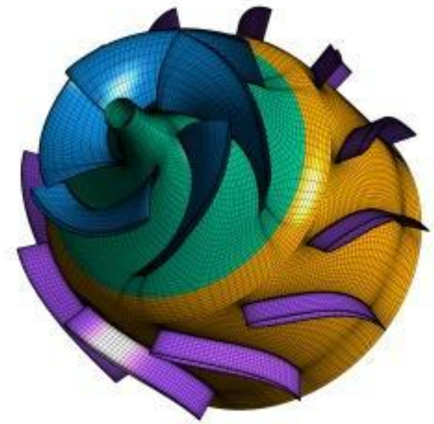
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University
Department of Theoretical and Applied Mechanics

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Модели вокруг нас



$$\vec{F}_p = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

На протяжении всей своей жизни человек ежедневно сталкивается с моделями и сам создает новые.

Определение модели

К недостаткам термина следует отнести его многозначность.

В словарях можно найти до восьми различных определений термина «**модель**», из которых в научной литературе наиболее распространены два:

- устройства, воспроизводящего строение или действие какого-либо другого устройства (уменьшенное, увеличенное или в натуральную величину);
- аналога (чертежа, графика, плана, схемы, описания) какого-либо явления, процесса или предмета.

Важную роль при разработке моделей играют *гипотезы* (от греч. hypothesis — основание, предположение), т.е. определенные предсказания, предположительные суждения о причинно-следственных связях явлений, основанные на некотором количестве опытных данных, наблюдений, догадок.

Аналогия (от греч. analogia – соответствие, соразмерность) – это представление о каком-либо частном сходстве двух объектов. Например, при изучении механических свойств в качестве объектов исследования могут быть выделены материалы из дерева, металла, пластмассы и т.д. В свою очередь материалы из дерева можно подразделить по видам древесины на лиственные и хвойные, лиственные — на “березу”, “тополь”, “ясень” и т.д.

Под моделью (от лат. modulus — мера, образец, норма) понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.

Свойства моделей

1. **Неполнота** - любая модель нетождественна объекту-оригиналу, поскольку при ее построении исследователь выделил только наиболее существенные с его точки зрения факторы. “Полная” модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу.

Н. Винер: “Наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше - тот же самый кот”.

2. **Адекватность** - результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта.
3. **Простота** (или сложность) модели.

«Бритва Оккама»: Не следует плодить сущности без надобности

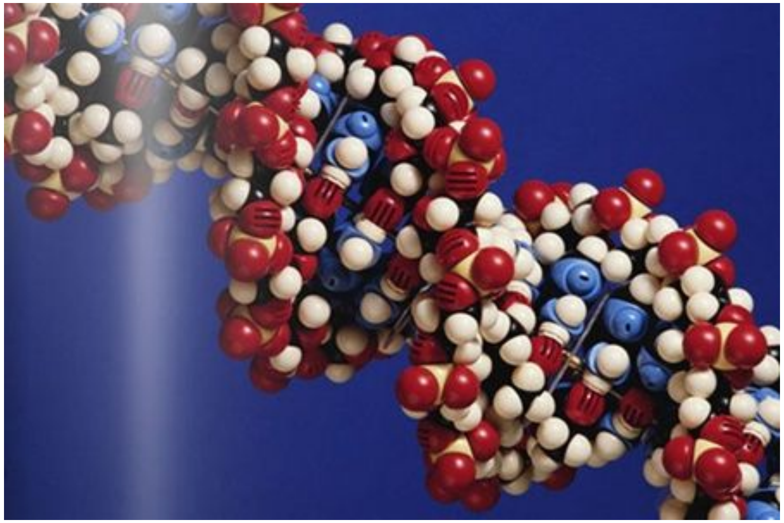
4. **Потенциальность** модели

О потенциальности моделей

Модели в научных исследованиях, не обладающие определенной “предсказательностью”, едва ли могут считаться удовлетворительными.

- Открытие планеты Нептун (1846) – модель движения планеты Уран не удовлетворяет экспериментальным данным.
- Открытие «черных дыр» - решение гравитационных уравнений А. Эйнштейна.
- Дж. Уотсон и Ф. Крик (1953):

структура жидких кристаллов:



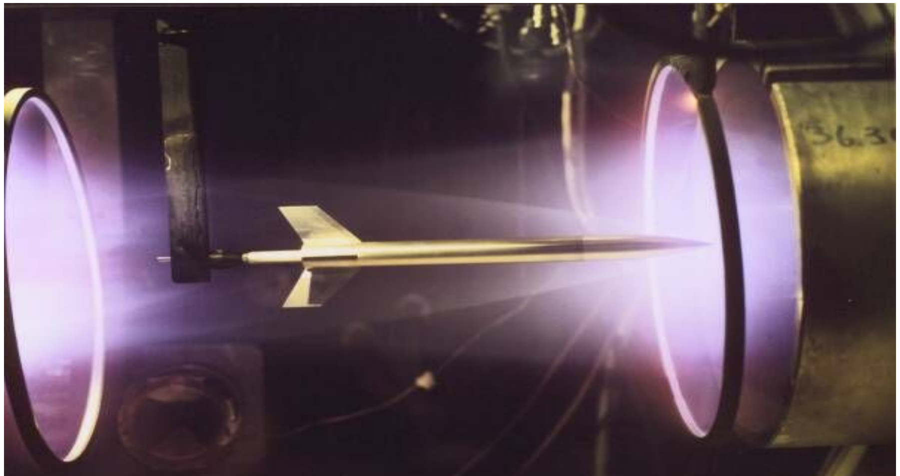
Цели моделирования

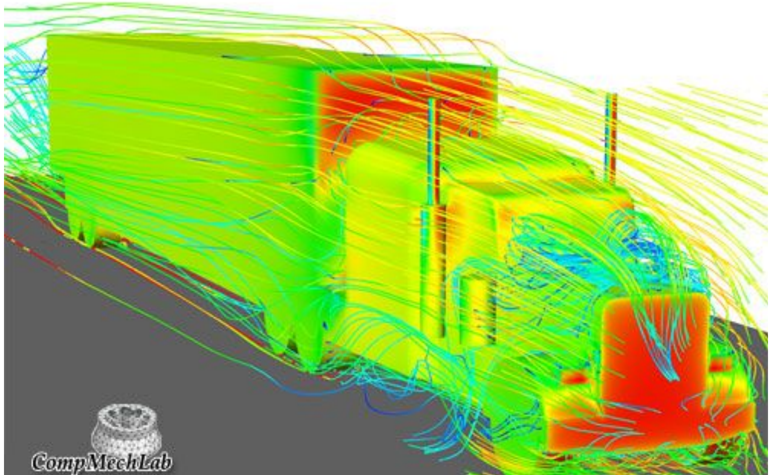
Модель нужна для того, чтобы:

1) **понять**, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;
2) научиться **управлять** объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;
3) **прогнозировать** прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование в лабораторных условиях

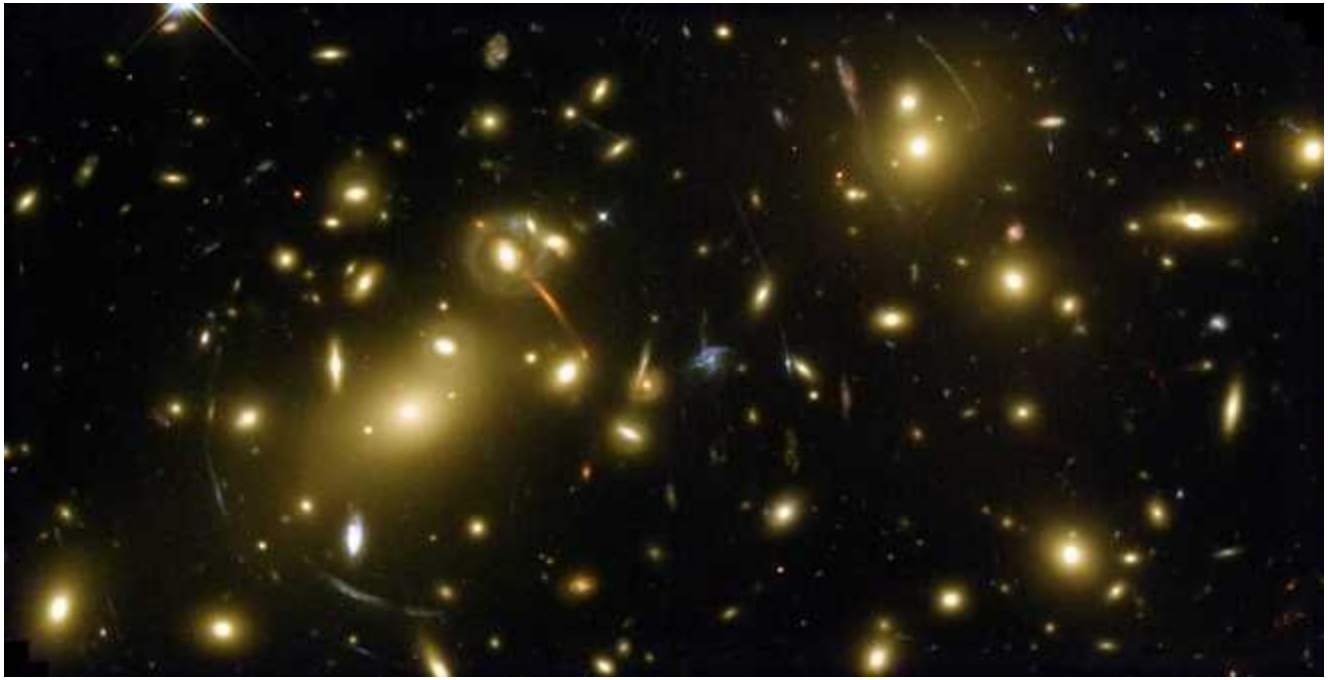
описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.





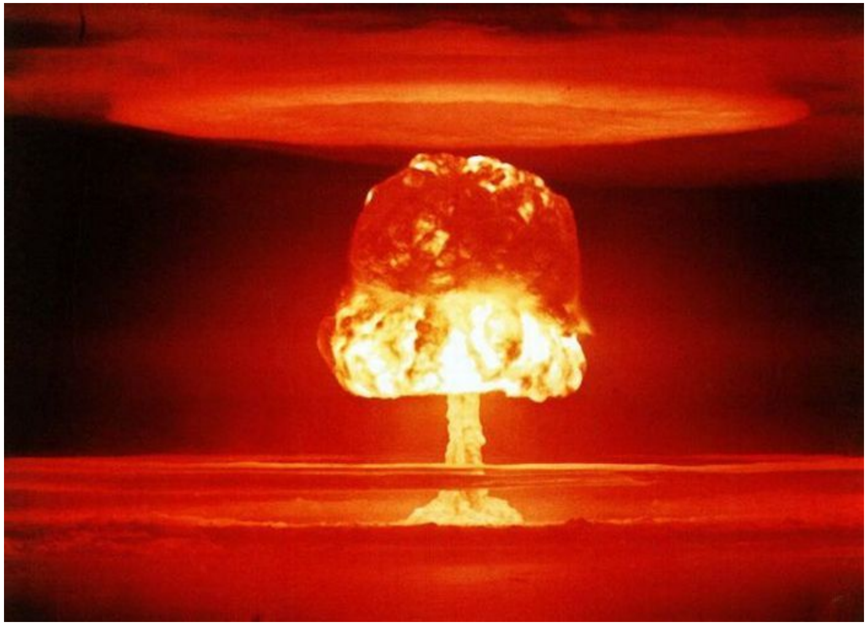
В каких случаях не обойтись без модели

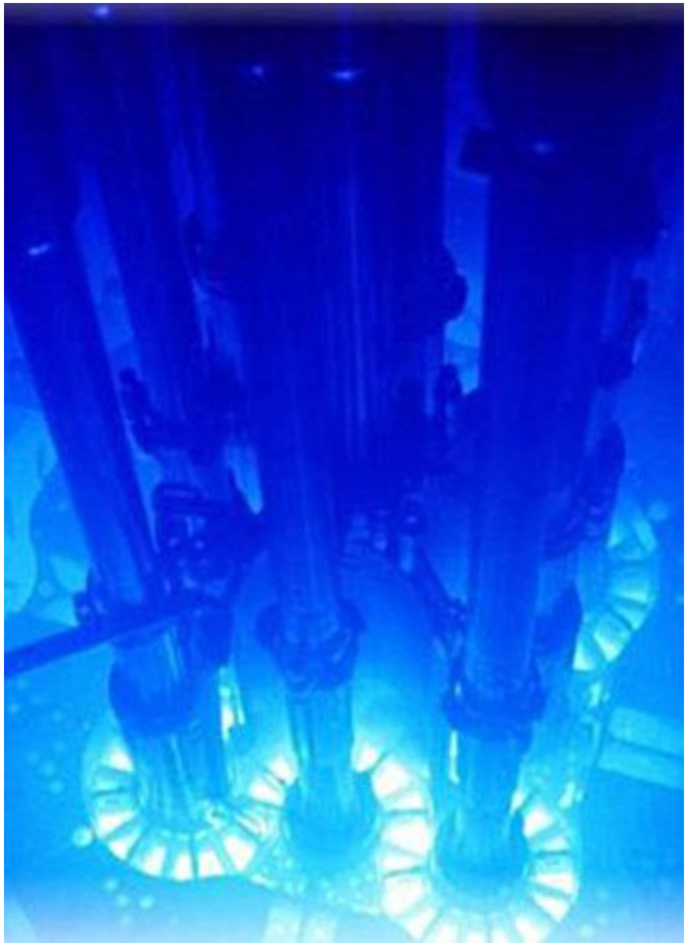
1. Некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом.



