двухполюсников;

построить частотные характеристики реактивных сопротивлений обоих двухполюсников ($Z = jx(\omega)$) и показать характеристические строки двухполюсников с расположенными на них полюсами и нулями;

указать, к каким классам канонических схем двухполюсников относятся оба двухполюсника и в чем особенность их свойств;

рассчитать реактивные сопротивления двухполюсников на одной частоте, лежащей в каждой из частотных полос: $0 - \omega_1$, $\omega_1 - \omega_2$, ... $\omega_n - \infty$, где ω_1, ω_2, ω_n, - соответственно первая, вторая и последняя резонансные частоты.

Рассмотрим двухэлементные *LC* двухполюсники.

Последовательное соединение (рис. 2).

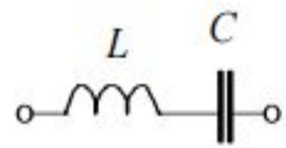


Рис. 2. Последовательное соединение *LC*.

Сопротивление двухполюсника:

$$Z(\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = jL\frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\omega} = jL\frac{\omega^2 - \omega_p{}^2}{\omega}, \qquad (1)$$

где

$\omega_p{}^2 = \dfrac{1}{LC}$ - резонансная частота (резонанс напряжений).

Проводимость двухполюсника:

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = -j\frac{1}{L}\cdot\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_p{}^2}.$$

Параллельное соединение (рис. 3).

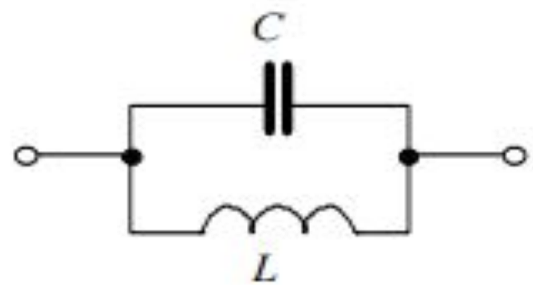


Рис. 3. Параллельное соединение LC.

Проводимость двухполюсника:

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = jC\frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\omega} = jC\frac{\omega^2 - \omega_p{}^2}{\omega},$$

где

$$\omega_p{}^2 = \frac{1}{LC}$$ - резонансная частота (резонанс токов).

Сопротивление двухполюсника:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} = -j\frac{1}{C}\cdot\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_p{}^2}.$$

Найдем сопротивление ***исходного двухполюсника*** (рис. 1).

$$Z(\omega) = Z_2(\omega) + Z_1(\omega) = j\omega L_2 + \left(-j\frac{1}{C_1}\cdot\frac{\omega}{\omega^2-\omega_1^{\,2}}\right) =$$

$$= jL_2\cdot\frac{\omega\left(\omega^2-\left(\omega_1^{\,2}+\frac{1}{L_2C_1}\right)\right)}{(\omega^2-\omega_1^{\,2})} = jL_2\cdot\frac{\omega(\omega^2-\omega_2^{\,2})}{(\omega^2-\omega_1^{\,2})},$$

где

$$\omega_1^{\,2} = \frac{1}{L_1C_1} = \frac{1}{1\times10^{-2}\cdot3\times10^{-7}} = 3.333\times10^{8}\ \ 1/\text{c}^2;$$

$$\omega_2^{\,2} = \omega_1^{\,2} + \frac{1}{L_2C_1} = 3.333\times10^{8} + \frac{1}{1.8\cdot10^{-2}\cdot3\times10^{-7}} = 5.185\times10^{8}\ \ 1/\text{c}^2;$$

Сопротивление исходного двухполюсника:

$$Z(\omega) = jL_2\cdot\frac{\omega(\omega^2-\omega_2^{\,2})}{(\omega^2-\omega_1^{\,2})}, \qquad (3)$$

где

$$L_2 = 0.018\ \text{Гн};\ \ \omega_1^{\,2} = 3.333\times10^{8}\ \ 1/\text{c}^2;\ \omega_2^{\,2} = 5.185\times10^{8}\ \ 1/\text{c}^2.$$

Рассчитаем значения элементов *обратного двухполюсника*.

