

Правило сложения для совместных A и B выражает вероятность суммы произвольных событий, и совместных, и несовместных:

если A и B не пересекаются, $P(A \cdot B) = 0$

Поскольку в любых случаях $P(A \cdot B) \geq 0$,
можно записать $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$

Это *неравенство вероятностей*
обобщается на $k > 2$ событий:

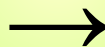
Вероятность суммы нескольких
событий не превосходит суммы
их вероятностей

Формула Бернулли

от «хотя бы 1»
к «ровно 1, ровно 2, ...»

Позволяет определять вероятности «ровно одного», «ровно двух» и т.д. наступлений события в нескольких независимых экспериментах (попаданий при выстрелах, успехов в сделках и др.)

Пояснение



Если событие A может произойти в каждом из n независимых опытов с вероятностью p , то вероятность его наступления ровно k раз в данной серии опытов выражается формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Следует из правил умножения и сложения вероятностей:

вероятность, что A наступит в некоторых k опытах и не наступит в $n-k$ остальных равна $p^k q^{n-k}$ – по правилу умножения для независимых событий;

по правилу сложения $P_n(k)$ равна сумме таких вероятностей для всех вариантов k наступлений и $n-k$ не наступлений A ; количество таких вариантов есть число сочетаний из n элементов по k , т.е., C_n^k

Пример

В серии из 3-х независимых выстрелов с вероятностью попадания в каждом 0.7:

вероятность только одного попадания

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189,$$

вероятность ровно двух попаданий

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.441$$

Формула полной вероятности и формула Байеса

**связаны с ситуациями,
в которых эксперимент
как бы состоит из 2-х стадий:
на 1-ой «разыгрываются»
взаимоисключающие условия,
на 2-ой – определяется исход,
когда имеет место одно из условий**

Пример. Имеются 3 урны
с белыми и черными шарами.
Шар можно вынуть случайным образом
из одной из них.

Какова вероятность того,
что извлеченный наугад шар белый,
если

в 1-ой урне 2 белых и 3 черных шара,
во 2-ой 4 белых и 1 черный,
в 3-ей – 3 белых шара?

1) Выбор урны (условий) – это
гипотеза H_j ,
что шар берется из j -ой урны
(*hypothesis*, предположение).

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу:
они несовместны (альтернативны),
одно из них обязательно произойдет \rightarrow

$$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega,$$
$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Выбор случайный \rightarrow

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

1) Выбор урны (условий) – это *гипотеза* H_j
что шар берется из j -ой урны
(*hypothesis*, предположение).

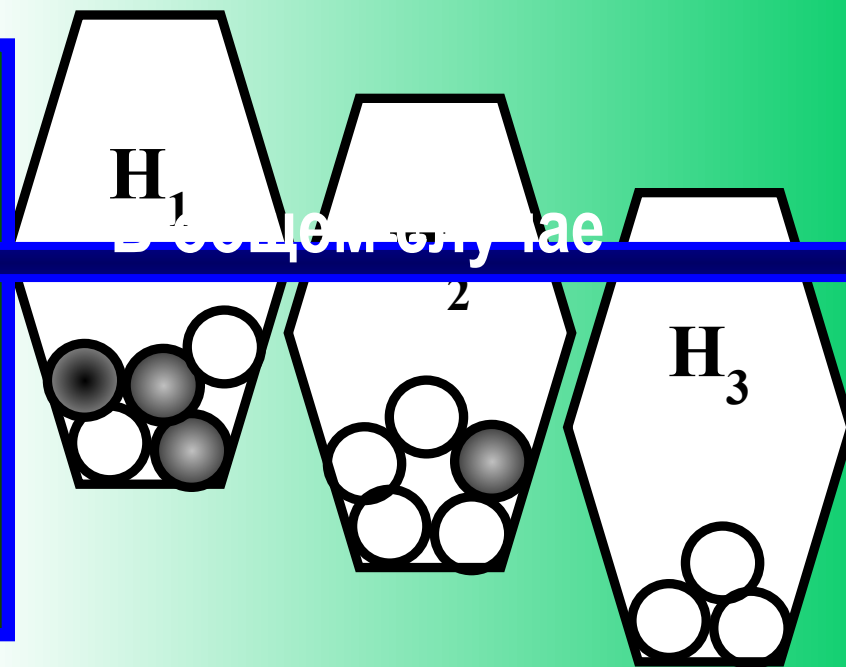
События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу:
они несовместны (альтернативны),
одно из них обязательно произойдет \rightarrow

$$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega,$$
$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Выбор случайный \rightarrow

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

2) Выбор белого из j -ой A_j – это выбор и j -ой урны, и белого шара из нее \rightarrow по правилу умножения $P(A_j) = P(H_j) \cdot P(A/H_j)$.



По правилу сложения
 $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$
 $= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)$

Вероятность вынуть белый шар
 $P(A) = 1/3 \cdot (2/5 + 4/5 + 3/3) = 11/15$

Если об условиях эксперимента можно сделать k исключаящих друг друга предположений – гипотез H_1, H_2, \dots, H_k , и событие A может иметь место при одной из этих гипотез, то вероятность события A определяется по формуле *полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(H_j) \cdot P(A/H_j)$$

Абсолютная, безусловная вероятность события в эксперименте с гипотетическими условиями рассчитывается как сумма произведений вероятностей гипотез на условную вероятность события при соответствующей гипотезе

Пример

Нормальный режим работы устройства
наблюдается в 80% случаев,
в 20% – режим аномальный.

Вероятность отказа устройства (А)
в 1-ом режиме 0.1, во 2-ом – 0.7

Где гипотезы, где условные вероятности?

Безусловная вероятность отказа,
независимо от того,
в каком режиме он произошел:

$$P(A) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.22$$

В условиях предыдущей задачи пусть событие имело место – устройство прекратило работу. Какова вероятность, что отказ произошел в нормальном режиме?

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{j=1}^k P(H_j)P(A/H_j)}$$

Для ответа на подобные вопросы используется формула Байеса (для вероятностей гипотез)

Доля, шансы гипотезы в наступлении А

В общем случае

Пусть A может произойти при наступлении одного

Какова вероятность случайно встретить в дверях длинноволосую студентку, если у 15 из 40 студенток в аудитории короткая стрижка?

Если до опыта вероятности гипотез были

$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_k),$

а в результате опыта событие A произошло,

то «новые» *условные* вероятности гипотез рассчитываются по *формуле Байеса*

Th

e

En

В «примере с устройством».

d

вероятность того,
что отказ случился
при работе в нормальном режиме,
равна

$$P(H_1/A) = 0.8 \cdot 0.1 / [0.22 = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7] = 0.36$$