В каких случаях не обойтись без модели

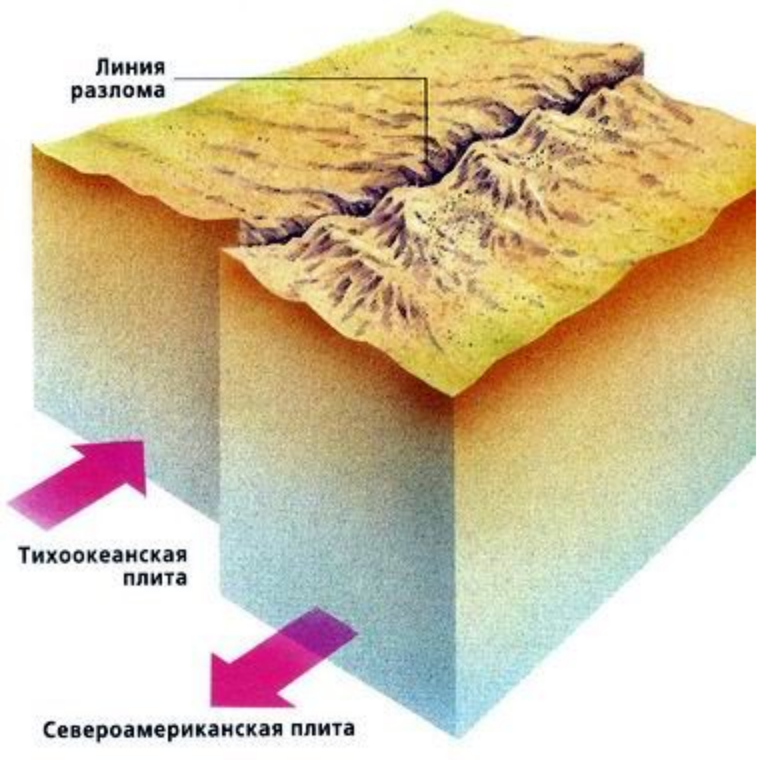
2. Иногда проведение эксперимента трудоемко или опасно.

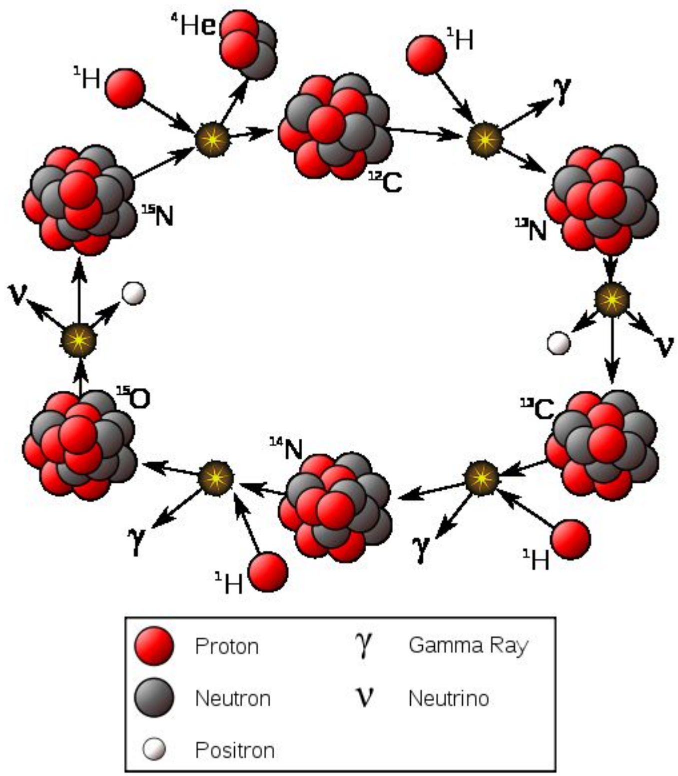




В каких случаях не обойтись без модели

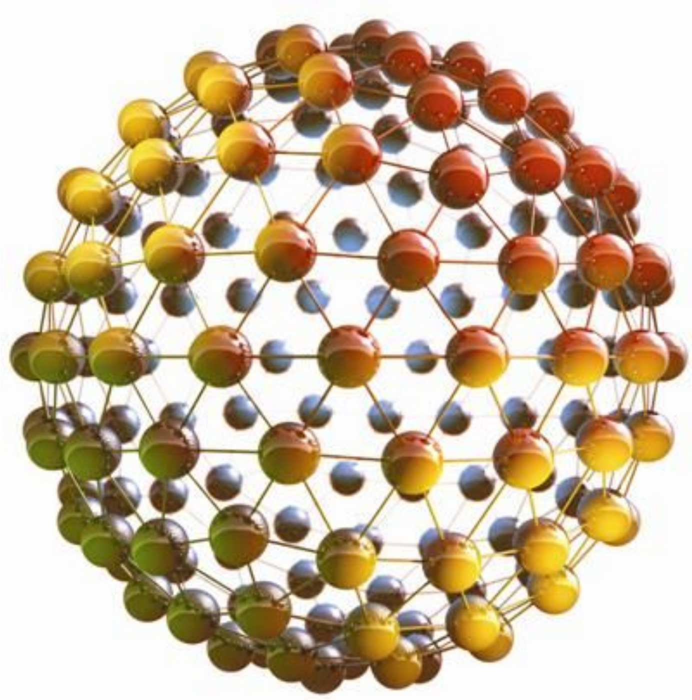
3. Иногда невозможно изучать процессы и объекты в реальном времени.





В каких случаях не обойтись без модели

4. Иногда проведение эксперимента слишком дорого или неэтично.



КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Представляется возможным подразделить математические модели на различные классы в зависимости:

- от сложности объекта моделирования;
- от оператора модели (подмодели);
- от входных и выходных параметров;
- от способа исследования модели;
- от цели моделирования.

- от сложности объекта моделирования;

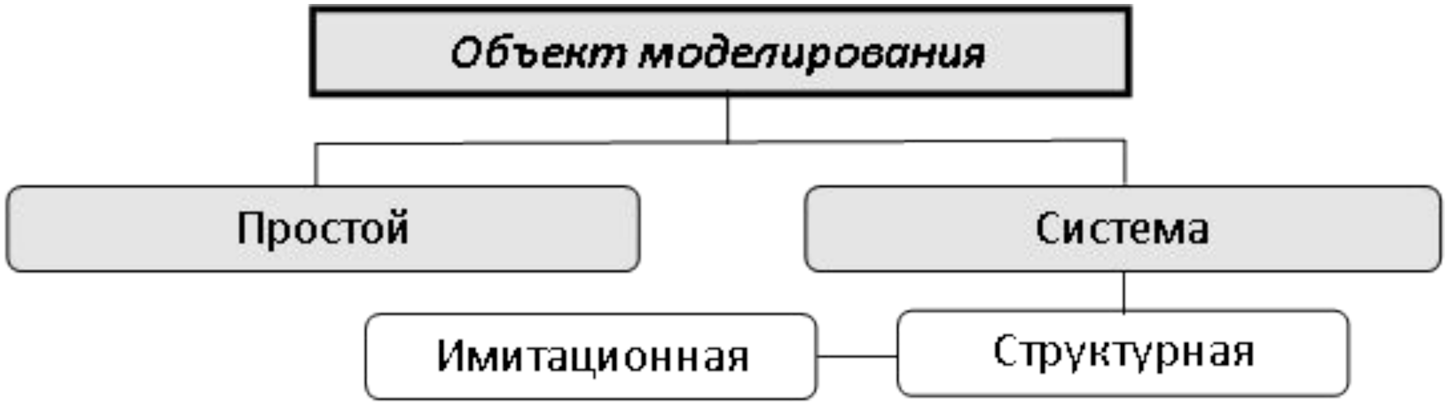


Рис. 1.4

Система есть совокупность взаимосвязанных элементов, в определенном смысле обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое.

- от оператора модели (подмодели);

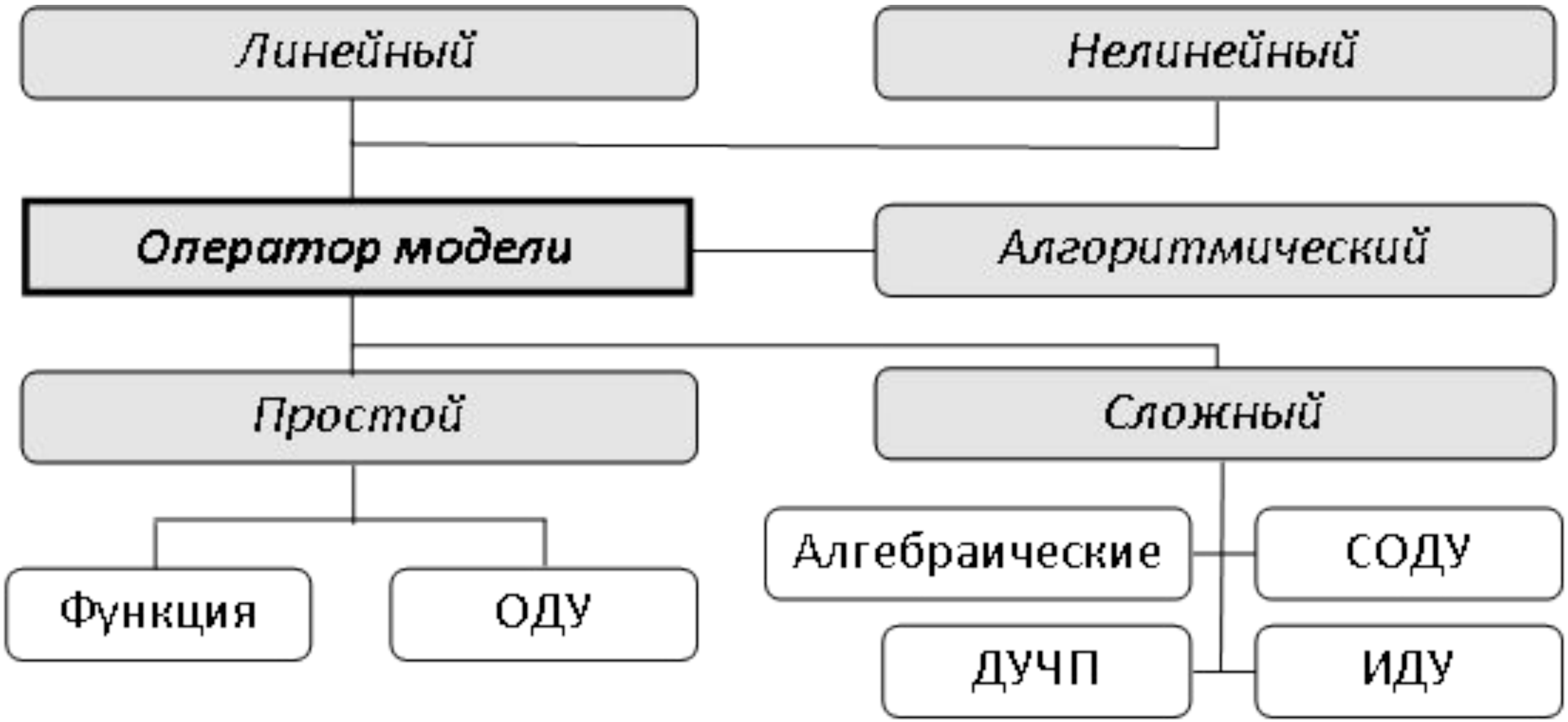


Рис. 1.5.

- от входных и выходных параметров;

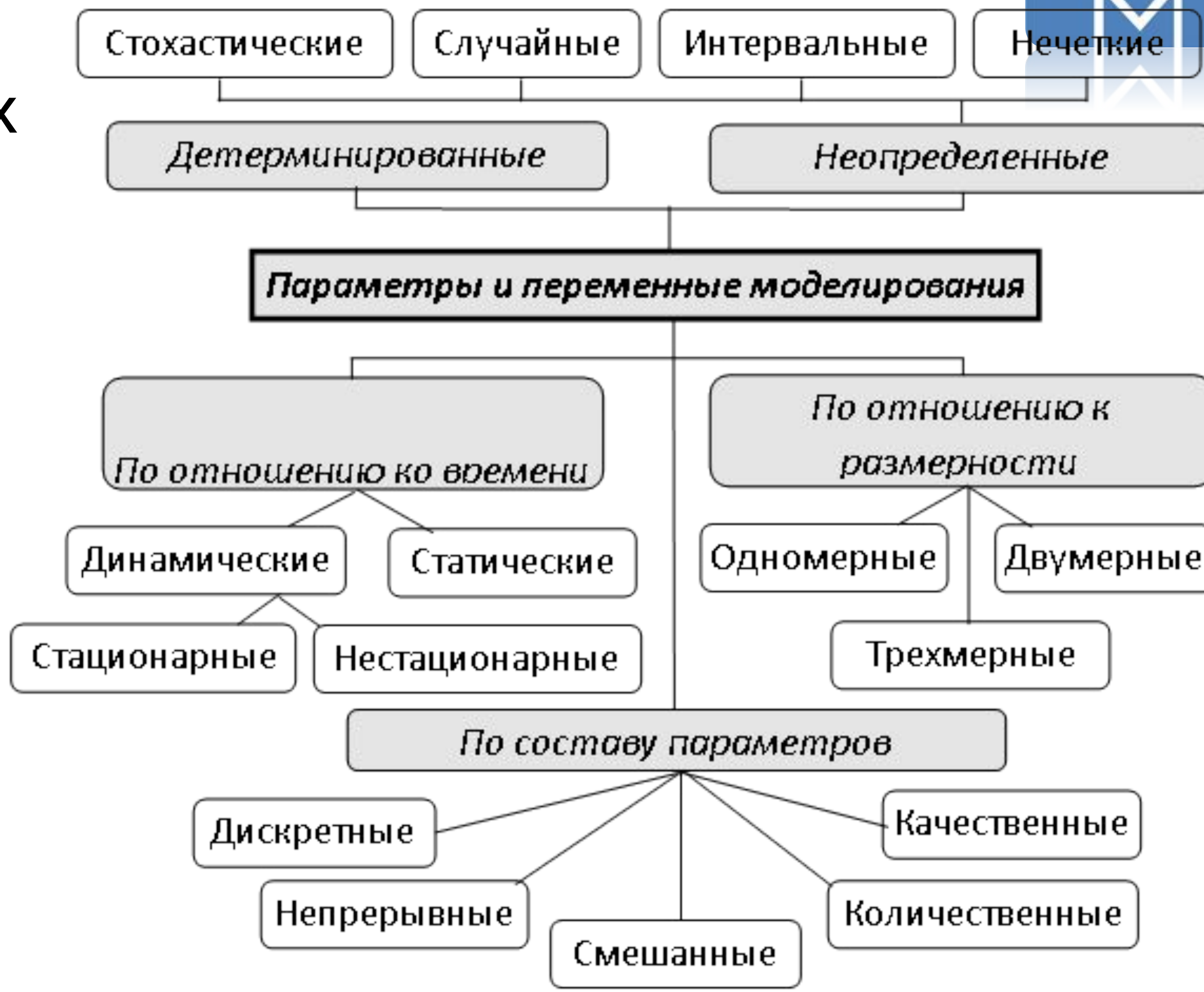
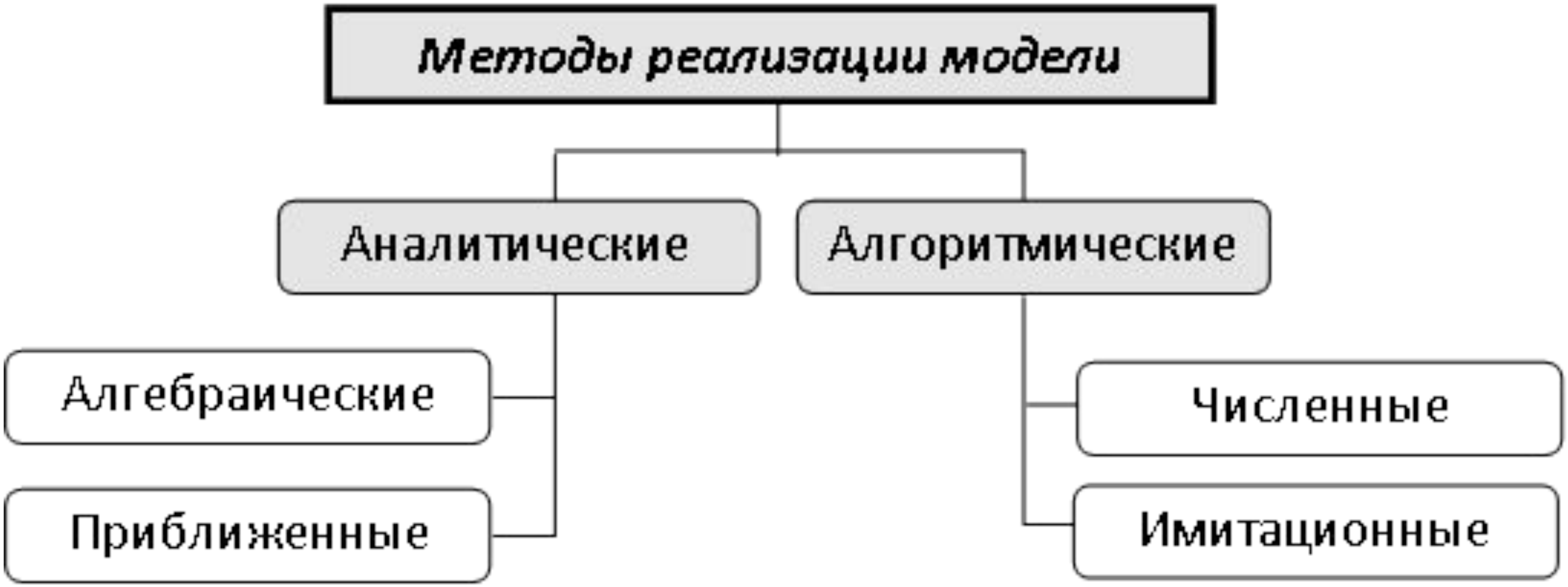


