

Численные методы безусловной  
оптимизации. Метода  
параллельных касательных (метод  
Пауэлла)

# Метод Пауэла

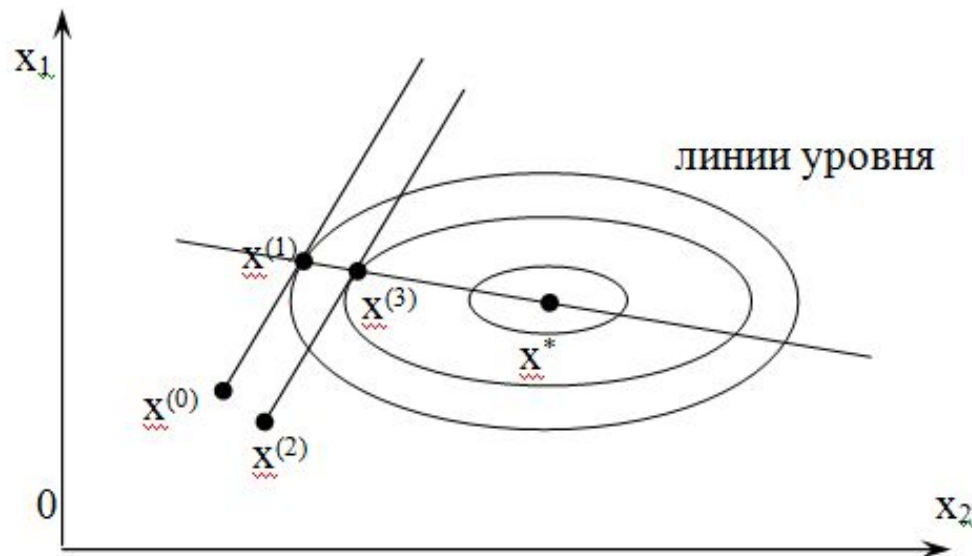
Метод ориентирован на решение задач с квадратичными целевыми функциями, т.е. функциями вида:

$$f(x) = a + b^T x + 1/2 x^T C x,$$

где  $Q(x) = x^T C x$  – квадратичная форма.

Т.к. в окрестности точки оптимума любую нелинейную функцию можно аппроксимировать квадратичной функцией (поскольку линейный член разложения Тейлора обращается в нуль), то метод может быть применен и для нелинейной целевой функции общего вида.

Метод Пауэлла использует свойство квадратичной функции, заключающееся в том, что любая прямая, которая проходит через точку минимума функции  $x^*$ , пересекает под равными углами касательные к поверхностям равного уровня функции в точках пересечения.



# Метод Пауэла

Суть метода заключается в следующем (Рассмотрим случай двух переменных).

Выбирается некоторая точка  $x(0)$  и выполняется одномерный поиск вдоль произвольного направления, приводящий в точку  $x(1)$  ( $x(1)$  – точка минимума функции на выбранном направлении).

Затем выбирается точка  $x(2)$ , не лежащая на прямой  $x(0) - x(1)$ , и осуществляется одномерный поиск вдоль прямой, параллельной  $x(0) - x(1)$ .

Находят точку  $x(3)$  – точку минимума функции на данном направлении.

Точка  $x(3)$  вместе с точкой  $x(1)$  определяют направление  $x(1) - x(3)$  одномерного поиска, дающего точку минимума  $x^*$ .

Направления  $x(0) - x(2)$  и  $x(1) - x(3)$  являются сопряженными направлениями относительно матрицы  $C$  квадратичной формы  $Q(x)$  ( $C$  – сопряженные направления).

Точно также сопряженными являются направления  $x(2)-x(3)$  и  $x(1)-x(3)$ .

В рассмотренных построениях для того, чтобы определить сопряженное направление, требовалось задать две точки и некоторое направление.

Это не слишком удобно для проведения расчетов, поэтому предпочтительнее строить систему сопряженных направлений, исходя из одной начальной точки.

Это легко осуществить при помощи единичных координатных векторов  $e(1), e(2), \dots, e(n)$ .

$$e(1) = (1, 0, \dots, 0)^T; e(2) = (0, 1, \dots, 0)^T; \dots; e(n) = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

Проиллюстрируем процедуру построения сопряженных направлений для случая двух переменных (ее можно обобщить и для  $n$ -мерного пространства).

# Метод Пауэла

Пусть  $e(1) = (1, 0)^T$ ;  $e(2) = (0, 1)^T$ .

Зададим начальную точку  $x(0)$ . Произведем одномерный поиск минимума функции  $f$  вдоль направления  $e(n) - e(2)$  ( $n=2$ ), начиная из начальной точки  $x(0)$ .

Точки прямой, исходящей из  $x(0)$  в направлении  $e(2)$ , задаются формулой  $x = x(0) + he(2)$ .

Вычислим значение  $h=h_0$ , которому соответствует минимум  $f(x(0) + h_0e(2))$ .

$f(x(0) + h_0e(2)) = \min_h f(x(0) + he(2))$ .