Для исходного двухполюсника с сопротивлением заданным формулой (3), сопротивление обратного двухполюсника будет:

$$Z'(\omega) = -j\frac{k}{L_2}\frac{(\omega^2-\omega_1^2)}{\omega(\omega^2-\omega_2^2)}, \qquad (4)$$

где

$Z{\cdot}Z' = k = 0.7$ Ом^2 – постоянный множитель, зависящий от значений элементов схемы.

Существует четыре схемы реализации двухполюсника, заданного формулой (4), см. табл. 1. Выберем схему реализации (рис. 4) разложением сопротивления $Z'(\omega)$ на простые дроби:

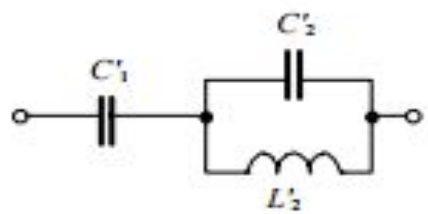


Рис. 4. Схема реализации обратного двухполюсника.

Найдем значения элементов обратного двухполюсника.

$$Z'(\omega) = Z_1(\omega) + Z_2(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1'} + \left(-j\frac{1}{C_2'}\cdot\frac{\omega}{\omega^2-\omega_2^2}\right) =$$

$$= -j\frac{C_1'+C_2'}{C_1'\cdot C_2'}\cdot\frac{\left(\omega^2-\omega_2^2\frac{C_2'}{C_1'+C_2'}\right)}{\omega(\omega^2-\omega_2^2)} = -j\frac{k}{L_2}\cdot\frac{(\omega^2-\omega_1^2)}{\omega(\omega^2-\omega_2^2)} = .$$

Находим:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \cdot \frac{C_2'}{C_1' + C_2'} \Rightarrow \frac{C_1' + C_2'}{C_2'} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{C_1'}{C_2'};$$

$$\frac{k}{L_2} = \frac{C_1' + C_2'}{C_1' \cdot C_2'} = \frac{1}{C_1'} \frac{C_1' + C_2'}{C_2'} = \frac{1}{C_1'} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \Rightarrow C_1' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}.$$

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = 1 + \frac{C_1'}{C_2'} \Rightarrow C_2' = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} C_1' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Получим:

$$C_1' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad C_2' = \frac{L_2}{k} \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

•

По формуле для резонансной частоты находим:

$$L_2' = \frac{1}{\omega_2^2 \cdot C_2'};$$

Вычисляем значения элементов обратного двухполюсника:

$$C_1' = \frac{L_2}{k}\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \quad \frac{0.018}{0.7}\cdot\frac{5.185\times10^8}{3.333\times10^8} = 0.04 \quad \text{Ф};$$

$$C_2' = \frac{L_2}{k}\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = \quad \frac{0.018}{0.7}\cdot\frac{5.185\times10^8}{5.185\times10^8 - 3.333\times10^8} = 0.072 \quad \text{Ф};$$

$$L_2' = \frac{1}{\omega_2^2 \cdot C_2'} = \quad \frac{1}{5.185\times10^8 \cdot 0.072} = 2.679\times10^{-8} \quad \text{Гн};$$

Сопротивление обратного двухполюсника:

$$Z'(\omega) = -j\frac{k}{L_2}\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)},$$

где

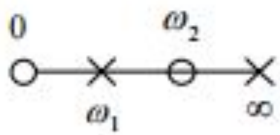
$$\frac{k}{L_2} = 38.89 \ \text{Ом/с};\ \omega_1^2 = 3.333\times10^8 \ 1/\text{с}^2;\ \omega_2^2 = 5.185\times10^8 \ 1/\text{с}^2.$$

Параметры схемы (рис. 4) обратного двухполюсника:

$$C'_1 = 0.04 \ \text{Ф};\ C'_2 = 0.072 \ \text{Ф};\ L'_2 = 2.679\times10^{-8} \ \text{Гн}.$$

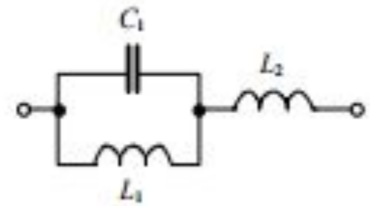
Характеры резонансов исходного и обратного реактивных двухполюсников.