Рис. 1.6.

- *детерминированное* – значения всех параметров модели определяются детерминированными величинами (т.е. каждому параметру соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число или соответствующая функция);
- *стохастическое* – значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности. В литературе наиболее полно исследованы случаи нормального (гауссова) и показательного распределения случайных величин;
- *случайное* – значения всех или отдельных параметров модели устанавливаются случайными величинами, заданными оценками плотностей вероятности, полученными в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров;

- *интервальное* - значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданными интервалом, образованным минимальным и максимально возможными значениями параметра;
- *нечеткое* - значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству. Такая форма используется, когда информация о параметрах модели задается экспертом на естественном языке, а следовательно, в “нечетких” (с позиции математики) терминах типа “много больше пяти”, “около нуля”.

- от способа исследования модели;



- от цели моделирования

Целью *дескриптивных моделей* (от лат. descriptio – описание) является построение законов изменения параметров модели.
Оптимизационные модели предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом.
Управленческие модели применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека.

Определение математической модели

<u>Математическое моделирование</u> — это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

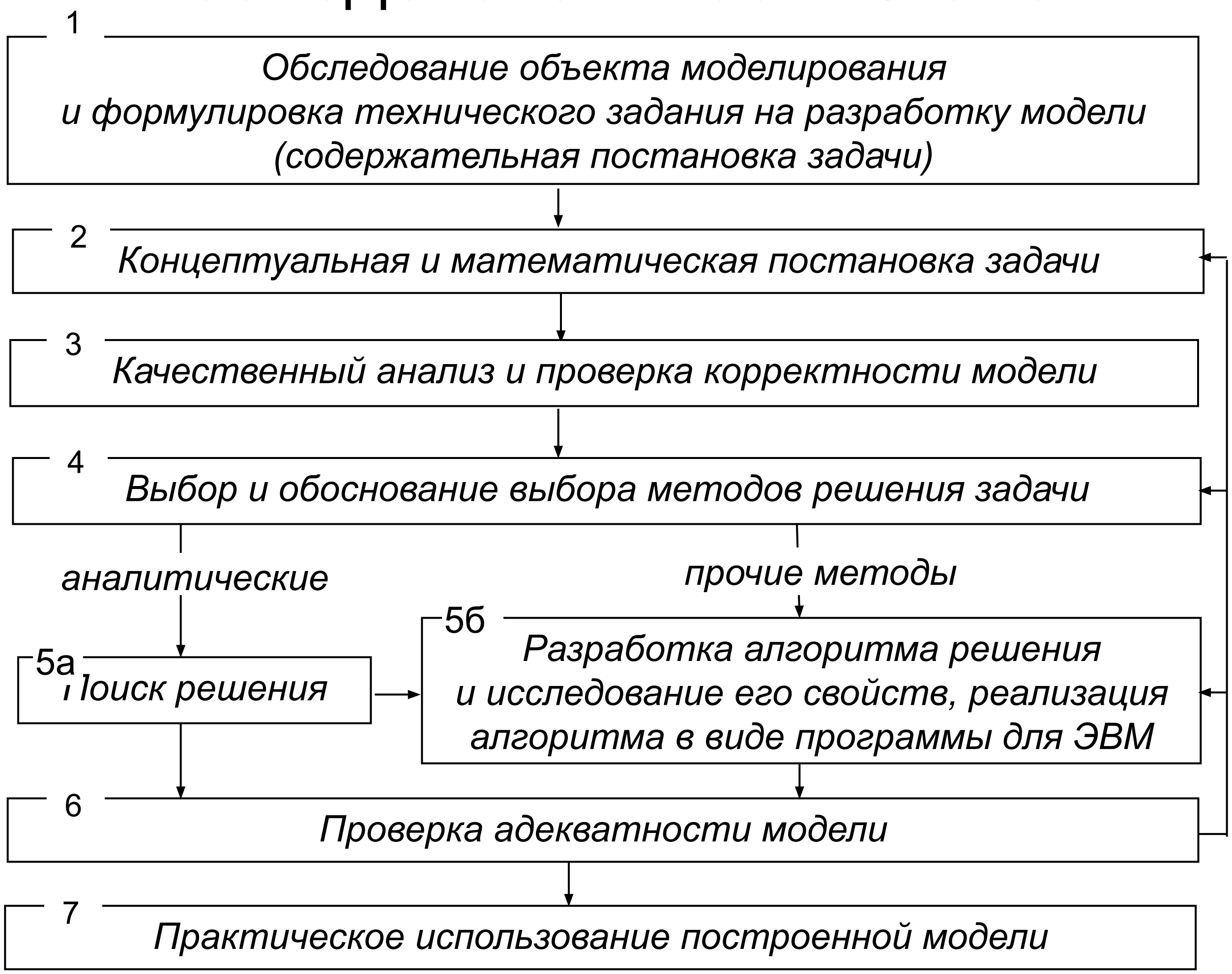
Под математической моделью будем понимать любой оператор A, позволяющий по соответствующим значениям входных параметров X установить выходные значения параметров Y объекта моделирования:

$$A:\ X \to Y, \qquad X \in \Omega_X, \quad Y \in \Omega_Y,$$

где Ω_X и Ω_Y — множества допустимых значений входных и выходных параметров для моделируемого объекта. В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств Ω_X и Ω_Y могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.)

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Последовательность этапов



1. Содержательная постановка

- Заказчик - человек или организация, заинтересованные в создании новой математической модели;
- Исполнитель - рабочая группа, включающая специалистов разного профиля: прикладных математиков, специалистов, хорошо знающих особенности объекта моделирования, программистов.

Перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика, составляет содержательную постановку задачи моделирования.

1. Содержательная постановка

Этап обследования проводится членами рабочей группы под руководством постановщиков задач и включает следующие работы:

- тщательное обследование собственно объекта моделирования с целью выявления основных факторов, механизмов, определяющих его поведение, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект,
- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах – аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов,
- аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту),
- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

1. Содержательная постановка

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, содержательная постановка задачи моделирования, дополнительные требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде технического задания на проектирование и разработку модели.

2. Концептуальная постановка задачи

Концептуальная постановка задачи моделирования — это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

- Формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров.
- Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что для их обоснования могут быть приведены некоторые теоретические доводы и экспериментальные данные, основанные на собранной ранее информации об объекте.

2. Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи моделирования — это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Возможные виды задач, появляющиеся при математической постановке:

- Линейное или нелинейное уравнение;
- Система линейных/нелинейных уравнений;
- Дифференциальное уравнение/система дифференциальных уравнений;
- Дифференциальное уравнение в частных производных/система ДУЧП;
- Интегральные, интегро-дифференциальные уравнения…

2. Математическая постановка задачи

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач, возникающих для систем ОДУ или ДУЧП:

- *задача Коши, или задача с начальными условиями,* в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;
- *начально – граничная, или краевая задача*, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней – в каждый момент времени (на исследуемом интервале);
- *задачи на собственные значения*, когда в формулировку задачи входят неопределенные параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

3. Математическая постановка задачи

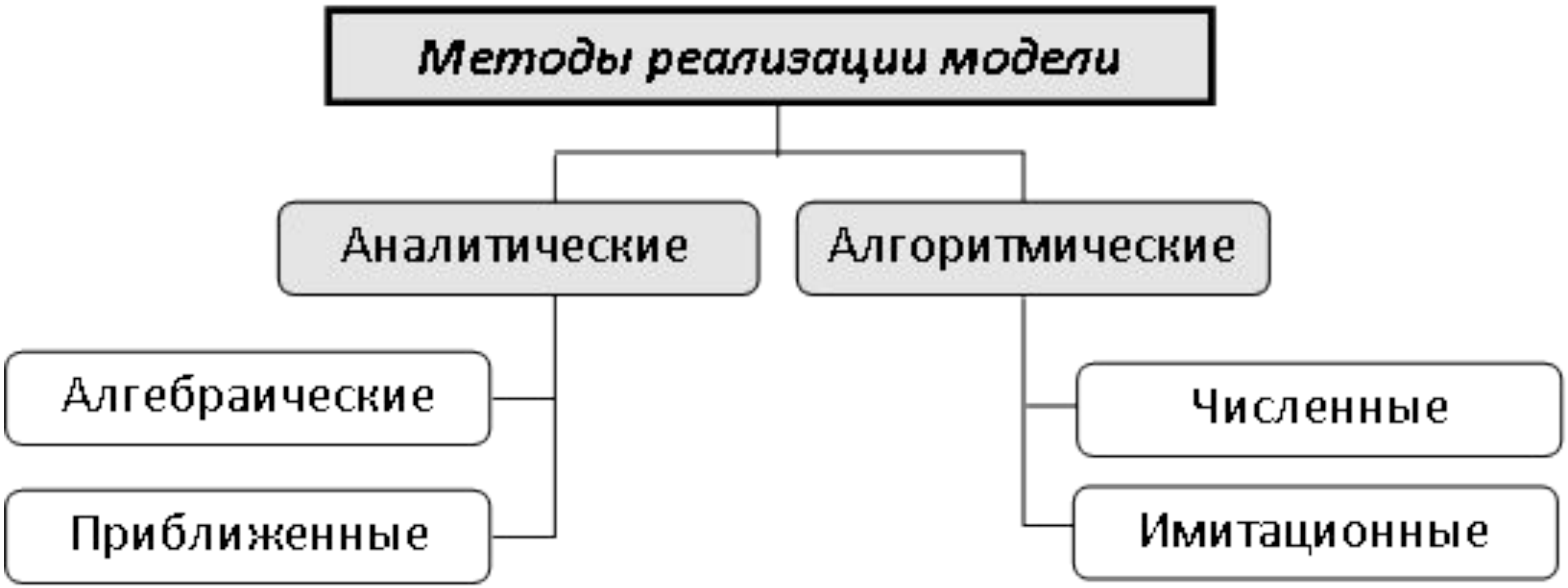
Проверка корректности математической постановки:

- **Контроль размерностей**, включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.
- **Контроль порядков**, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых друг с другом величин и исключением малозначимых параметров.
- **Контроль физического смысла** состоит в проверке физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.
- **Контроль математической замкнутости** - число неизвестных должно совпадать с числом уравнений.

3. Математическая постановка задачи

Математическая модель является корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи



4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Метод реализации модели относят к *аналитическим*, если он позволяет получить выходные величины в виде *аналитических выражений*, т.е. выражений, в которых используется совокупность арифметических операций и переходов к пределу.

Пример: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{x^k+1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$

Частным случаем аналитических выражений являются *алгебраические выражения*, в которых используется конечное или счетное число арифметических операций, операций возведения в целочисленную степень и извлечения корня.

Примеры алгебраических выражений: $ax^2+bx+c, a+b\sqrt{x^3+4ac}.$

4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Применение любого численного метода приводит к погрешности результатов решения задачи. Выделяют три основных составляющих возникающей погрешности при численном решении исходной задачи:

- *неустранимая погрешность*, связанная с неточным заданием исходных данных задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);
- *погрешность метода*, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи (например, заменяя производную $y'(x)$ разностным аналогом $(y(x+\Delta x)-y(x))/\Delta x$, получаем погрешность дискретизации, имеющую при $\Delta x \to 0$ порядок Δx);
- *ошибка округления*, связанная с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ.

4. Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

Можно выделить следующие группы численных методов по объектам, к которым они применяются:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений.

5. Реализация математической модели в виде программы для ЭВМ

Процесс создания программного обеспечения можно разбить на ряд этапов:

- разработка технического задания на создание программного обеспечения (спецификация);
- проектирование структуры программного комплекса;
- кодирование алгоритма;
- тестирование и отладка;
- сопровождение и эксплуатация.

Спецификация программы

1) *Название задачи*

Дается краткое определение решаемой задачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению (компьютеру, внешним устройствам и т.д.).

2) *Описание*

Подробно излагается математическая постановка задачи, описывается применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входных данных для задач не вычислительного (логического) характера и т.д.

3) *Управление режимами работы программы*

Формируются основные требования к способу взаимодействия пользователя с программой (интерфейс «пользователь-компьютер»).

4) *Входные данные*

Описываются входные данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, которые они не могут принимать, и т.д.

Спецификация программы

5) *Выходные данные*

Описываются выходные данные, указывается, в каком виде они должны быть представлены — в числовом, графическом или текстовом, приводятся сведения о точности и объеме выходных данных, способах их сохранения и т.д.

6) *Ошибки*

Перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой, (например, ошибки при вводе входных данных). Указываются способы диагностики и защиты от этих ошибок на этапе проектирования, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочных действий и реакция программного комплекса (компьютера) на эти действия.

7) *Тестовые задачи*

Приводится один или несколько тестовых примеров, на которых в простейших случаях проводится отладка и тестирование программного комплекса.

6. Проверка адекватности модели

Под *адекватностью* математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи.

Проверка адекватности модели преследует две цели:

1)Убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок.

2)Убедиться, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

6. Проверка адекватности модели

Неадекватность результатов моделирования возможна, по крайней мере, по трем причинам:

а) Значения задаваемых параметров модели не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез.
Например, в задаче о полете мяча гипотезу об отсутствии сопротивления воздуха можно использовать лишь при относительно малых (<5 м/с) скоростях движения тела.

б) Принятая система гипотез верна, но константы и параметры в использованных определяющих соотношениях установлены не точно.
Например, в случае задачи о полете мяча значение ускорения свободного падения g может быть уточнено в зависимости от широты.

в) Неверна исходная совокупность гипотез.

7. Практическое использование построенной модели

Математические модели могут использоваться:

- для изучения свойств и особенностей поведения исследуемого объекта при различных сочетаниях исходных данных и при различных режимах;

- как моделирующие блоки в различных системах автоматизированного проектирования (САПР) и управления (АСУ);

- при построении оптимизационных моделей и моделей-имитаторов сложных систем и комплексов.

ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Пример 1. О баскетболисте

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

Исходные данные:

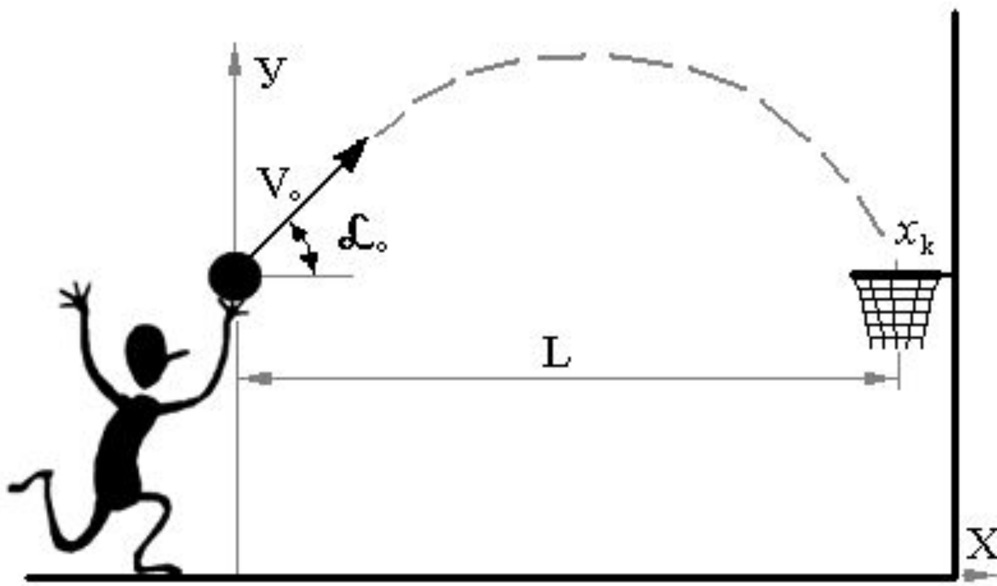
- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University
Department of Theoretical and Applied Mechanics

Пример 1. О баскетболисте

Гипотезы:

1. объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R;
2. мяч будем считать материальной точкой массой m, положение которой совпадает с центром масс мяча;
3. движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения ***g*** и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
4. движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
5. пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча.

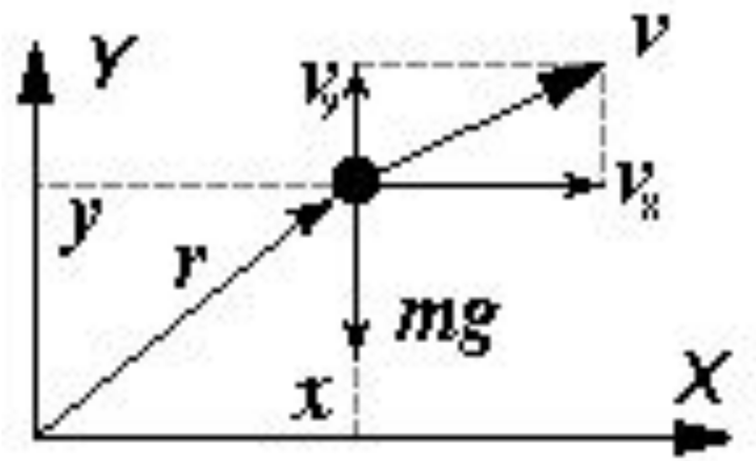


Пример 1. О баскетболисте

Математическая постановка:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{тяж} = m\mathbf{g},$$

$$r(0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$



В проекциях на оси координат:

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = -mg,$$

$$x(0) = x_o, \qquad y(0) = y_o,$$

$$v_x(0) = v_o \cos\alpha_o, \qquad v_y(0) = v_o \sin\alpha_o$$

Точность броска: $\Delta = x(t_k) - x_k$, где $t_k > 0$, $v_y(t_k) < 0$, $y(t_k) = y_k$.

Пример 1. О баскетболисте

Решение задачи:

$$x(t) = x_o + v_o t\cos\alpha_o, \qquad y(t) = y_o + v_o t\sin\alpha_o - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x(t) = v_o\cos\alpha_o, \qquad v_y(t) = v_o\sin\alpha_o - gt.$$

Поиск точности броска:

$$x_0 = y_0 = y_k = 0, \qquad L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_o, \qquad \Delta = L - x_k.$$

Проверка адекватности:

$x_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$м; $v_o = 6{,}44$м/с; $\alpha = 45^0$

$L = 4{,}225$м; $\Delta = 0$м

Пример 2. «Весёлый фермер»

Некий фермер каждый год выращивает на своем поле пшеницу на продажу. Запасов, которые хранились бы больше года, он не делает. Решение о том, сколько пшеницы сеять, принимается с учетом цен предыдущего года. Причем если цены были высокие — в этом году надо сеять пшеницы больше, а если низкие — меньше. Спрос на пшеницу в течение года зависит от ее цены в момент продажи. Когда цена растет, спрос падает.

Необходимо описать поведение цен в ближайшие годы как функцию от первоначальной цены.

Пример 2. «Спрос-предложение»

Обозначения:

В качестве параметров модели используем следующие:

$\boldsymbol{p_n}$ **–** цена за единицу веса пшеницы в *n*-й год ($\boldsymbol{p_n} \geq 0$);

$\boldsymbol{s_n}$ – предложение (объем поставок) пшеницы в *n*-й год (в принятых единицах веса, $\boldsymbol{s_n} \geq 0$);

$\boldsymbol{d_n}$ – спрос на пшеницу в *n*-й год (в единицах веса, $\boldsymbol{d_n} \geq 0$).

Пример 2. «Спрос-предложение»

Гипотезы:

- Объектом исследования является зависимость цены $\boldsymbol{p_n}$ на пшеницу от ее первоначальной цены $\boldsymbol{p_0}$.
- Предположим, что предложение $\boldsymbol{s_{n+1}}$ будущего года зависит линейно от цены $\boldsymbol{p_n}$ в этом году, причем чем выше $\boldsymbol{p_n}$, тем больше $\boldsymbol{s_{n+1}}$:

$$\boldsymbol{s_{n+1} = a\, p_n - b.}$$

- Предположим, что спрос будущего года $\boldsymbol{d_{n+1}}$ зависит линейно от цены $\boldsymbol{p_{n+1}}$ в том же году, причем чем выше цена $\boldsymbol{p_{n+1}}$, тем меньше спрос $\boldsymbol{d_{n+1}}$:

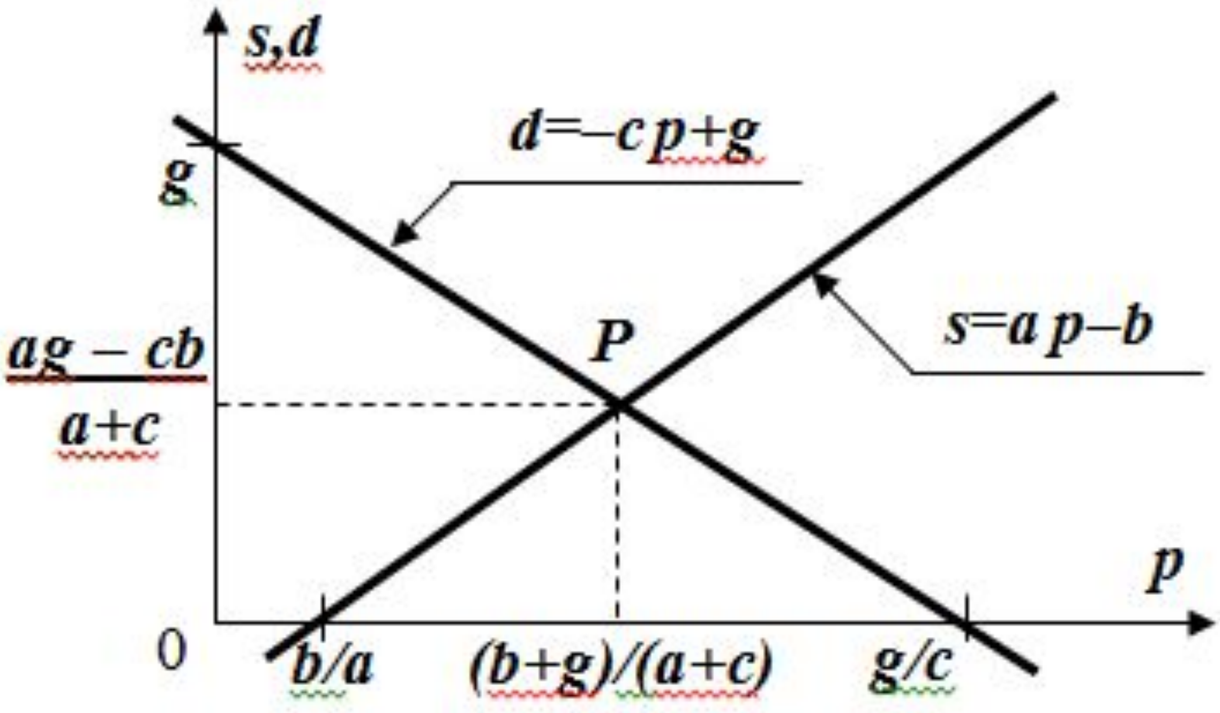
$$\boldsymbol{d_{n+1} = -c\, p_{n+1} + g},.$$

- Предположим, что рыночная цена $\boldsymbol{p_{n+1}}$ определяется равновесием между спросом $\boldsymbol{d_{n+1}}$ и предложением $\boldsymbol{s_{n+1}}$.

Требуется описать поведение цен $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3}$, ... в зависимости от значения цены $\boldsymbol{p_0}$.

Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ математической постановки:



Пример 2. «Спрос-предложение»

Решение:

$$a\ p_n - b = -c\ p_{n+1} + g.$$

Разделим обе части на **c** и переобозначим константы:

$$A = a/c>0, \quad B= (b/c + g/c) >0,$$

Тогда получаем уравнение:

$$p_{n+1} = -A\ p_n + B$$

Решим вначале *однородное уравнение*:

$$p_{n+1} = -A\ p_n$$

Предположим, что $p_0 = C$. Тогда

$$p_1 = C\,(-A);$$

$$p_2 = C\,(-A)^2;$$

$$p_3 = C\,(-A)^3; \quad \ldots$$

или в общем случае: $p_n= C\,(-A)^n.$

Пример 2. «Спрос-предложение»

Решение:

Найдем теперь любое решение неоднородного уравнения:

Пусть $p_n = D$ для всех n.