Положим  $x(0) = x(0) + h_0e(2)$ .

Из точки  $x(0)$  выполняем одномерный поиск вдоль направления  $e(1)$ .

Вычислим значение  $h_1$ , которому соответствует минимум  $f(x(0)+h_1e(1))$ .

Положим  $x(1) = x(0) + h_1e(1)$ .

Из точки  $x(1)$  выполняем одномерный поиск в направлении  $e(2)$ .

Вычисляем значение  $h_2$ , которому соответствует минимум  $f(x(1)+h_2e(2))$ .

Положим  $x(2) = x(1) + h_2e(2)$ .

Направления  $(x(2) - x(0))$  и  $e(2)$  оказываются сопряженными.

Это видно из следующего рисунка.

# Метод Пауэлла

Можно рассуждать так:

мы выбрали две точки  $x^{(0)}$  и  $x^{(1)}$  и из этих точек выполнили одномерный поиск в направлении  $e^{(2)}$ .

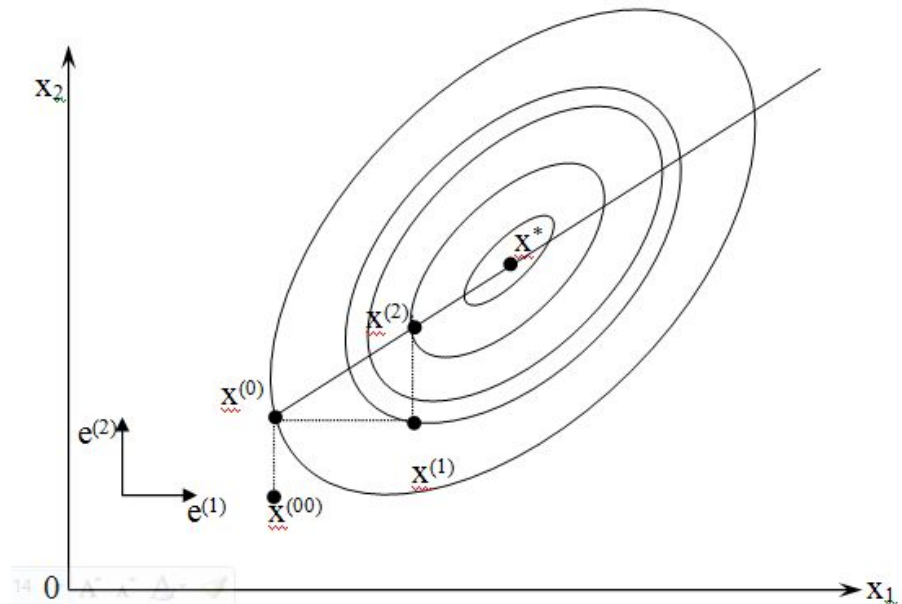
Соответствующие этим поискам точки минимума –  $x^{(0)}$  и  $x^{(2)}$ .

Поэтому направление  $x^{(0)} - x^{(2)}$  является сопряженным с направлением  $e^{(2)}$ .

Одномерный поиск в направлении  $e^{(2)}$  дает точку минимума  $x^*$ .

Поэтому на следующей итерации проводится одномерный поиск в направлении  $x^{(0)} - x^{(2)}$  и будет получена точка минимума  $x^*$ .

В случае квадратичной функции  $n$  переменных оптимальное значение находится за  $n$  итераций при этом требуется провести  $n^2$  одномерных поисков.



# Алгоритм метода Пауэлла

1. Задают начальную точку  $x^{(0)}$ . Выполняют одномерный поиск минимума функции  $f$  вдоль направления  $p^{(n)} = e^{(n)} = (0, \dots, 0, 1)^T$ . Величина шага  $h_0$  находится из условия  $f(x^{(0)} + h_0 p^{(n)}) = \min_h f(x^{(0)} + h p^{(n)})$ . Полученный шаг определяет точку  $x^{(1)} = x^{(0)} + h_0 p^{(n)}$ ;  $k:=1$  (номер итерации).

2. За начальные направления поиска  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}$  принимают направления осей координат, т.е.  $p^{(i)} = e^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $e^{(2)} = (0, 1, \dots, 0)^T$ ,  $\dots$ ,  $e^{(n)} = (0, \dots, 0, 1)^T$ .

3. Из точки  $x^{(0)}$  выполняют  $n$  одномерных поисков вдоль направлений  $p^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). При этом каждый следующий поиск производится из точки минимума, полученной на предыдущем шаге. Величина шага  $h_i$  находится из условия  $f(x^{(i-1)} + h_i p^{(i)}) = \min_h f(x^{(i-1)} + h p^{(i)})$ . Полученный шаг определяет точку  $x^{(i)} = x^{(i-1)} + h_i p^{(i)}$ .

4. Выбираем новое направление  $p = x^{(n)} - x^{(0)}$  и заменяем направления  $p^{(1)}, \dots, p^{(n)}$  соответственно на  $p^{(2)}, \dots, p^{(n)}, p$ .