Исходный двухполюсник (рис. 5).



$$Z(\omega) = jL_2 \cdot \frac{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)},$$

а)



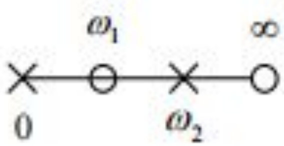
а) б) в)

Рис. 5.

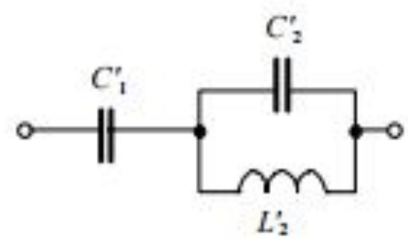
Частота резонанса ω_2 образована последовательным включением катушки L_2 и контура L_1C_1 (резонанс напряжений). Такие колебания возможны при *замкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Частота резонанса ω_1 представляет собой частоту собственных колебаний колебательного контура L_1C_1 (резонанс токов). Такие колебания возможны при *разомкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Обратный двухполюсник (рис. 6).



$$Z'(\omega) = -j\frac{k}{L_2}\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)},$$



а) б) в)

Рис. 6.

Частота резонанса ω_2 образована параллельным включением $L'_2C'_2$ (резонанс токов). Такие колебания возможны при *разомкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Частота резонанса ω_1 представляет собой частоту собственных колебаний цепи, образованной последовательным соединением $C'_1L'_2C'_2$ (резонанс напряжений). Такие колебания возможны при *замкнутых* внешних зажимах двухполюсника.

Характеристические строки двухполюсников изображены на рис. 5. а) и рис. 6. а).

Частотные характеристики реактивных двухполюсников изображены на рис.7, 8.

В табл.1 дана классификация реактивных двухполюсников по характеристическим строкам. Исходный двухполюсник относится к первому типу, схема 1. Обратный двухполюсник относится ко второму типу, схема 3.

Особенность свойств двухполюсников (рис. 5, 6):

- для всех реактивных двухполюсников в выражениии для сопротивления числитель является четным, а знаменатель нечетным по частоте (либо наоборот);
- двухполюсник (рис. 6) не пропускает постоянный ток, обратный ему (рис. 5) - пропускает;
- процессы в цепях, составленных из катушек индуктивности и конденсаторов с высокой добротностью не сопровождаются сколь-нибудь значительным выделением энергии.

