Количественное описание математических объектов

Косьмин Сергей Николаевич

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Алгебраической структурой называется множество вместе с операциями, определёнными на нём.

Алгебраическая структура вместе с правилами вычислений, правилами вывода и всеми теоремами называется алгебраической системой.

Полугруппой называется множество S с определённой на нём бинарной операцией $\oplus$, которая ассоциативна:

$$x \oplus y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = y \oplus (x \oplus z), \text{ где } x \in S,\ y \in S,\ z \in S.$$

Пример полугруппы:
(N; +) - алгебра натуральных чисел.

Моноидом называется множество M с определённой на нём бинарной операцией $\otimes$, которая

- ассоциативна

$x \otimes y \otimes z = (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z) = y \otimes (x \otimes z)$, где $x \in M$, $y \in M$, $z \in M$, и

- имеет единичный элемент e по отношению к данной операции: $e \otimes x = x = x \otimes e$.

Полугруппы и моноиды используются в теории языков при обработке строк символов.

Группой называется множество G с $\otimes$ бинарной операцией , которая $\forall (x)$, $x \in G$

ассоциативна на этом множестве;

имеет единицу: $e \otimes x = x = x \otimes e$

и обратный элемент: $x \otimes y = e = y \otimes x$ по отношению к данной операции.

Пример группы:
(Z; +) - алгебра целых чисел.

Кольцом называется множество R с двумя определёнными на нём бинарными операциями $\oplus$ $\otimes$, которые:

Обе $\oplus$ $\otimes$ ассоциативны;

Вторая $\otimes$ операция: ассоциативна, коммутативна и имеет единицу, называемую нулём; имеет обратные элементы и дистрибутивна по отношению к первой операции.

Пример кольца:
(Z; +; *) - алгебра целых чисел.

Числовым кольцом называется множество, элементами которого являются числа, а операциями: сложение и умножение.

Областью целостности называется кольцо без ненулевых делителей нуля (то есть без отличных от нуля элементов, произведение которых равно нулю).

Всякое числовое кольцо является областью целостности!

Коммутативным кольцом называется кольцо с коммутативной второй операцией (умножения).

Ассоциативным кольцом называется кольцо с ассоциативной второй операцией (умножения).

Кольцом с единицей называется кольцо с второй операцией (умножения), имеющей нейтральный по отношению к ней элемент (единицу).

Полукольцом называется множество, на котором определены операции сложения и умножения, образующие коммутативную полугруппу относительно сложения, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

Пример полукольца:
(N; +; *) - алгебра натуральных чисел.

Полем называется коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, в котором для любого отличного от нуля элемента найдётся обратный ему элемент ($a * a^{-1} = e$).

Пример поля:

(Q; +; *) - алгебра рациональных чисел.

Числовым полем называется поле, элементами которого являются числа.

Вычисляя, мы возделываем числовое поле!

Количественное описание математических объектов

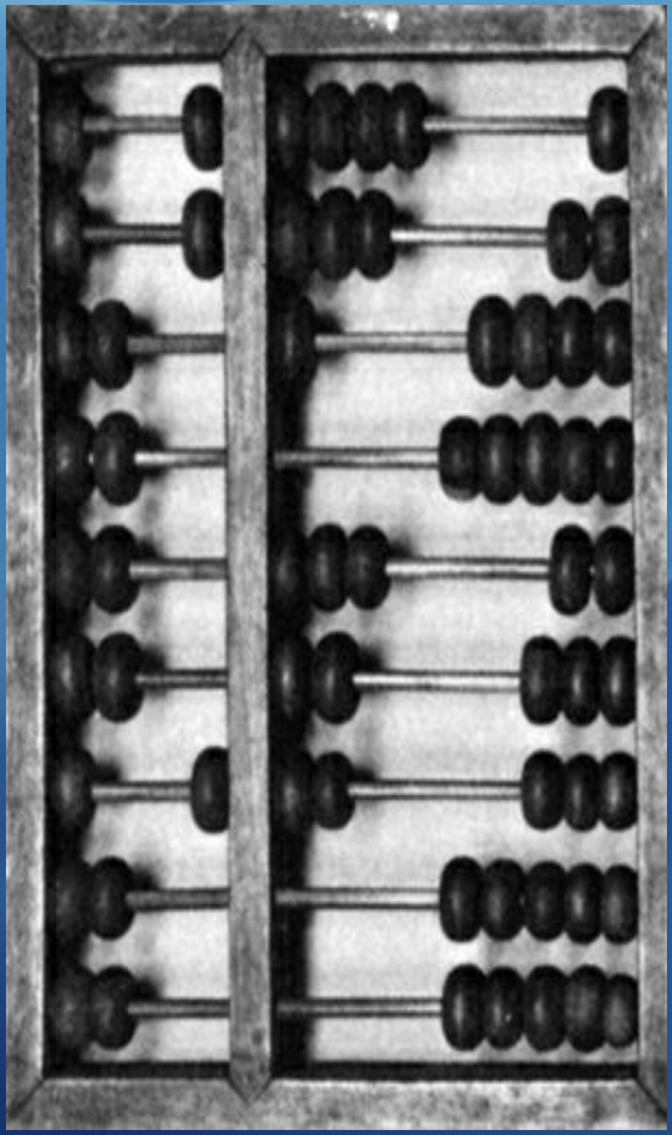
- Алгебраические структуры
- Системы счисления

- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Системой счисления называется система, позволяющая представлять на письме счётные величины и выполнять над ними арифметические операции: сложения, вычитания, умножения, деления.

Человечество училось считать более 2600 лет.
Завершением обучения принято считать событие “нахождения нуля на Абаке”, произошедшее в Индии в VI веке нашей эры.

АБАК



Русские счёты

Вычисление на них проводились путем перемещения счетных костей и камешков (калькулей) в полосковых углублениях досок из бронзы, камня, слоновой кости, цветного стекла. Эти счеты сохранились до эпохи Возрождения, а в видоизмененном виде сначала как "дощатый счет" и как русские счеты до настоящего времени.

На первом этапе:

счётная величина представлялась в записи, как картина, с помощью иероглифов, изображающих представимые, для производящего счет, величины.

Местоположение иероглифа не имело никакого значения для записи счётной величины.

Такие системы счисления ныне называются непозиционные.

Непозиционными системами счисления называются системы счисления, в которых положение знака (цифры) в записи числа не влияет на значение счетной величины.

Непозиционные системы счисления являются исторически первыми.

На первом этапе люди учились представлять счётные величины знаками.

На втором этапе:

значение счетной величины становится зависимым от положения знака в записи числа. Запись значения счётной величины производится, с помощью конечного числа знаков - цифр, изображающих представимые, для производящего счет, величины.

Это переходный этап к построению позиционных систем счисления для записи счетной величины. На данном этапе человечество ищет эффективный метод кодирования в предсталении записи числа.

На третьем этапе:

запись значения счётной величины производится, с помощью конечного числа знаков – цифр базиса системы счисления, изображающих представимые, для производящего счет, величины. Построены позиционные системы счисления для записи счетной величины. Найдена формула числа и основные алгоритмы арифметических операций для позиционных систем счисления.

Позиционными системами счисления называются системы счисления, в которых положение знака (цифры) в записи числа влияет на значение счетной величины.

Позиционные системы счисления позволяют, опираясь на единые алгоритмы выполнения арифметических действий, выполнять счёт разными базисами.

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления

- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Счёт – это измерение мощности множества счётной величины мощностью эталонного множества, называемого базисом системы счисления.

Результат счёта показывает сколько эталонов содержится в счётной величине.

Требования к эталону:

1. Эталон и измеряемая величина должны быть одной природы.
2. Элементы (состояния) эталонного множества должны быть представимы системе производящей счёт.
3. Счёт можно производить эталоном любой мощности.

Элементы эталонного множества обозначаются цифрами.
Цифра выражает мощность подмножества эталонного множества.
В десятичной системе счисления для записи состояний эталонного множества используются арабские цифры: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Расширение базиса производится буквами латинского алфавита.

Если счётная величина не превосходит базис системы счисления, то она выражается на письме цифрой.

Так записывается в этом случае мощность множества счётной величины.

Если счётная величина превышает по мощности базис системы счисления (хотя бы на единицу), то на письме она выражается ЧИСЛОМ.

Так записывается в этом случае мощность множества счётной величины.

Переход от ЦИФРЫ к числу означает выход СЧЁТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ за пределы БАЗИСА системы счисления.

В позиционных системах счисления число представляется ПОЛИНОМОМ:

Свёрнутая форма представления числа

Развёрнутая форма представления числа

$$abc_p = a*P^2 + b*P^1 + c*P^0$$

Базис

Базис

Нулевой порядок числа

(Число нулевого порядка - ЦИФРА)

Первый порядок числа

(Число первого порядка представлено двумя разрядами.)

