Обратная матрица

Обратная матрица: определение, необходимые условия существования

Определение 1. Матрица B называется *обратной* для матрицы A, если

$$A \cdot B = B \cdot A = E, \quad \text{где } E \text{ – единичная матрица.}$$

Теорема 1 (необходимые условия существования обратной матрицы). Для того, чтобы матрица A имела обратную она должна быть квадратной и невырожденной.

Доказательство.

Ограничение на размерность матрицы следует из необходимого условия существования операции умножения матриц: количество столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго

Необходимость выполнения второго условия докажем методом от противного

Предположим, что нашлась матрица A, являющаяся вырожденной, т.е. $det\, A = 0$, у которой существует обратная матрица B.

$$det(A \cdot B) = det\, E = 1, \qquad det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B = 0 \cdot det\, B = 0$$

Получаем противоречие.

Условия существования и единственность обратной матрицы

Замечание. Таким образом, если у матрицы A существует обратная матрица, то она является квадратной матрицей того же размера, причем невырожденной.

Теорема 2 (единственность существования обратной матрицы). Если у матрицы существует обратная матрица, то она является единственной.

Доказательство. Применим метод от противного.

Предположим, что нашлась матрица A для которой существуют две различные обратные матрицы B и C:

$$A \cdot B = B \cdot A = E, \qquad A \cdot C = C \cdot A = E, \qquad \boxed{B \neq C}$$

$$A \cdot B = E,$$

$$C \cdot A \cdot B = C \cdot E, \qquad (C \cdot A) \cdot B = C, \qquad E \cdot B = C, \qquad \boxed{B = C}$$

Формула для вычисления обратной матрицы

Теорема 3 (формула для вычисления обратной матрицы). Если квадратная матрица $A=\left(a_{ij}\right)_n$ является невырожденной, т.е. $det\,A \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} может быть определена по правилу:

$$A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам a_{ij}, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$ матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_n$.

Доказательство.

Доказательство теоремы 4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} & \cdots & a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \ldots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n} & \cdots & a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \ldots + a_{2n}A_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \ldots + a_{nn}A_{1n} & \cdots & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Продолжение доказательства теоремы 4

$$\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \ldots + A_{n1}a_{n1} & \cdots & A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \ldots + A_{n1}a_{nn} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + \ldots + A_{n2}a_{n1} & \cdots & A_{12}a_{1n} + A_{22}a_{2n} + \ldots + A_{n2}a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}a_{11} + A_{2n}a_{21} + \ldots + A_{nn}a_{n1} & \cdots & A_{1n}a_{1n} + A_{2n}a_{2n} + \ldots + A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Вычисление обратной матрицы

Авторы некоторых учебников для облегчения запоминания формулы

вводят дополнительную матрицу A^*, которая состоит из алгебраических дополнений к элементам матрицы A: $A^* = \left(A_{ij}\right)_n$ и называется *присоединенной матрицей* для матрицы A.

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot \left(A^*\right)^T$$

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot |4| = 1 \cdot 4 = 4, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = (-1) \cdot 2 = -2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = (-1) \cdot 3 = -3, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Свойства обратной матрицы (теорема 4)

$\boxed{1)\ E^{-1} = E;}$ $\boxed{2)\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A;}$ $\boxed{3)\ \left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T};}$

$\boxed{4)\ (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};}$ $\boxed{5)\ det\, A^{-1} = \dfrac{1}{det\, A}.}$

__*Доказательство.*__

1) $E \cdot E = E.$ 2) $A^{-1} \cdot A = E,\quad A \cdot A^{-1} = E.$

3) $A^{T} \cdot \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{-1} \cdot A\right)^{T} = E^{T} = E,\quad \left(A^{-1}\right)^{T} \cdot A^{T} = \left(A \cdot A^{-1}\right)^{T} = E^{T} = E.$

4) $(A \cdot B) \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) = A \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E,$

$\left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E.$

5) $det\left(A \cdot A^{-1}\right) = 1,\quad det\, A \cdot det\, A^{-1} = 1,\quad det\, A^{-1} = \dfrac{1}{det\, A}.$