Подставим в исходное уравнение, получим

$$D + A\,D = B \text{ или } D = B/(A+1).$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$p_n = C\,(-A)^n + B/(A+1).$$

При $n=0$ получим

$$C = p_0 - B/(A+1).$$

Тогда окончательное решение будет иметь вид:

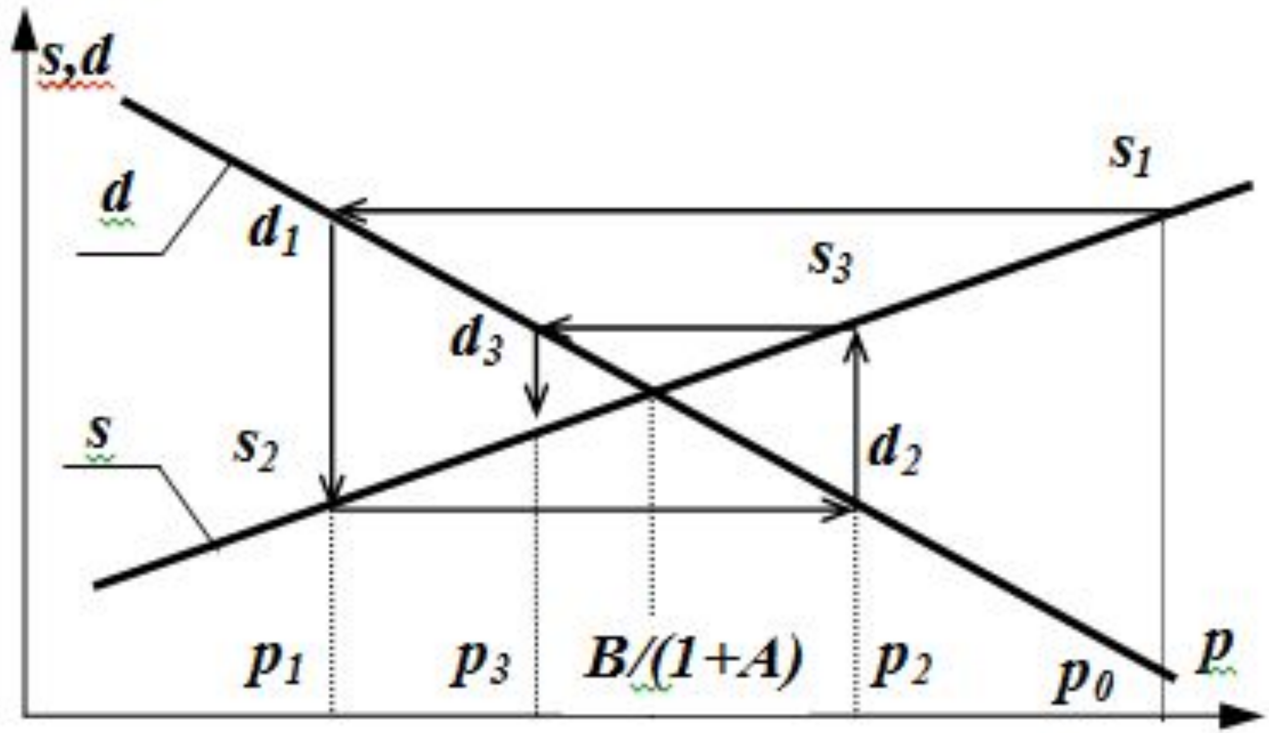
$$p_n = p_0\,(-A)^n + [B/(A+1)]\,[1 - (-A)^n].$$

Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ результатов:

<u>0<A<1</u>

A = a/c>0

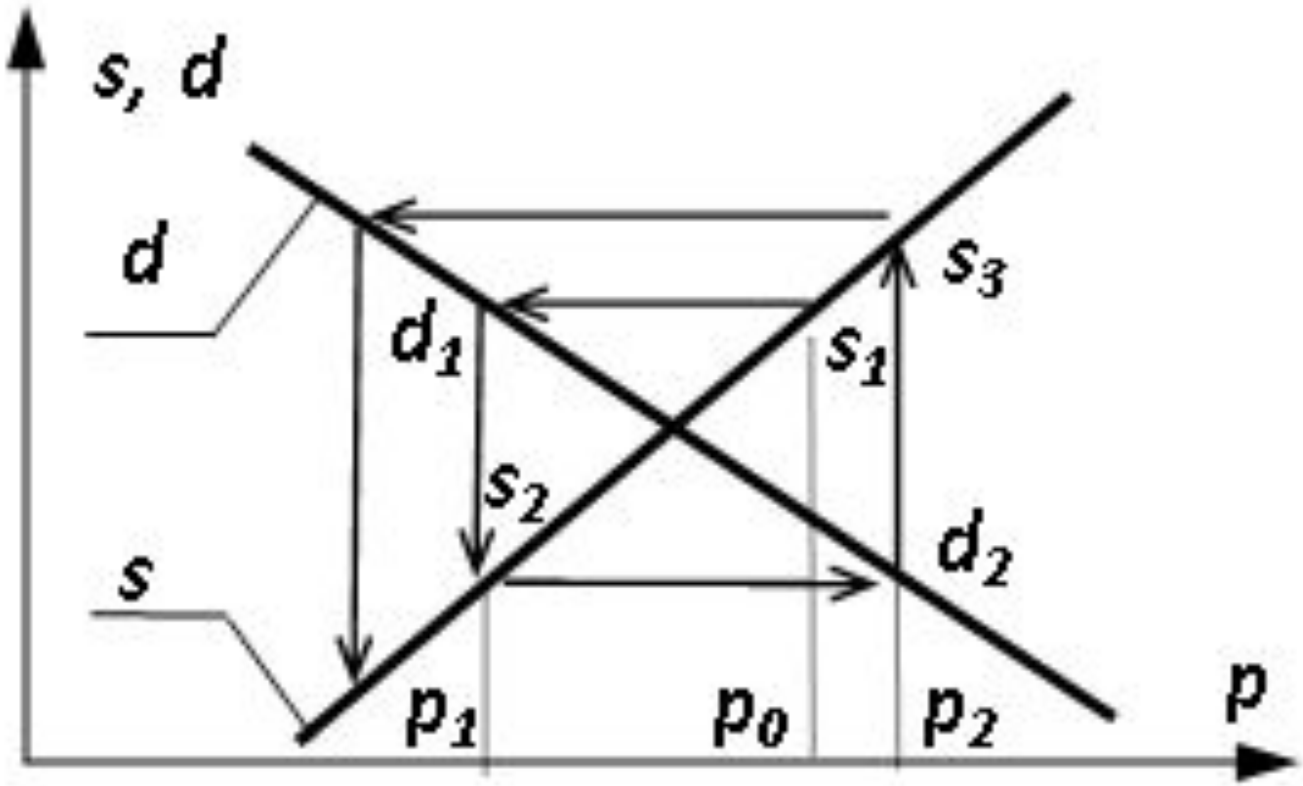


Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ результатов:

<u>A>1</u>

A = a/c>0

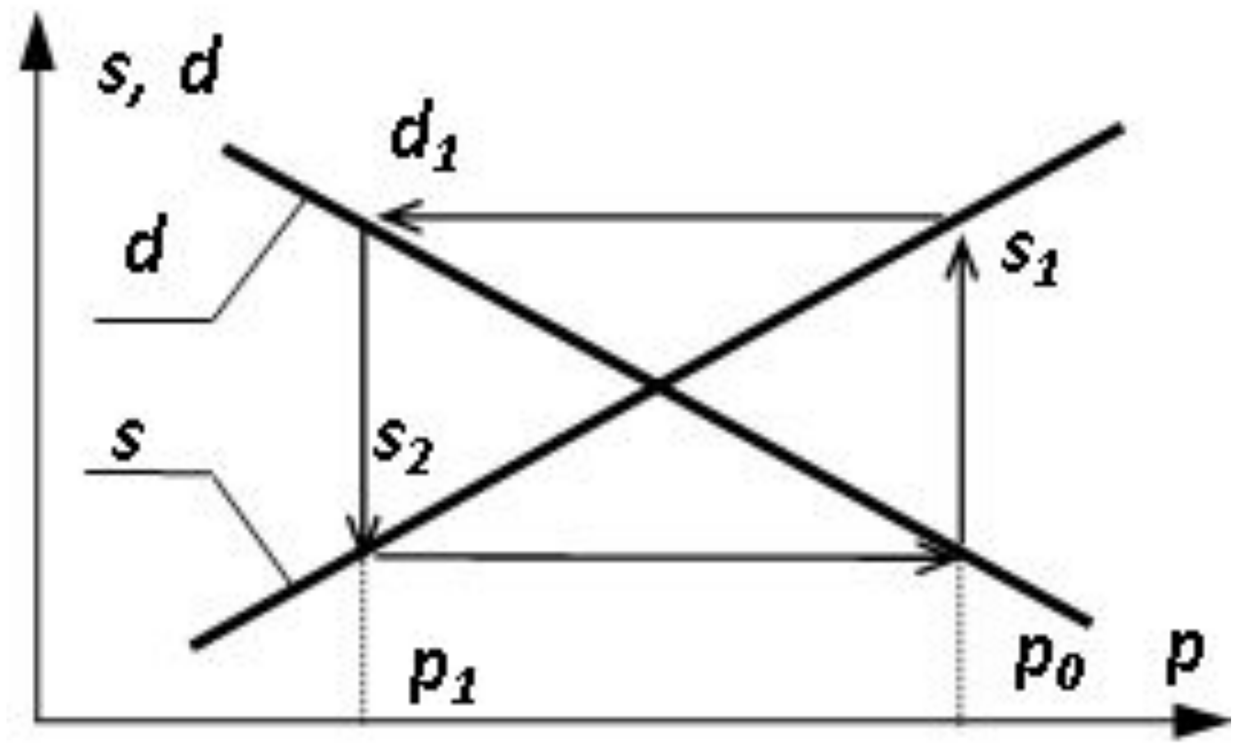


Пример 2. «Спрос-предложение»

Анализ результатов:

<u>A=1</u>

A = a/c>0

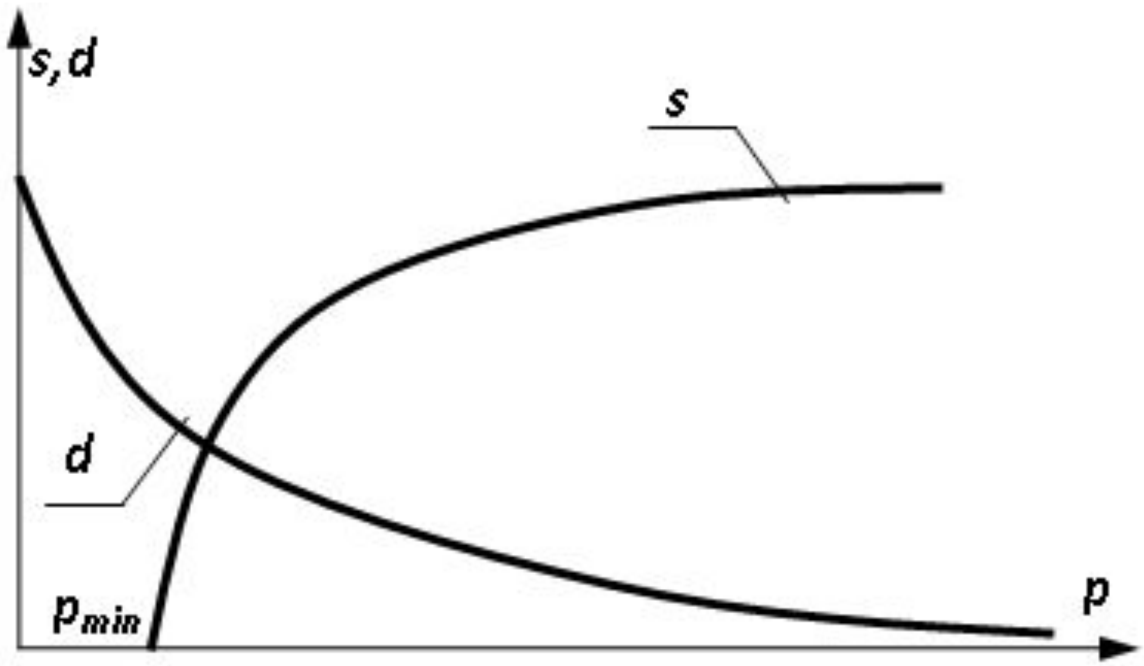


Пример 2. «Спрос-предложение»

Критика модели:

1. **d**, **s** – нелинейно зависят от цены.

2. Цена не формируется на основе «справедливого» равенства между спросом и предложением



Пример 3. Динамика популяций

Популяцией в биологии называют сообщество особей одного вида, занимающих некоторую область пространства на нашей планете.

- Что получится, если поместить тысячу карасей в пруд с ограниченными пищевыми ресурсами?
- Что изменится, если выпустить туда еще пятьдесят щук, поедающих в среднем по два карася в день?
- Какая судьба постигнет вирус, вызывающих гибель определенного вида животных и распространяющийся с известной скоростью, зависящей от плотности популяции?
- Какими темпами будет увеличиваться численность людей на Земле?

Пример 3. Модель Мальтуса

Первая модель динамики популяций была предложена священником Томасом Мальтусом еще в 1778 году в опубликованной им работе «Трактат о народонаселении». Хотя модель, предложенная Мальтусом, касалась народонаселения Земли, ее можно распространить на любую популяцию живых организмов.

Содержательная постановка задачи:

Как будет изменяться численность популяции, если сдерживающие факторы (болезни, хищники, конкурирующие виды, ограниченность питания и т.п.) отсутствуют?

Пример 3. Модель Мальтуса

Концептуальная постановка задачи:

Исследование популяции провести при следующих допущениях:

- объектом исследования является некоторая популяция организмов;
- сдерживающие факторы роста популяции отсутствуют;
- скорость прироста численности популяции прямо пропорциональна величине численности популяции.

Последние два предположения являются достаточно грубыми. Их применение оправдано на достаточно коротком начальном этапе развития популяции.

Пример 3. Модель Мальтуса

Математическая постановка задачи

Пусть *x(t)* – численность популяции в момент времени *t*. Функцией прироста *R(t)* называют относительное изменение численности за время *Δt*:

$$R(t) = (x(t+\Delta t) - x(t)) \,/\, x(t)\,\Delta t$$

Если эта величина – константа r, то закон, управляющий динамикой в модели Мальтуса, имеет вид

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

Переходя к пределу по *Δt*, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

при начальном условии $x(0) = x_0$.

Пример 3. Модель Мальтуса

Решение задачи

Для решения уравнения можно воспользоваться методом разделения переменных:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = r\int_{0}^{t} dt$$

или $$ln\ (x/x_0) = rt$$

Окончательно $$x(t) = x_0\, e^{rt}.$$

Анализ результатов

Полученное решение по модели Мальтуса предсказывает неограниченный рост численности популяции по экспоненциальному закону. В действительности неограниченный рост невозможен, так как сдерживающие факторы присутствуют всегда. Численность популяции, как правило, испытывает небольшие колебания относительно некоторой величины.

Пример 3. Модель Ферхюльста

П.Ф. Ферхюльст сформулировал в 1845 году закон, содержащий ограничение на рост популяции.

Содержательная постановка задачи:

Как будет изменяться численность популяции, если экологическая ниша может обеспечить существование популяции только определенного максимального размера x_{max} и что коэффициент прироста должен снижаться, когда размеры популяции приближаются к x_{max}.

