Аналитические методы оценки надежности ИС

Под аналитическим исследованием надежности некоторой системы понимают расчет ее надежности на основе данных о надежности компонентов, структуре, условиях функционирования и режиме обслуживания.

Методы оценки надежности сложных систем могут быть сведены в 3 группы:

1. методы, базирующиеся на аппарате классической теории вероятности;
2. методы, использующие аппарат теории Марковских и полумарковских процессов;
3. методы, основанные на аппарате теории функции случайных аргументов.

методы, базирующиеся на аппарате классической теории вероятности

Графо-вероятностный метод, основан на использовании графов для наглядного отображения возможных путей развития состояний системы. Подобный граф является ориентированным, его называют *деревом логических возможностей*. В его узлах указываются состояния системы, а на ребрах – вероятности соответствующих переходов, в результате чего получается размеченный граф.

Узел, с которого начинается построение графа, называется *начальным*. *Траекторией* некоторого *узла* называется совокупность ребер, соединяющих данный узел с начальным.

Вероятность достижения некоторого *узла* графа равна сумме вероятностей всех его траекторий.

Вероятность траектории равна произведению вероятностей всех входящих в неё ребер.

Логико-вероятностный метод, представляет собой объединение теоретико-вероятностного аппарата с аппаратом алгебры логики.

Использование аппарата математической логики позволяет формализовать условия работоспособности сложных структур и получать формулы для расчета надежности.

Положения математической логики:

1. Если об изделии можно утверждать, что оно работоспособно, если работоспособен его элемент *а или b,* можно сделать вывод о том, что работоспособность изделия (событие с) и работоспособности элементов *а* и b (событие *а* и событие b*)* связаны между собой логическим уравнением работоспособности:

$$c = a \bigvee b$$

2. Если об изделии можно утверждать, что оно работоспособно, если работоспособны элемент *а* и элемент b*,* можно сделать вывод о том, что работоспособность изделия (событие *с)* и работоспособности элементов *а* и b (событие *а* и событие b*)* связаны между собой логическим уравнением работоспособности:

$$c=a \bigwedge b$$

3. Если работоспособное состояние элемента *а* обозначить *а,* то неработоспособное состояние элемента *а* обозначается $\bar{a}$

4. Логические операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания - основные операции, используемые в прикладной теории надежности, так как к ним могут быть сведены все другие логические операции.

5. Сложную логическую функцию можно минимизировать, т. е. преобразовать ее таким образом, что она будет содержать наименьшее число членов или в ней не будет повторяющихся членов.

6. Логические функции можно преобразовать в функции алгебраические, если заменить все логические операции арифметическими по следующим правилам:

$a \vee b = Pa + Pb - Pa \cdot Pb$; $a \wedge b = Pa \cdot Pb$; $\bar{a} = 1 - Pa$ $a \cdot a = P(a)$

Применение формулы полной вероятности при расчете надежности систем

При использовании формулы полной вероятности учитываются гипотезы:

H_1, H_2, …, H_n – несовместные предполагаемые события, образующие полную группу. В месте с одним из этих событий может произойти рассматриваемое событие X – безотказная работа системы в течении заданной наработки $(0, t_i)$.

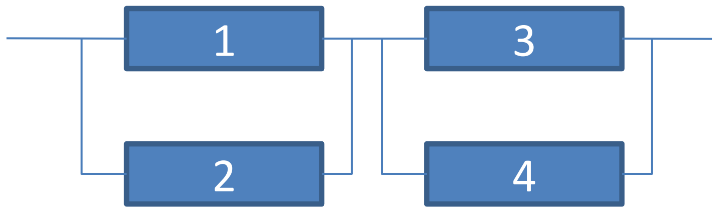
Вероятность появления события X равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы $P(H_j)$ на условную вероятность $P(X|H_j)$ события при этой гипотезе:

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(X \mid H_j)$$

При расчете надежности по формуле полной вероятности выбирается определенная группа элементов логической схемы и формируются гипотезы о том, что же произошло с этой группой элементов в течении заданной наработки. В каждой из гипотез учитывается, что для любого элемента рассматриваемой группы возможным исходом является либо безотказная работа, либо отказ.