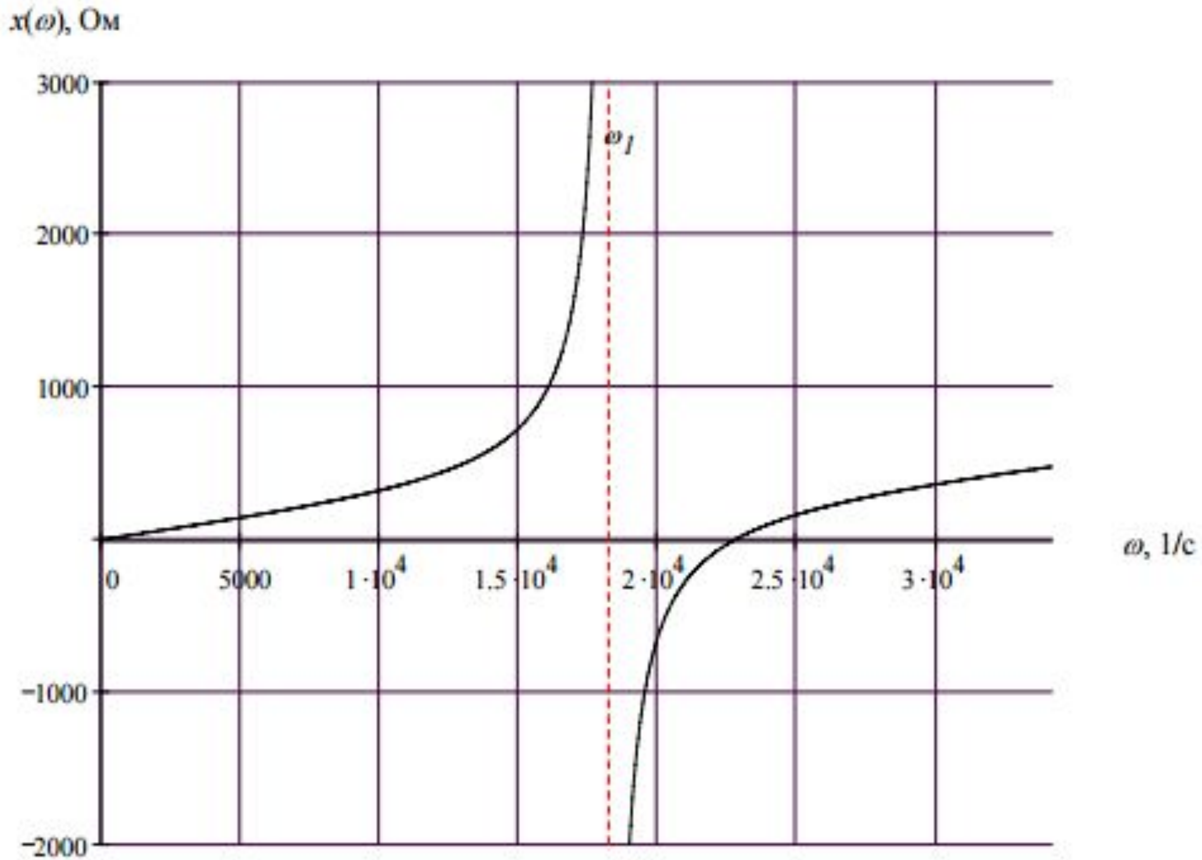


Рис. 7. Частотная характеристика исходного двухполюсника.