Пример 3. Модель Ферхюльста

Концептуальная постановка задачи:

Исследование популяции провести при следующих допущениях:

- объектом исследования является некоторая популяция организмов;
- Будем измерять численность популяции в относительных единицах

$$X = x / x_{max}.$$

- функцию прироста по Ферхюльсту можно записать следующим образом

$$R(X) = r\,(1 - X).$$

Пример 3. Модель Ферхюльста

Математическая постановка задачи

Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = r\left(1 - X\right)X$$

при начальных условиях

$$X(0) = X_0.$$

Решение задачи

Уравнение можно проинтегрировать методом разделения переменных:

$$\frac{dX}{X\left(X-1\right)} = \frac{dX}{X-1} - \frac{dX}{X} = -rdt$$

в результате чего получаем решение: $$X = \frac{X_0 e^{rt}}{1 - X_0\left(1 - e^{rt}\right)}$$

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University
Department of Theoretical and Applied Mechanics

Пример 3. Модель Ферхюльста

Анализ результатов:

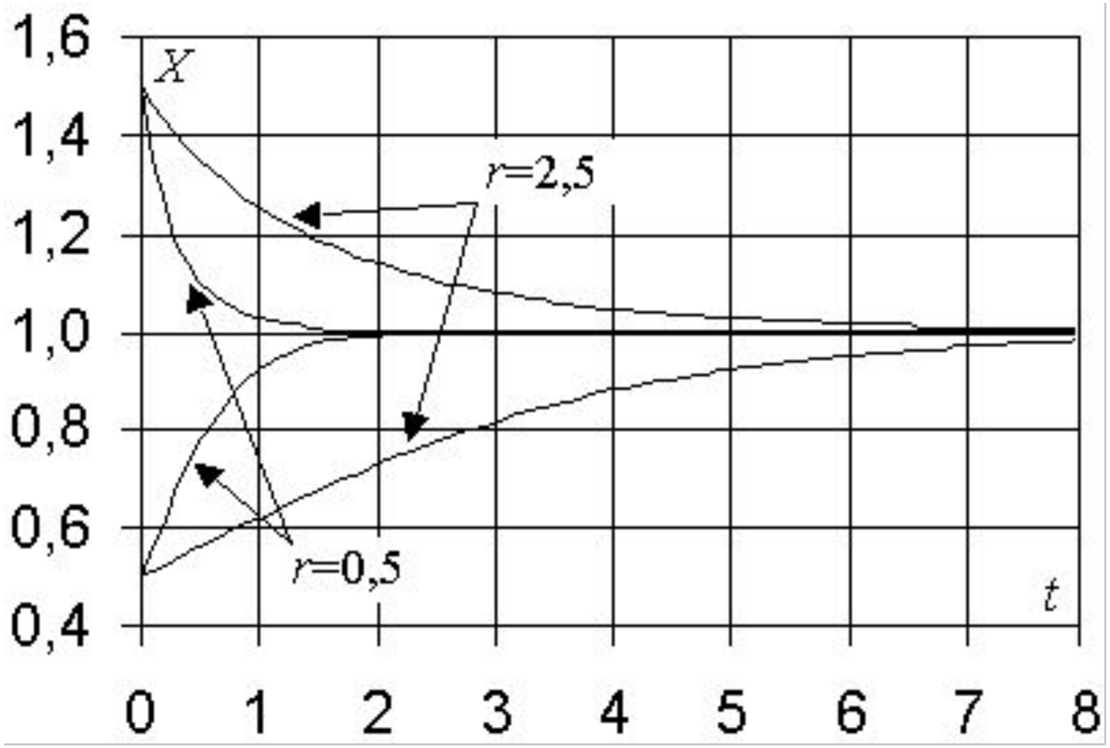


Рис. 3.8. Изменение относительной численности популяции

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Содержательная постановка задачи:

Рассмотрим ситуацию, когда в одной и той же местности проживают две популяции, имеющие схожий рацион питания. В этом случае эти популяции начинают конкурировать между собой за источники питания. Как будет изменяться численность этих двух популяций со временем?

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Концептуальная постановка задачи:

Исследование популяции провести при следующих допущениях:

- объектом исследования являются две популяции организмов;
- Будем обозначать численность одной популяции через x, а другой через y.
- Пусть нам известны предельные численности популяций x^* и y^*, которые они могли бы достигать в данной области обитания при отсутствии конкурента.

Тогда функции прироста с учетом конкуренции можно записать следующим образом

$$R_x(x,y) = k_x(x^* - x) - k_{xy}\, y, \qquad R_y(x,y) = k_y(y^* - y) - k_{yx} x,$$

где k_x, k_y, k_{xy}, k_{yx} – положительные коэффициенты пропорциональности, учитывающие особенности каждой популяции и их взаимовлияние.

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Математическая постановка задачи

Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = k_x\left(x^* - x\right)x - k_{xy}xy$$

$$\frac{dy}{dt} = k_y\left(y^* - y\right)y - k_{yx}xy$$

при начальных условиях

$x(0) = x_0$; $y(0) = y_0$.

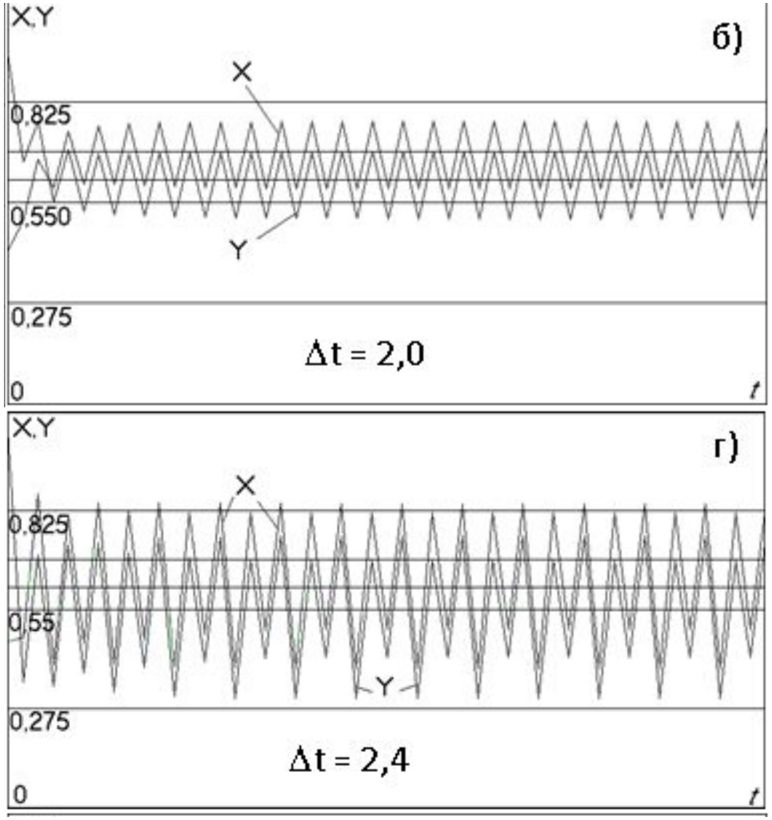
Если ввести относительные численности популяции $X = x/x^*$; $Y = y/y^*$, то получим систему ДУ вида:

$$\frac{dX}{dt} = r_x\left(1 - X - \mu_x Y\right)X,$$

$$\frac{dY}{dt} = r_y\left(Y^* - Y - \mu_y X\right)Y$$

Пример 3. Конкуренция двух популяций

Анализ результатов:



Пример 4. Гармонический осциллятор

Содержательная постановка

Тело, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к неподвижной стене пружиной. Исследовать колебательные движения тела. Масса тела и жесткость пружины известны.

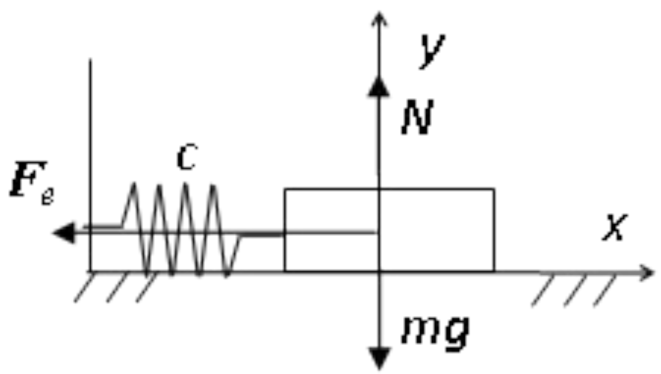


Рис. 3.18. Схема задачи

Концептуальная постановка:

- Объектом исследования является поступательно движущееся тело массой *m*, принимаемое за материальную точку.
- Движение тела подчиняется второму закону Ньютона.

Пример 4. Гармонический осциллятор

Концептуальная постановка:

- Тело находится под действием трех сил: тяжести $m\boldsymbol{g}$, реакции $\boldsymbol{N}$ и силы упругости $\boldsymbol{F}_e$. Так как поверхность гладкая, то силой трения пренебрегаем.
- Тело совершает прямолинейные колебательные движения.
- В уравновешенном состоянии центр масс тела находится в положении с координатами (x_p, y_p).
- При малом растяжении пружины величину возникающей в ней силы упругости можно представить линейной зависимостью (закон Гука) $F_e=c\Delta x$, где $\Delta x=x–x_p$ – растяжение пружины (отклонение тела от положения равновесия x_p), c – жесткость пружины. Направлена сила в сторону положения равновесия.

Принимая, что в некоторый момент пружину растянули на величину x_0 и сообщили телу скорость $\boldsymbol{v}_0$, требуется определить координату и скорость тела как функции времени.

Пример 4. Гармонический осциллятор

Математическая постановка:

С математической точки зрения имеем дифференциальное уравнение:

$$m\frac{dv}{dt} = F_e = -c\left(x - x_p\right); \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

при следующих начальных условиях

$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = v_0.$$

Решение задачи:

Введем обозначение для производных по времени:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Пример 4. Гармонический осциллятор

Решение задачи:

Тогда получаем уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,\ k^2 = \frac{c}{m}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{x_0}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{ka}$$

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Содержательная постановка

Тело, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к неподвижной стене пружиной. Исследовать колебательные движения тела, если на него действует сила вязкого трения. Масса тела и жесткость пружины известны.

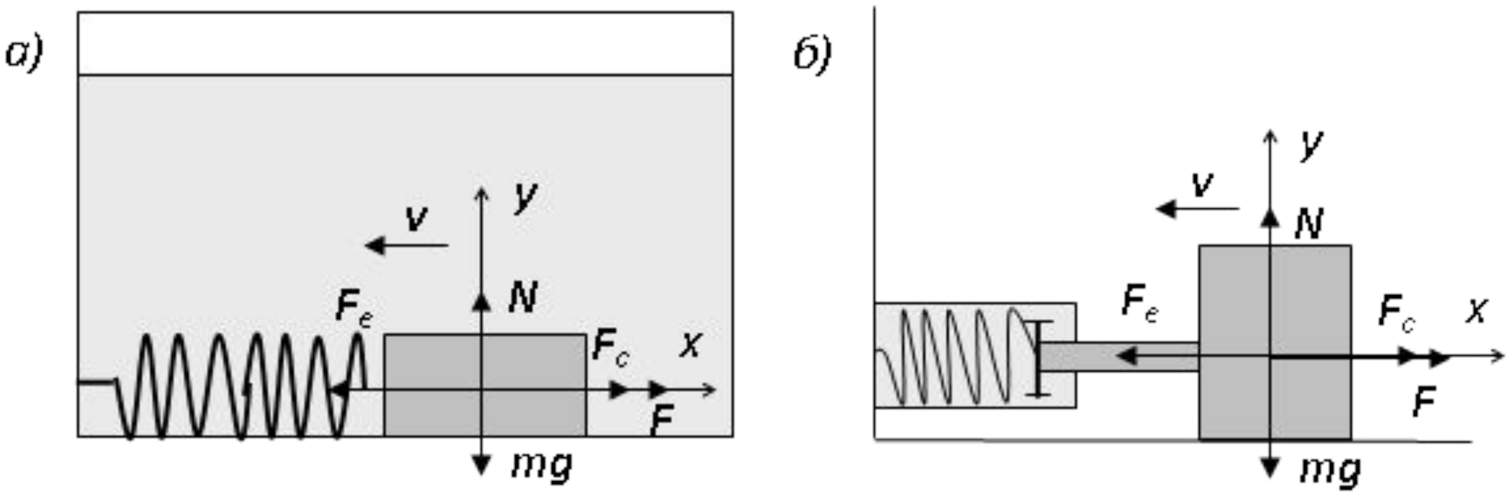


Рис. 3.22. Схемы конструкций с вязкими средами

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Концептуальная постановка:

- …..
- Тело находится под действием четырех сил: тяжести $m\mathbf{g}$, реакции $\mathbf{N}$, силы упругости $\mathbf{F}_e$ и силы вязкого трения.
- Сила вязкого трения прямо пропорциональна скорости тела и направлена против направления его движения: $\mathbf{F}_c = -\mu\mathbf{v}$ (μ – коэффициент сопротивления, величина постоянная)
- При малом растяжении пружины величину возникающей в ней силы упругости можно представить линейной зависимостью (закон Гука) $F_e=c\Delta x$, где $\Delta x=x-x_p$ – растяжение пружины (отклонение тела от положения равновесия x_p), c – жесткость пружины. Направлена сила в сторону положения равновесия.

Принимая, что в некоторый момент пружину растянули на величину x_0 и сообщили телу скорость $\mathbf{v}_0$, требуется определить координату и скорость тела как функции времени.