При вычислении условной вероятности безотказной работы системы предполагается, что произошли соответствующие события (безотказная работа или отказ одного или нескольких элементов) и рассматриваются соответствующие условные логические схемы.

Пример. Рассмотрим группу из 1-го и 3-го элементов



гипотезы	состояния		Вероятность гипотезы P(Hj)	Условная вероятность P(X|Hj)
	1	3		
H_1	1	1	p_1p_3	1
H_2	0	1	$(1-p_1)p_3$	p_2
H_3	1	0	$p_1(1-p_3)$	p_4
H_4	0	0	$(1-p_1)(1-p_3)$	p_2p_4

$$p_c = p_1p_3 + (1-p_1)p_3p_2 + p_1(1-p_3)p_4 + (1-p_1)(1-p_3)p_2p_4 = \ldots$$

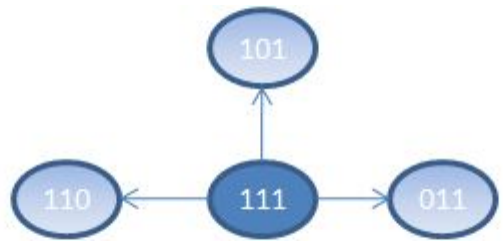
Переход от логической схемы к графу состояний системы

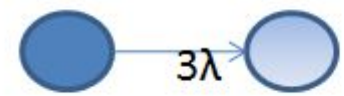
Такой переход необходим при смене метода расчета надежности, при сопоставлении результатов расчетов, выполненных различными методами, вычисления выигрыша в надежности при переходе от невосстанавливаемой к восстанавливаемой системе и других случаях.

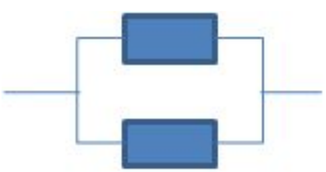
Типовые структуры для невосстанавливаемых систем

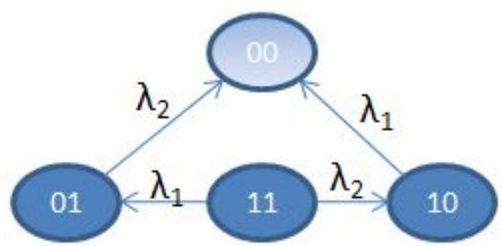
Тип

Графы



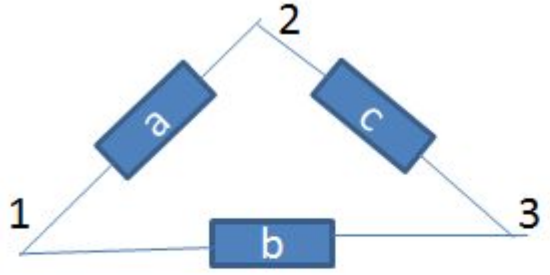


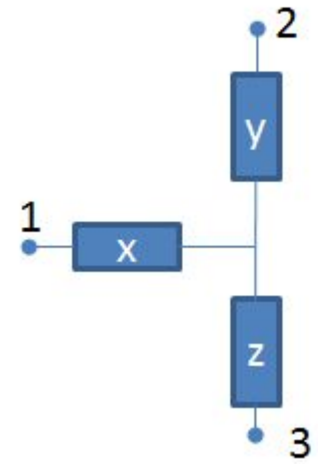




Структурный анализ

Сложность и трудность расчетов надежности вызывается тем, что структура исследуемых объектов сложная. Поэтому, прежде чем начинать расчет надежности, необходимо преобразовать сложную структуру в более простую и удобную для расчетов.





$$a \vee bc = x \wedge y \qquad P_a + P_b P_c - P_a P_b P_c = P_x P_y$$

$$b \vee ac = x \wedge z \qquad P_b + P_a P_c - P_a P_b P_c = P_x P_z$$

$$c \vee ab = y \wedge z \qquad P_c + P_a P_b - P_a P_b P_c = P_y P_z$$

методы, использующие аппарат теории марковских и полумарковских процессов

Если случайная величина изменяется в процессе опыта, то возникает случайная функция – функция, которая в результате опыта может принять тот или другой вид, заранее не известный.