Второй порядок числа

(Число второго порядка представлено тремя разрядами …

Считать можно базисами любой мощности!!!

ПРИНЯТО:

Для десятичной системы счисления НЕ указывать нижним индексом мощность базиса системы счисления в свёрнутой форме представления числа.

Для иных систем счисления нижний индекс ОБЯЗАТЕЛЕН!!!

ПРАВИЛО ПРОВЕРКИ ЗАПИСИ ЧИСЛА

Число любой (Р -ичной) позиционной системы счисления записано правильно, если в записи числа, в свёрнутой форме, используются цифры не превышающие базис системы счисления:

abc_P , где $a < P$; $b < P$; $c < P$.

Операции с числами

Числа можно:

1. Складывать (+), 2. Вычитать (-),
3. Умножать (*), 4. Делить (: или /).

Оперировать числами – значит оперироват
мощностями множеств счётных величин
которые характеризуют эти числа.

Операции над числами изучает арифметика.

Правила выполнения арифметических операций ЕДИНЫ для любых позиционных систем счисления!

Операции с числами выполнимы, если:

- операнды (участники операции) записаны верно, и
- они относятся к одной системе счисления.

Операции над числами ввёл Абу Джафар Мохаммед бен Муса аль Хорезми (Отец Джафара Мохаммед сын Мусы из Хорезма). Он научил народы Земли считать!

Абу Джафар Мохаммед бен Муса аль Хорезми

Во всех системах счисления первое число выглядит одинаково:

{0,1} – базис двоичной системы счисления

$$\begin{array}{r} 1_2 \\ +\ 1_2 \\ \hline 10_2 \end{array}$$

{0,1,2} - базис троичной системы счисления

$$\begin{array}{r} 2_3 \\ +1_3 \\ \hline 10_3 \end{array}$$

{0,1,2,3} - базис четверичной системы счисления

$$\begin{array}{r} 3_4 \\ +1_4 \\ \hline 10_4 \end{array}$$

Оно утверждает, что счётная величина состоит из одного базиса.

В позиционных системах счисления число представляется ПОЛИНОМОМ:

Свёрнутая форма представления числа

Развёрнутая форма представления числа

$$abc_p = a*10^2 + b*10^1 + c*10^0$$

Базис

Базис

Нулевой порядок числа

(Число нулевого порядка - ЦИФРА)

Первый порядок числа

(Число первого порядка представлено двумя разрядами.)

Второй порядок числа

(Число второго порядка представлено тремя разрядами …

Если операнды (участники операции):
Записаны не верно, и (или)
Относятся к разным системам счисления, то

операция невозможна; и (или)
Следует привести числа к одной системе счисления!

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа

- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

При высокоточных вычислениях на ограниченной разрядной сетке машины число представляют в **экспоненциальной форме** двумя параметрами:

МАНТИССА

ПОРЯДОК

$$256 = 0{,}256 * 10^{3}$$

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Перевод числа из любой системы в десятичную

При переводе числа из любой системы счисления в десятичную расчёт производится по полиномной формуле числа по правилам, принятым в десятичной системе счисления, и с базисом, выраженным десятичной цифрой. Десятичная запись результата будет искомым числом.

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Перевод числа из десятичной системы счисления

Число делится в десятичной системе счисления на основание Р-ичной системы счисления, выраженное десятичной цифрой. Остаток от деления даёт последнюю цифру Р-ичной записи числа.

Неполное частное снова делится на основание Р-ичной системы счисления, формируя предпоследнюю цифру Р-ичной записи числа.

Процесс продолжается, пока неполное частное не станет меньше основания системы счисления.

Количественное описание математических объектов

- Алгебраические структуры
- Системы счисления
- Запись чисел в позиционной системе счисления
- Экспоненциальная форма числа
- Перевод числа из любой системы в десятичную
- Перевод числа из десятичной системы счисления
- Перевод чисел в системах кратных двум

Перевод чисел в системах с базисами, кратными двум

ДВОИЧНАЯ

ДЕСЯТИЧНАЯ

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

ВОСЬМЕРИЧНАЯ

8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

шестнадцатеричная

Перевод чисел в системах с базисами кратными двум

Переход от двоичной системы счисления к восьмеричной и обратно производится через разбиение (по арабски) с права на лево записи числа на триады двоичных цифр с последующей заменой триад на восьмеричную запись числа.

Переход от двоичной системы счисления к шестнадцатеричной и обратно производится через замену тетрад двоичных цифр на шестнадцатеричную запись числа.