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Математическая постановка:

С математической точки зрения имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -k^2\left(x - x_p\right) - 2n\,v; \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

при следующих начальных условиях

$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = v_0.$$

Решение задачи:

Введем обозначение для производных по времени:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

Тогда получаем уравнение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,\ k^2 = \frac{c}{m}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x = ae^{-nt} \sin (k_n t + \alpha),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_n^2}}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{v_0 + nx_0}{x_0 k_n}$$

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

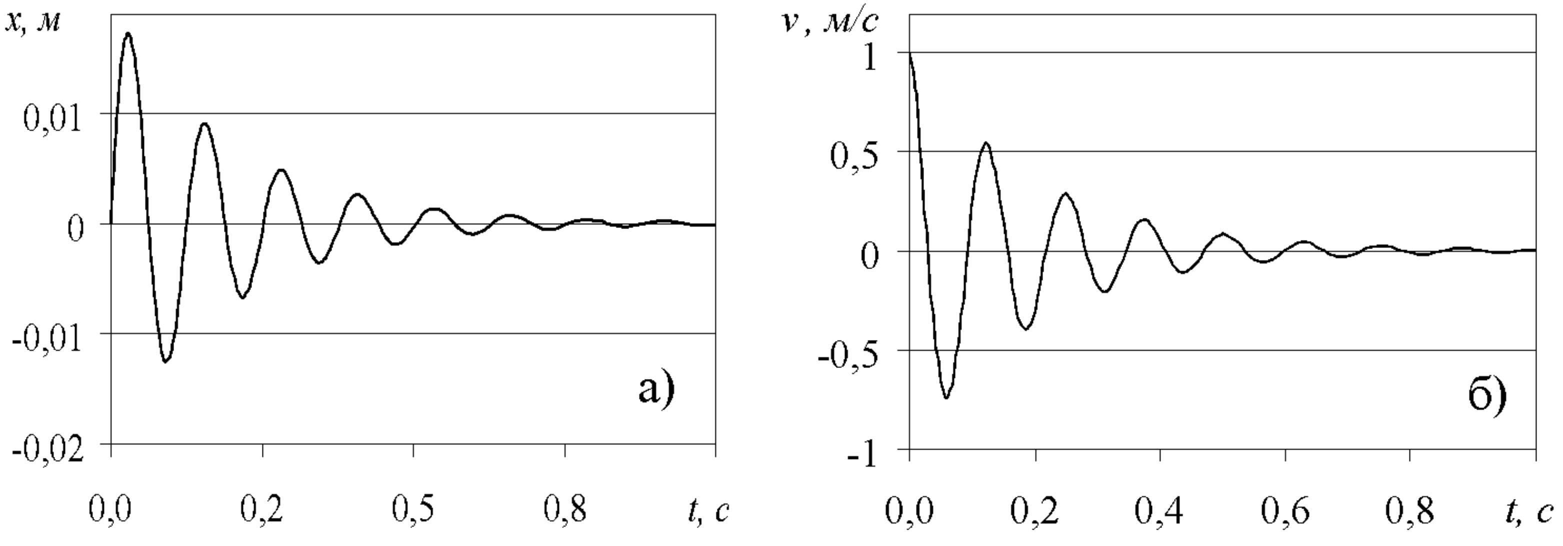


Рис. 3.23. Координата (а) и скорость (б) центра масс тела в вязкой среде

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

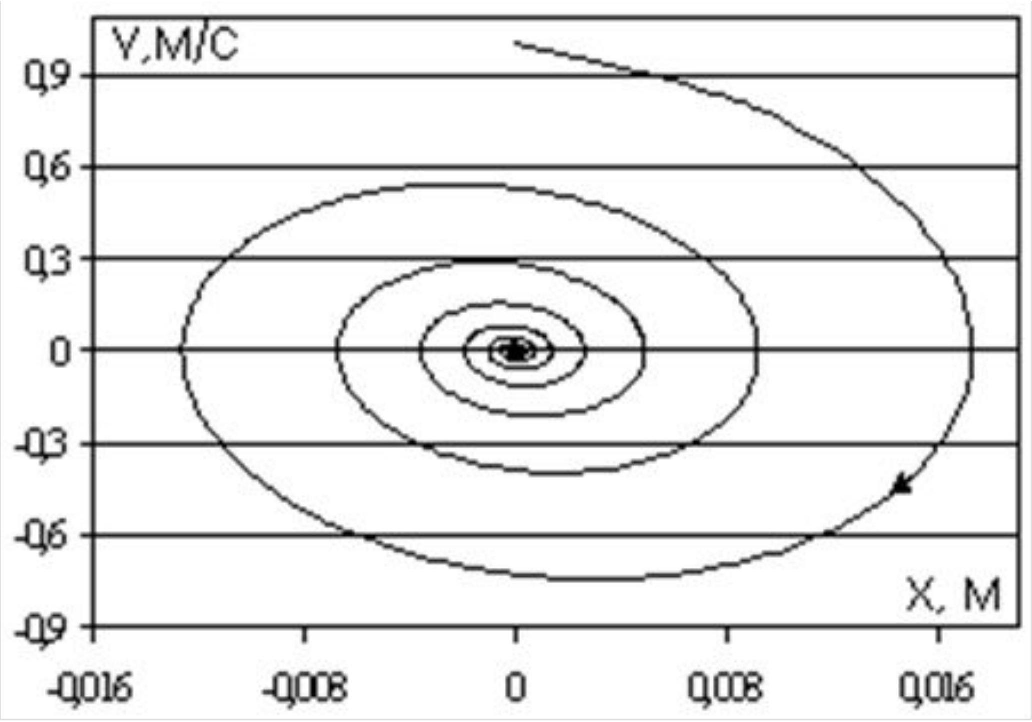


Рис. 3.24. Фазовая траектория движения точки в вязкой среде

Пример 4. Гармонический осциллятор с трением

Решение задачи:

n > k – апериодическое движение

При достаточно большом сопротивлении, когда $k_a^2 = n^2 - k^2 > 0$, решение примет вид

$$x = e^{-nt}\left(x_0 ch\, k_a t + \frac{v_0 + n x_0}{k_a} sh\, k_a t\right)$$

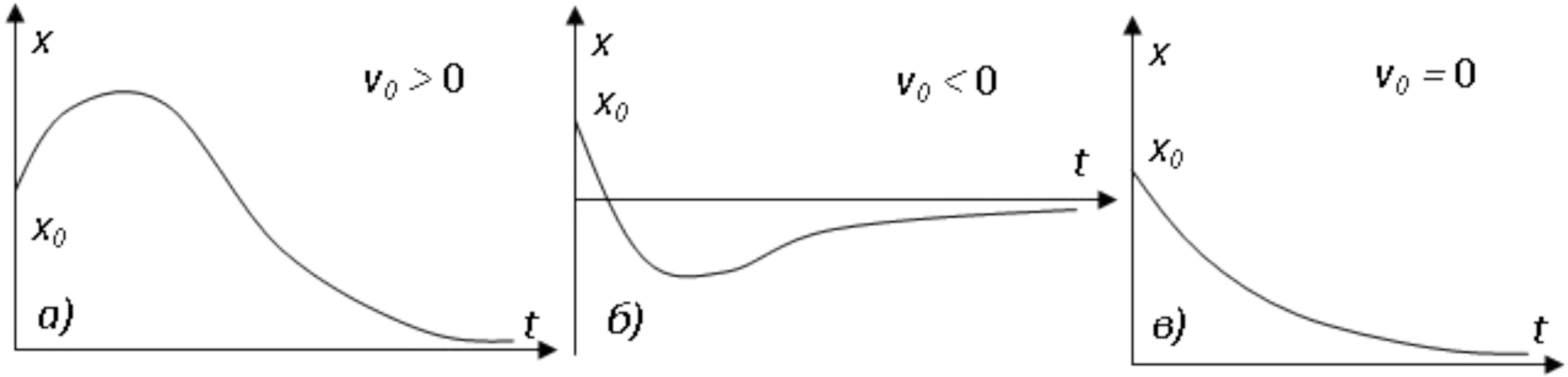
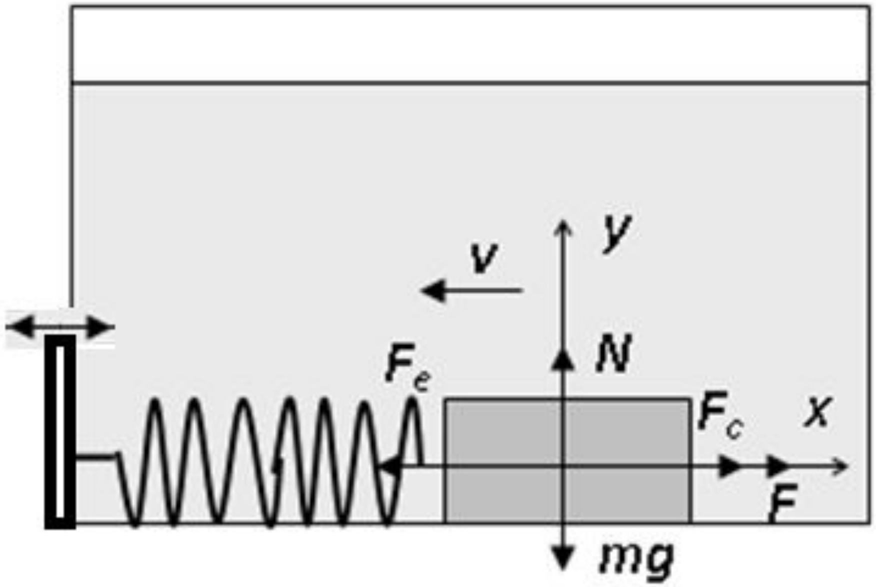


Рис. 3.25. Виды апериодического движения при $x_0 > 0$

Пример 4. Вынужденные колебания

Содержательная постановка

Тело, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, прикреплено к стене пружиной. Исследовать колебательные движения тела, если стена совершает колебания заданной амплитуды и частоты. Масса тела и жесткость пружины известны.



Пример 4. Вынужденные колебания

Концептуальная постановка:

- …..
- Будем считать, что на стенку действует вынуждающая сила, приводящая к ее колебаниям по закону

X(t)=Xmax*cos(wt),

где Xmax – амплитуда, w – частота вынуждающей силы.

- Принимая, что в некоторый момент пружину растянули на величину x_0 и сообщили телу скорость $\boldsymbol{v}_0$, требуется определить координату и скорость тела как функции времени.

Пример 4. Вынужденные колебания

Математическая постановка:

С математической точки зрения имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -k^2\left(x - x_{стенки}\right) - 2n\,v; \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

при следующих начальных условиях

$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = v_0.$$

Решение задачи:

Введем обозначение для производных по времени:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Пример 4. Вынужденные колебания

Решение задачи:

Тогда получаем уравнение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = X_{\max}\cos(\omega t),\ k^2 = \frac{c}{m}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x = ae^{-nt}\sin(k_n t + \alpha),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{k_n^2 - \omega^2}}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{v_0 + nx_0}{x_0\sqrt{k_n^2 - \omega^2}}$$

При $$\omega^2 \to k_n^2$$ имеем **резонанс**.

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University
Department of Theoretical and Applied Mechanics

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ

Система. Виды систем

Система *есть совокупность взаимосвязанных элементов, выделенная из среды и взаимодействующая с окружающей средой как целое для достижения поставленной цели.*

1. **Модель «черного ящика»**

Если внутреннее строение системы неизвестно (или не интересует исследователя), то применяется модель «**черного ящика**». В данной модели системы отсутствуют (или не используются в явной форме) сведения о внутреннем содержании «ящика» (поэтому он и называется «черным»), а только задаются входные и выходные связи со средой.

Примером модели «черного ящика» может служить экспериментальное исследование некоторого сложного объекта, когда экспериментатор, изменяя входные параметры объекта, получает на выходе различные его характеристики.

Система. Виды систем

2. **Модель состава системы**

Описывает, из каких элементов и подсистем состоит данная система.

При этом *элементами* системы называются те части системы, которые полагаются неделимыми, а части системы, состоящие более чем из одного элемента, называются *подсистемами*.

Например, если в качестве системы рассмотреть автомобиль, то ее подсистемой можно считать систему управления, а элементами последней – руль, педали и т.д.

Система. Виды систем

3. **Модель структуры системы**

Мало знать состав системы, кроме этого необходимо установить связи между отдельными элементами, которые называются *отношениями*.

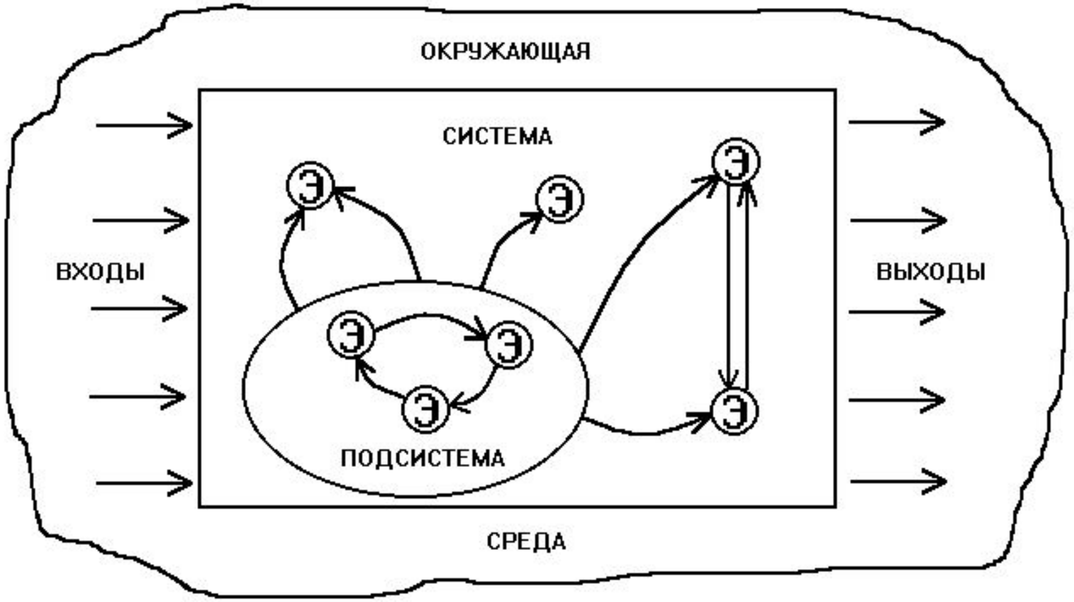
Совокупность необходимых и достаточных для достижения цели отношений между элементами называется *моделью структуры системы*. Основной сложностью при описании структуры (списка отношений) является обоснование конечного числа связей, которые являются наиболее существенными по отношению к рассматриваемой цели.

Например, при моделировании механической системы, движущейся в околоземном пространстве, обычно не учитываются силы взаимного притяжения отдельных материальных точек (элементов), но учитывается сила притяжения их к Земле (отношения).

Система. Виды систем

4. **Модель «белого ящика»**

Имея три формальные модели системы: «черного ящика», состава и структуры, – и объединив их, можно получить еще одну модель, которую называют *структурной схемой* системы или моделью «белого ящика»



Система. Структурная модель системы

<u>Структурная модель системы</u> – это совокупность конкретных элементов данной системы, необходимых и достаточных отношений между этими элементами и связей между системой и окружающей средой.