$x'(\omega)$, Ом

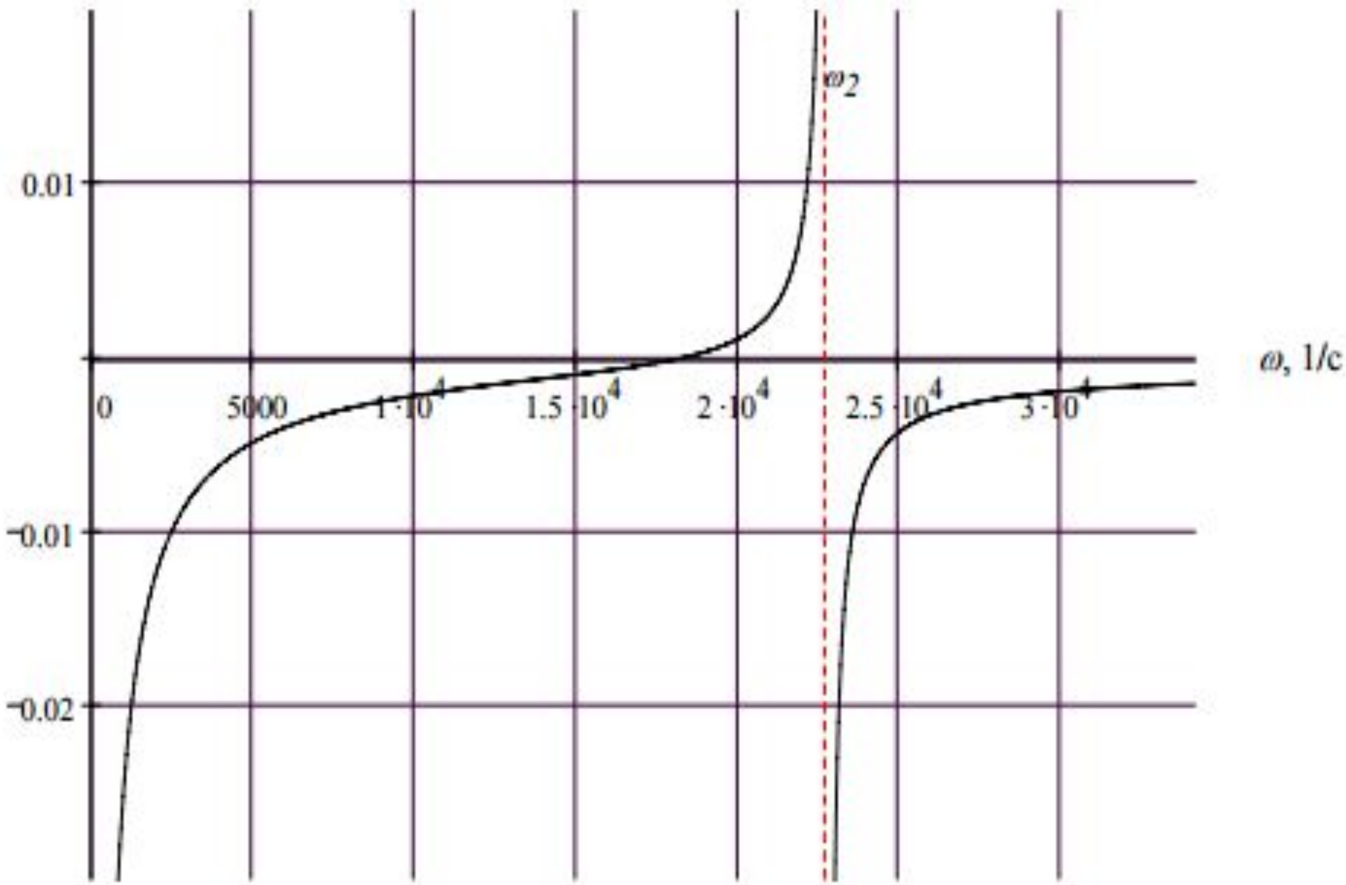


Рис. 8. Частотная характеристика обратного двухполюсника.

Рассчитаем реактивные сопротивления двухполюсников на одной частоте, лежащей в каждой из частотных полос: $0 - \omega_1$, $\omega_1 - \omega_2$, ... $\omega_n - \infty$,

.

Выберем следующие часторы:

$$\omega_{01} = 9.13 \times 10^3 \ 1/c; \ \omega_{12} = 2.05 \times 10^4 \ 1/c; \quad \omega_{2\infty} = 3.42 \times 10^4 \ 1/c.$$

Для исходного двухполюсника:

$$Z(\omega) = j \cdot 1.8 \cdot 10^{-2} \cdot \omega \cdot \frac{\omega^2 - 5.185 \cdot 10^8}{\omega^2 - 3.333 \cdot 10^8}$$

$$Z\left(9.13 \times 10^3\right) = 286j \ \text{Ом};$$

$$Z\left(2.05 \times 10^4\right) = -417j \ \text{Ом};$$

$$Z\left(3.42 \times 10^4\right) = 479j \ \text{Ом};$$

Для обратного двухполюсника:

$$Z'(\omega) = -38.89 \ j \cdot \frac{\omega^2 - 3.333 \cdot 10^8}{\omega \cdot \left(\omega^2 - 5.185 \cdot 10^8\right)}$$

$$Z'\left(9.13 \times 10^3\right) = -2.45j \times 10^{-3} \ \text{Ом};$$

$$Z'\left(2.05 \times 10^4\right) = 1.68j \times 10^{-3} \ \text{Ом};$$

$$Z'\left(3.42 \times 10^4\right) = -1.46j \times 10^{-3} \ \text{Ом};$$