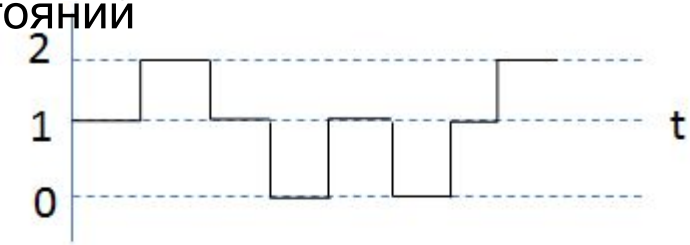
Если аргументом случайной функции является время, то такая случайная функция называется *вероятностным (случайным)* процессом. Функционирование АСУ, ИС, ВТ представляет собой реализацию вероятностных процессов.

Чтобы охарактеризовать вероятностный процесс, необходимо указать тип процесса и его числовые характеристики. Наиболее подходящим для описания процессов, происходящих во многих областях науки и техники, является *марковский* процесс.

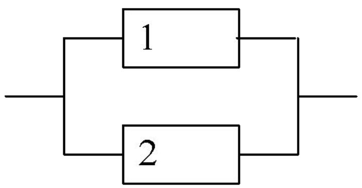
Марковский процесс – процесс, у которого для каждого момента времени вероятность любого состояния объекта в будущем зависит только от состояния объекта в настоящий момент времени и не зависит от того, каким образом объект пришел в это состояние.

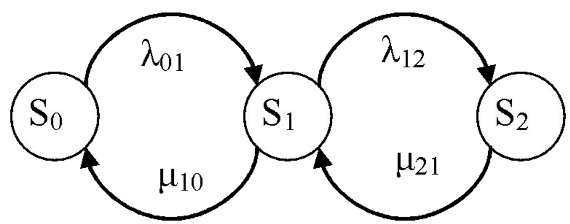
Схемы представления вероятностного процесса

а) временная последовательность смены состояний



б) граф состояний





в) матрица переходов

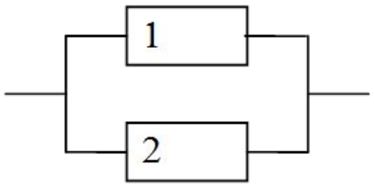
$$P_{ij} = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}$$

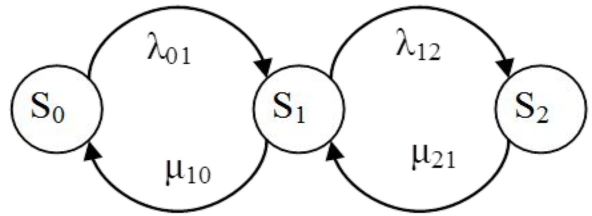
Экспоненциальное распределение времени работы до отказа и времени восстановления работоспособности – необходимое условие для марковского процесса.

Важнейшая характеристика марковского процесса – вероятность перехода объекта в то или иное состояние за заданный промежуток времени. Информация о вероятностях перехода объекта в различные состояния позволяет определить вероятности каждого из возможных состояний процесса.

Пусть объект исследования находится в некоторых состояниях, число которых конечно, равно n. Из i-го состояния в j-ое объект переходит с постоянной интенсивностью λ_{ij}, обратно – с постоянной интенсивностью μ_{ji}.

Для определения вероятностей каждого из состояний применяют систему дифференциальных уравнений А.Н.Колмогорова





$$\begin{cases} dP_0/dt = -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t) \\ dP_1/dt = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1(t) + \mu_{21}P_2(t) \\ dP_2/dt = -\mu_{21}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t) \end{cases}$$

Получить систему уравнений можно по виду графа состояний, если пользоваться следующим **правилом**: для каждого из возможных состояний объекта записывается уравнение, в левой части которого dPi/dt , а справа – столько слагаемых, сколько стрелок графа соприкасается с данным состоянием. Если стрелка направлена в данное состояние, то перед слагаемым ставится плюс, иначе – минус. Каждое из слагаемых будет равно произведению интенсивности перехода из данного состояния (либо в данное состояние) на вероятность состояния, из которого выходит стрелка.