5. Из точки  $x^{(n)}$  осуществляют одномерный поиск вдоль направления  $p = p^{(n)} = x^{(n)} - x^{(0)}$ . Величина шага  $h_{n+1}$  находится из  $f(x^{(n)} + h_{n+1} p) = \min_h f(x^{(n)} + h p)$ . Полученный шаг определяет точку  $x^{(n+1)} = x^{(n)} + h_{n+1} p$ ;  $k:=k+1$  (номер итерации).

# Алгоритм метода Пауэлла

6. Проверяют выполнение условия  $k \leq n$ . Если условие выполняется перейти к п.7, в противном случае перейти к п.8.

7. а) если целевая функция квадратичная, то поиск прекращается;  $x^*$  полагается равным  $x^{(n+1)}$  ( $x^* := x^{(n+1)}$ ).

б) если целевая функция не является квадратичной, то проверяют выполнение условия  $\|x^{(n)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  - заданная точность) (т.е. изменение по каждой независимой переменной должно быть меньше, чем заданная точность). Если условие выполняется, то поиск прекратить;  $x^*$  полагается равным  $x^{(n+1)}$ . В противном случае перейти к п.8.

8. Заменяют  $x^{(0)}$  на  $x^{(n+1)}$  ( $x^{(0)} := x^{(n+1)}$ ) и принимают эту точку за начальную точку  $x^{(0)}$  для следующей итерации. Переходят к п.3.

Таким образом, в результате выполнения рассмотренной процедуры осуществляется поочередная замена принятых вначале направлений поиска. В итоге после  $n$  итераций они окажутся взаимно сопряженными.

# Пример

Методом Пауэлла найти точку минимума функции  $f(x) = f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ , если задана начальная точка  $x^{(0)} = (8, 9)^T$ .  $f(x^{(0)}) = f(8, 9) = 45$ .

Шаг 1.  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ ;  $n=2$ ; направление поиска  $p^{(2)} = e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

$f(x^{(0)} + hp^{(2)}) \rightarrow \min$ .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^{(0)} + hp^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ h+9 \end{bmatrix}.$$

$$f(x_1, x_2) = f(8, h+9) = 4(8-5)^2 + (h+9-6)^2 = 4 \cdot 9 + (h+3)^2 = (h+3)^2 + 36 = \varphi(h).$$

$\varphi'_h = 2(h+3) = 0$ , отсюда  $h_0 = -3$ .

Определяем точку

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h_0 p^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}; k:=1 \text{ (номер итерации)}.$$

Шаг 2.  $p^{(1)} = e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $p^{(2)} = e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .



# Пример

Шаг 3. Из точки  $x^{(0)}$  выполняем одномерный поиск по направлению  $p^{(1)}=(0/1)$ .  
Найдем такое значение  $h$  при котором  $f(x^{(0)} + hp^{(1)}) \rightarrow \min$ .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^{(0)} + hp^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$f(x_1, x_2) = f(h+8, 6) = 4(h+8-5)^2 + (6-6)^2 = 4(h+3)^2 = \varphi(h).$$

$$\varphi'_h = 8(h+3) = 0, \text{ отсюда } h_1 = -3.$$

Определяем точку

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h_1 p^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Теперь из точки  $x^{(1)}$  выполняем одномерный поиск вдоль направления  $p^{(2)}=(0/1)$ . Найдем такое значение  $h$ , при котором  $f(x^{(1)} + hp^{(2)}) \rightarrow \min$ .

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = x^{(1)} + hp^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ h+6 \end{pmatrix}.$$

$$f(x_1, x_2) = f(5, h+6) = 4(5-5)^2 + (h+6-6)^2 = h^2 = \varphi(h).$$

$$\varphi'_h = 2h = 0, \text{ отсюда } h_2 = 0.$$

Определяем точку

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h_2 p^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

# Пример

Шаг 4. Выбираем направление:

$$p = x^{(2)} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заменяем:

$$p^{(1)} := p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p^{(2)} := p = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 5. Из точки  $x^{(2)} = (5/6)$  осуществляем одномерный поиск вдоль направления  $p = (-3/0)$ . Найдем такое значение  $h$ , при котором  $f(x^{(2)} + hp) \rightarrow \min$ .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^{(2)} + hp = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3h \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$f(x_1, x_2) = f(5-3h, 6) = 4(5-3h-5)^2 + (6-6)^2 = 36h^2 = \varphi(h).$$

$$\varphi'_h = 72h = 0, \text{ отсюда } h_3 = 0.$$

Определяем точку

$$x^{(3)} = x^{(2)} + h_3 p = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}. k := 1 + 1 = 2 \text{ (номер итерации).}$$

Шаг 6. Проверяем выполнение условия  $k \geq n = 2$ , условие выполняется, переходим к п. 7.

Шаг 7. а) целевая функция квадратичная, поиск закончен.

$x^* := x^{(3)} = (5/6)$  – точка минимума.  $f(x^*) = f(5, 6) = 0$  – минимальное значение функции.