Лекция 3.1. ***Криволинейные интегралы.***

1. Определение криволинейных интегралов

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую спрямляемую кривую L, не имеющую точек самопересечения и участков самоналегания. Предположим, что кривая определяется параметрическими уравнениями

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ (a \le t \le b) \qquad (1)$$

и сначала будем считать ее не замкнутой и ограниченной точками A и B.

Предположим далее, что

функция f(x, y) | *две функции P(x, y) и Q(x, y)*

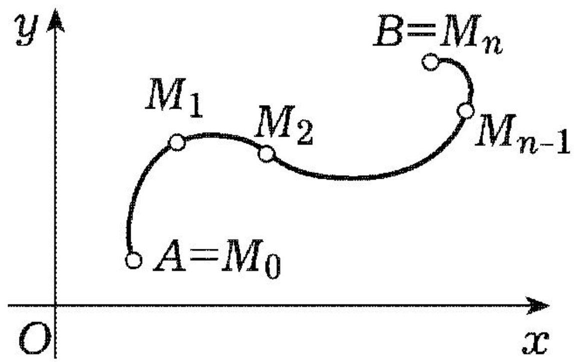
определены и непрерывны вдоль кривой L = AB .

Разобьем сегмент [a, b] при помощи точек $a = t_0 <$

$< t_1 < t_2 < \bullet \bullet \bullet < t_n = b$ на n частичных сегментов.

Лекция 3.1. **Криволинейные интегралы.**

Выберем на каждой частичной дуге M_kM_{k+1} произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ координаты, которой отвечают некоторому значению τ_k параметра t, так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, причем $t_k \leq \tau_k \leq t_{k+1}$. Δl_k длина k-й частичной дуги M_kM_{k+1} ($k = 1, 2, \dots, n$).



Составим интегральную сумму

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$$

Составим еще две интегральные суммы

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k; \sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

Назовем число I пределом интегральной суммы σ_i ($i = 1, 2, 3$) при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\sigma_i - I| < \varepsilon$, как только наибольшая из длин Δl_k меньше δ.

Лекция 3.1. ***Криволинейные интегралы.***

Определения:

Если существует предел интегральной суммы σ_1 при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k , то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции f(x, y) по кривой L и обозначается символом

$$\int_L f(x,y)dl$$

Если существует предел интегральной суммы σ_2 [σ_3] при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k , то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции P(x, y) [Q(x, y)] по кривой L и обозначается символом

$$\int_L P(x,y)dx; [\int_L Q(x,y)dy]$$

$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$$

Лекция 3.1. **Криволинейные интегралы.**

2. Существование криволинейных интегралов и сведение их к определенным интегралам

Если кривая L = AB является гладкой, задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \le t \le b$, и не содержит особых точек и если функции f(x, y), P(x, y) и Q(x, y) непрерывны вдоль этой кривой, то справедливы следующие формулы, сводящие криволинейные интегралы к обычным определенным интегралам:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

$$\int_L P(x,y)dx = \int_a^b P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t)dt\,;$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_a^b Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)dt\,;$$

Лекция 3.1. **Криволинейные интегралы.**

Свойства:

1°. Линейное свойство

$$\int_L [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dl = \alpha \int_L f(x,y)dl + \beta \int_L g(x,y)dl$$

2°. Аддитивность

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)dl = \int_{L_1} f(x,y)dl + \int_{L_2} f(x,y)dl$$

3°. Оценка модуля интеграла

$$\left|\int_L f(x,y)dl\right| \le \int_L |f(x,y)|dl \ \text{(для 2 − го рода)}$$

4°. Формула среднего значения

$$\int_L f(x,y)dl = L \cdot f(M)$$

Примеры. 1°. Вычислить массу эллипса L, определяемого параметрическими уравнениями

$x = a\ \cos t,\ y = b\sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$

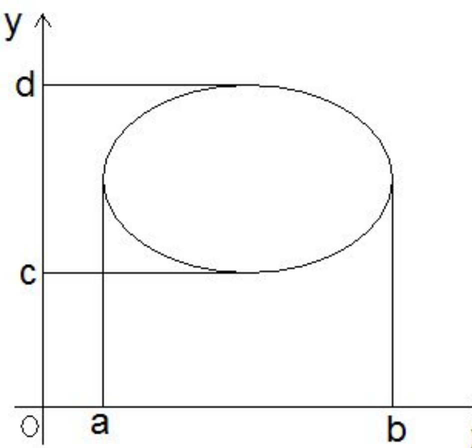
при условии, что $a > b > 0$ и что линейная плотность распределения массы равна $\rho = |y|$.

2°. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\mathrm{I} = \int_L f(x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y,$$

в котором L — парабола $y = x^2$ при $-1 \le x \le 1$.

Лекция 3.1. ***Криволинейные интегралы.***



Выберем на каждой частичной дуге M_kM_{k+1} произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ координаты, которой отвечают некоторому значению τ_k параметра t, так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, причем $t_k \leq \tau_k \leq t_{k+1}$. Δl_k длина k-й частичной дуги M_kM_{k+1} (k = 1, 2, ... , n).

Составим интегральную сумму

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$$

Составим еще две интегральные суммы

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k; \sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

Назовем число I пределом интегральной суммы σ_i (i = 1, 2, 3) при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\sigma_i - I| < \varepsilon$, как только наибольшая из длин Δl_k меньше δ.