Решение системы уравнений осуществляется по известным правилам решения дифференциальных уравнений. Рассматриваемый процесс – процесс стационарный, для которого производные dPi(t)/dt можн0 принять равными 0

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{01} P_0(t) + \mu_{10} P_1(t) \\ 0 = \lambda_{01} P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10}) P_1(t) + \mu_{21} P_2(t) \\ 0 = -\mu_{21} P_2(t) + \lambda_{12} P_1(t) \\ P_0 + P_1 + P_2 = 1 \end{cases}$$

Решение системы
уравнений

$$P_0 = 1/(1+\lambda_{01}/\mu_{10} + \lambda_{01}\lambda_{12}/(\mu_{21}\mu_{10}))$$

$$P_1 = \frac{P_0\lambda_{01}}{\mu_{10}}$$

$$P_2 = \frac{P_0\lambda_{01}\lambda_{12}}{\mu_{21}\mu_{10}}$$

Результаты решения системы уравнений могут быть получены по виду графа состояний, если пользоваться следующим правилом: Вероятность нулевого состояния определяется выражением где числитель правой части - всегда 1; знаменатель – сумма, состоящая из единицы и дробей, числители которых – произведения интенсивностей, изображенных на верхних стрелках, знаменатели – произведения интенсивностей на нижних стрелках.

Полумарковские процессы

Некоторая система S может находится в конечном (или счетном) множестве состояний $E=\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Пусть в начальный момент времени система находится в состоянии z_i, переходит из него в состояние z_j с веротятностью d_{ij}. В отличие от системы, описываемой однородным марковским процессом, предполагается, что время пребывания в состоянии z_i есть случайная величина T_{ij}, зависящая как от z_i, так и от z_j. Таким образом, T_{ij} – время пребывания системы в состоянии z_i при условии, что следующим состоянием, в которое переходит система, является z_j. Время T_{ij} зависит не от предыстории процесса, а от состояний z_i и z_j. Следовательно, при переходе к полумарковским процессам марковское свойство сохраняется.

Способы задания полумарковского процесса:

- с помощью функций распределения $F_i(t)$ времени пребывания в состоянии z_i и условных вероятностей переходов $q_{ij}(t)$ из z_i в z_j при условии, что в состоянии z_i процесс находился в течении времени t;
- с помощью матрицы $\{R_{ij}(t),\ z_i,\ z_j \in E,\ i \neq j\}$ вероятностей перехода из z_i в z_j за время, не превышающее t.

Между характеристиками, с помощью которых задается полумарковский процесс, существует взаимное однозначное соответствие:

$$F_i(t) = \sum_{j=0}^{n} d_{ij} F_{ij}(t); \quad R_{ij}(t) = \int_0^t q_{ij}(u) dF_i(u);$$

$$R_{ij}(t) = d_{ij} F_{ij}(t); \quad F_i(t) = \sum_{j=0}^{n} R_{ij}(t);$$

$$d_{ij} = \int_0^{\infty} q_{ij}(u) dF(u); \quad \sum_{j=0}^{n} d_{ij} = 1$$

Методика расчета показателей надежности с помощью полумарковских процессов:

1) выявление всех связей в системе и определение множества $E=\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ возможных состояний; разбиение множества E на два непересекающихся подмножества: работоспособны E_+ и неработоспособных E_- состояний; построение графа состояний;

2) выбор наиболее подходящего способа задания полумарковского процесса, исходя из характера решаемой задачи;

3) определение требуемых показателей надежности.

Аппарат теории функций случайных аргументов

Пусть задана произвольная функция n аргументов

$$Y=\phi\ (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Если аргументы X представляют собой случайные величины, то при конечном n функция Y также является случайной величиной. Тогда ее называют *функцией случайных аргументов* (ФСА).

Если все аргументы ФСА подчинены некоторому определенному закону распределения и результирующее распределение ФСА оказывается подчиненным тому же закону, то он называется *устойчивым* для данной ФСА.

Если для произвольных законов распределения аргументов при некоторых условиях (например, при $n \to \infty$) для данной ФСА можно указать закон, к которому асимптотически стремится истинное распределение ФСА, то он называется *ультраустойчивым* для этой ФСА.

Рассмотрим систему, состоящую из n элементов. Случайное время работы до отказа i-го элемента обозначим T_i. Время безотказной работы системы T_Σ также является случайной величиной и зависит от T_i. Исходя из этого

$$T_\Sigma=\phi(T_1, T_2, \ldots, T_n).$$

Вид функции ϕ определяется структурой системы, а также принятыми определениями ее состояний работоспособности и отказа.

Методика применения ФСА в исследовании надежности:

1) построение (на основе имеющегося описания системы и взаимодействия ее элементов) ФСА-модели исследуемой системы;

2) записать на основе ФСА выражения для закона распределения T_Σ и его числовых характеристик.

ФСА, типичные для задач исследования безотказности ИС, ВТ, АСУ

1) Неизбыточная структура, все элементы которой соединены последовательно. ФСА «минимум»

$$T_{\Sigma} = \min_{n}(T_i), \quad i = 1,2,...,n$$

2) Структура с параллельным соединением элементов или нагруженный (горячий) резерв. Время безотказной работы этой модели может быть определено как ФСА «максимум» от времени безотказной работы элементов системы

$$T_{\Sigma} = \max_{n}(T_i), \quad i = 1,2,...,n$$

3) Структура с резервированием замещением («холодный» резерв). ФСА «композиция»

$$T_{\Sigma} = \sum_{n} T_i, \quad i = 1,2,...,n$$

4) Мажоритарная структура, отказывает при отказе более половины ее элементов. Мажоритарная ФСА

$$T_{\Sigma} = \underset{n}{maj}(T_i), \quad i = 1,2,...,n$$

5) Весьма общим классом избыточных структур являются «d-безотказные структуры». К ним относится любая система, отказ которой наступает при отказе любых d из n ее элементов. Другими словами, время безотказной работы d-безотказной системы равно времени безотказной работы элемента, отказавшего (d+1)-м по счету. При d=0 d-безотказная структура сводится к неизбыточной, при d=n-1 – к структуре с параллельным соединением элементов, при d=(n+1)/2 – к мажоритарной.
ФСА, определяющую время безотказной работы d-безотказной структуры обозначают

$$T_{\Sigma} = \underset{n}{\min}{}^{d}(T_i), \quad i = 1,2,...,n$$

и называют ФСА «минимум d ранга»

6) ФСА «опережение» определяет время безотказной работы двухэлементной системы, у которой отказ определен как событие, состоящее в том, что первый элемент откажет раньше второго.

$$T_{\sum} = on(T_1, T_2)$$

7) ФСА «отставание» определяет время безотказной работы двухэлементной системы, которая отказывает в случае, если первый элемент откажет позже второго.

$$T_{\sum} = om(T_1, T_2)$$

8) Другие ФСА, например, «произведение», «частное»

Метод ФСА

Числовая характеристика ФСА n одинаковых и независимых аргументов может быть представлена в виде произведения

$$A=h(k, n)a,$$

где a - числовая характеристика аргумента; h(k, n) – функция пересчета, вид которой определяется типом ФСА и видом числовой характеристики; k – параметр формы распределения Вейбулла, представляющий собой функцию коэффициента вариации υ, k=k(υ).

$$\upsilon = \frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{\kappa}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\kappa})}}{\Gamma(1+\frac{1}{\kappa})}$$

Функции пересчета определяются для математического ожидания, дисперсии и коэффициента вариации.

Далее определяется числовая характеристика ФСА A=h(χ, n)a, где h(χ, n) – функция пересчета (находится из таблицы на пересечении строки, соответствующей виду ФСА, и столбца искомой числовой характеристики); χ – находится по таблице по заданному значению υ аргумента; n – число аргументов.

Оценка среднего времени безотказной работы системы

1) выбираем ФСА, соответствующую типовой структуре;

2) по таблице определяем значение функции пересчета математического ожидания η для найденной ФСА;

3) если распределение Т элементов не относится к вейбулловскому и если не задан коэффициент вариации для элемента, то вычисляем этот коэффициент по формуле

$$\upsilon = \frac{\sigma}{\overline{T}_i}$$

где σ – среднеквадратичное отклонение времени безотказной работы элемента;

4) пользуясь таблицей, по вычисленному значению υ находим величину χ. Если элементы имеют вейбулловское распределение Т, то по значению параметра распределения k по таблице определяем величину χ;

5) в выражение для функции пересчета η (пункт 2) подставляем значения χ и числа элементов системы n и получаем численное значение η;

6) определяем среднее время безотказной работы системы $\overline{T}_{\Sigma} = \eta \overline{T}$