Пусть требуется построить структурную модель абсолютно твердого тела, совершающего поступательное движение под действием приложенной силы (абсолютно твердое тело при движении не изменяет форму и размеры).

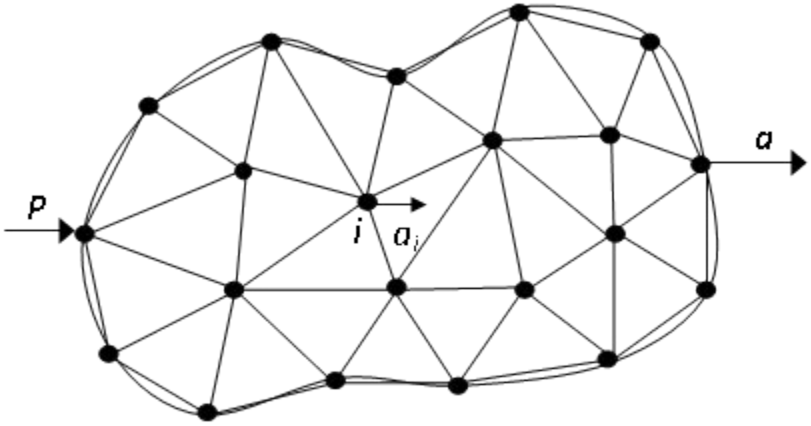


Рис. 4.4. Структурная модель абсолютно твердого тела при поступательном движении

Система. Структурная модель системы

Сила **P** выступает в качестве воздействия внешней среды на тело, а откликом на это воздействие (выходным параметром) служит ускорение тела **a** (или любой его точки вследствие их равенства при поступательном движении). Согласно второму закону Ньютона

$$\mathbf{a} = (m)^{-1}\,\mathbf{P},$$

где m – масса тела.

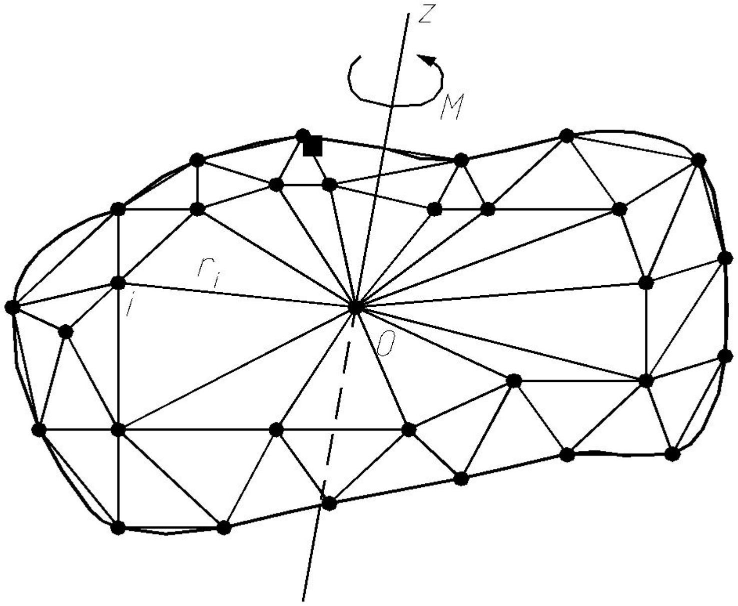
Таким образом, для того, чтобы данная структурная модель правильно описывала поступательное движение тела, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие

$$\sum_{i=1}^{N} m_i = m$$

Система. Структурная модель системы

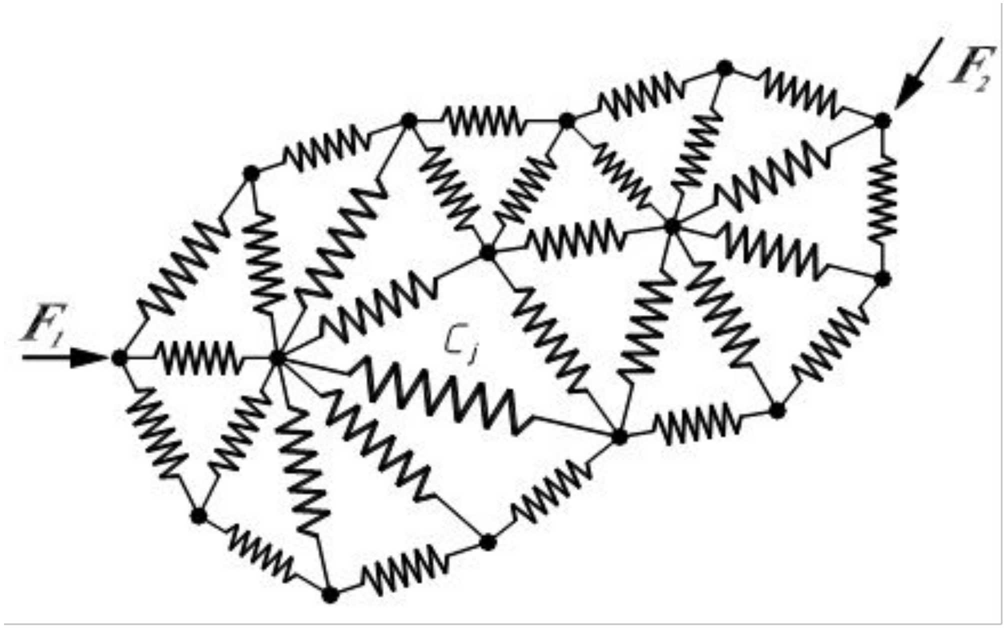
Если необходимо описать вращательное движение твердого тела вокруг некоторой заданной оси под действием приложенного момента сил. В этом случае распределение элементов внутри объема тела должно быть таким, чтобы выполнялось условие равенства моментов инерции реального тела и его структурной модели относительно заданной оси Z:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$



Система. Структурная модель системы

Еще больше усложнится структурная модель в случае описания движения деформируемого (например, упругого) тела. Тогда вместо недеформируемых стержней в качестве связей между элементами (материальными точками) могут выступать пружинки с различными упругими свойствами:



Примеры структурных моделей. Система “Солнце – Земля – Луна”

Содержательная постановка

Требуется определить и исследовать траектории движения центров Земли и Луны вокруг Солнца с учетом сил взаимодействия между планетами.

Концептуальная постановка

Для решения поставленной задачи достаточно исследовать динамику системы, состоящей из трех элементов, взаимодействующих между собой

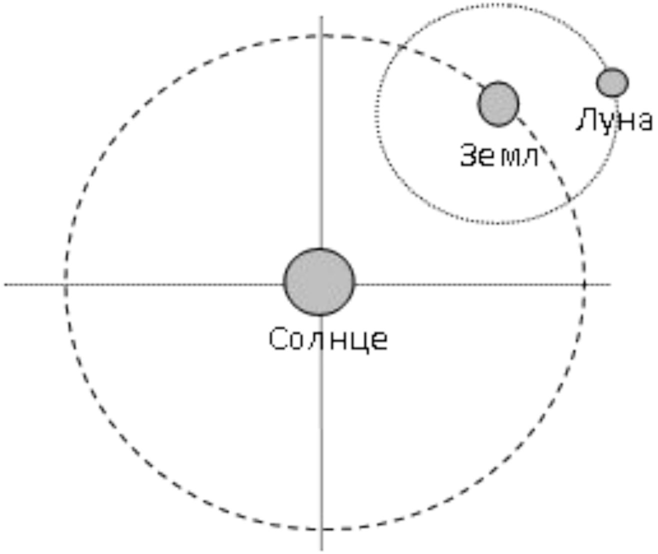


Рис. 4.12 Система
“Солнце-Земля-Луна”

Примеры структурных моделей. Система “Солнце – Земля – Луна”

Концептуальная постановка

- Взаимодействием элементов системы с окружающей средой вследствие малости их влияния можно пренебречь.
- Не будем учитывать влияние формы планет на исследуемые траектории. Тогда можно считать, что линии действия равнодействующих сил притяжения между планетами проходят через центры планет.
- Поскольку масса Солнца во много раз больше масс Земли и Луны, действием сил притяжения Луны и Земли на движение Солнца также можно пренебречь. Все это позволяет в качестве моделей каждого элемента системы выбрать материальную точку с заданной массой.
- При этом одну точку можно считать условно неподвижной (Солнце) а две другие – движущимися в одной плоскости под действием центральных сил, определяемых согласно закону всемирного тяготения.

Примеры структурных моделей. Система “Солнце – Земля – Луна”

Математическая постановка

Используя 2-й закон Ньютона, уравнения движения для каждой материальной точки в проекциях на оси координат 0xy можно записать в следующей форме:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = -\gamma \dfrac{m_1 M}{r_1^3} x_1 - \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\left(x_1 - x_2\right), \\ m_1 a_{1y} = -\gamma \dfrac{m_1 M}{r_1^3} y_1 - \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\left(y_1 - y_2\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 a_{2x} = -\gamma \dfrac{m_2 M}{r_2^3} x_2 - \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\left(x_2 - x_1\right), \\ m_2 a_{2y} = -\gamma \dfrac{m_2 M}{r_2^3} y_2 - \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\left(y_2 - y_1\right), \end{cases}$$

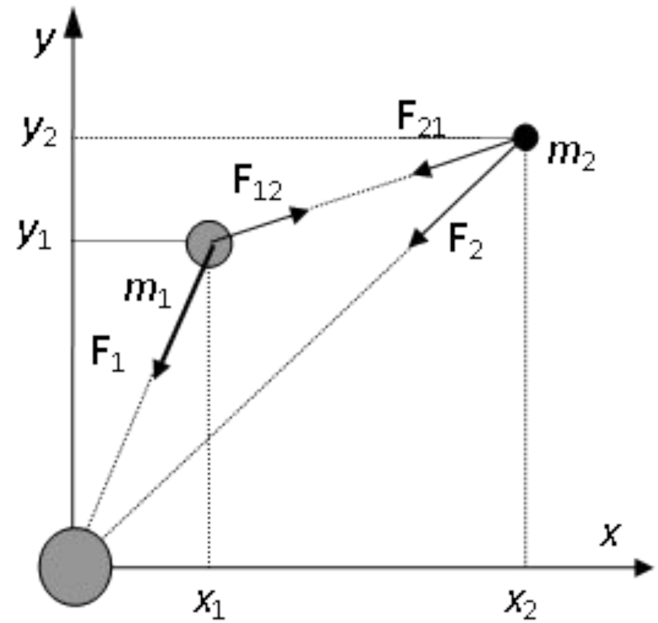
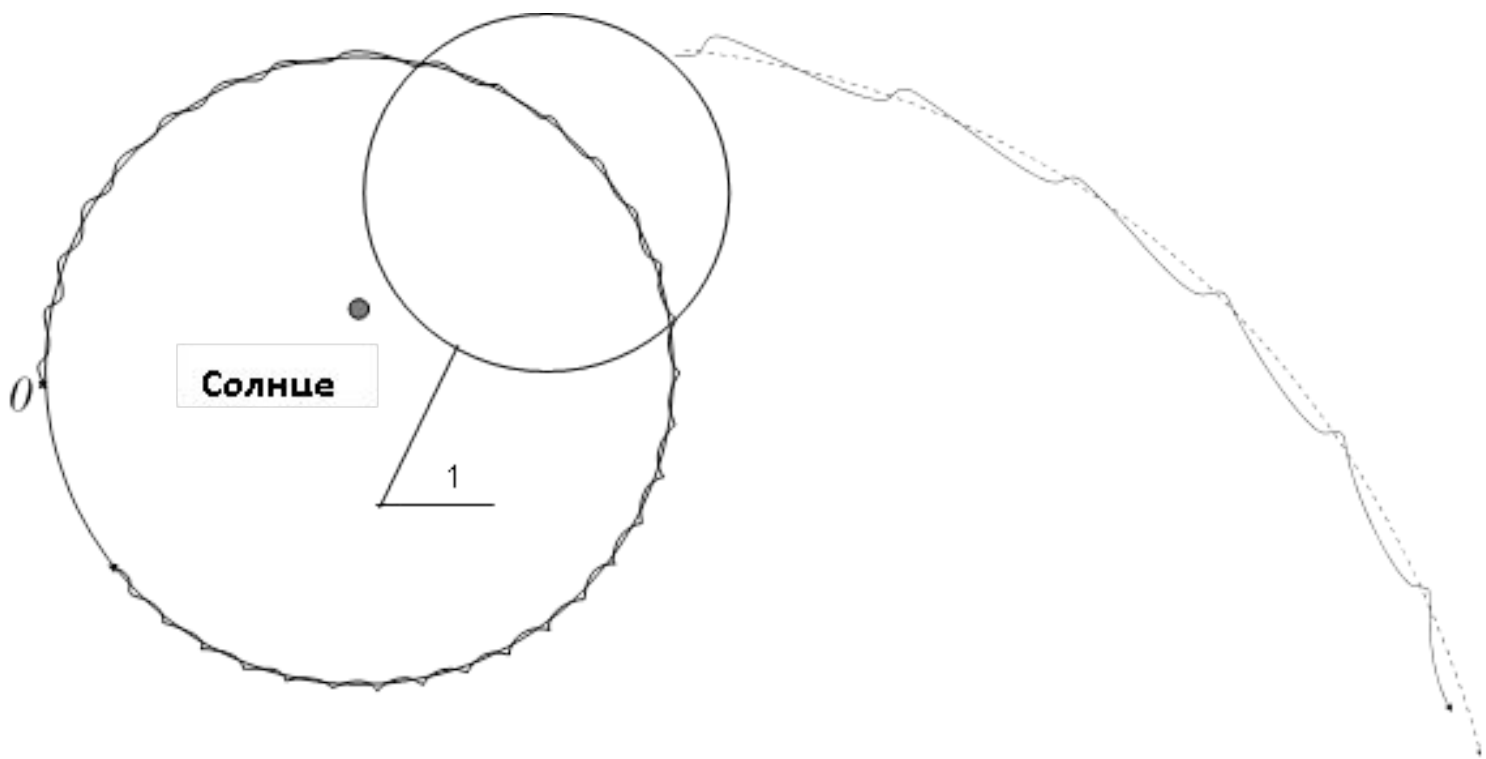


Рис. 4.13. Структурная схема системы двух тел в поле центральных сил

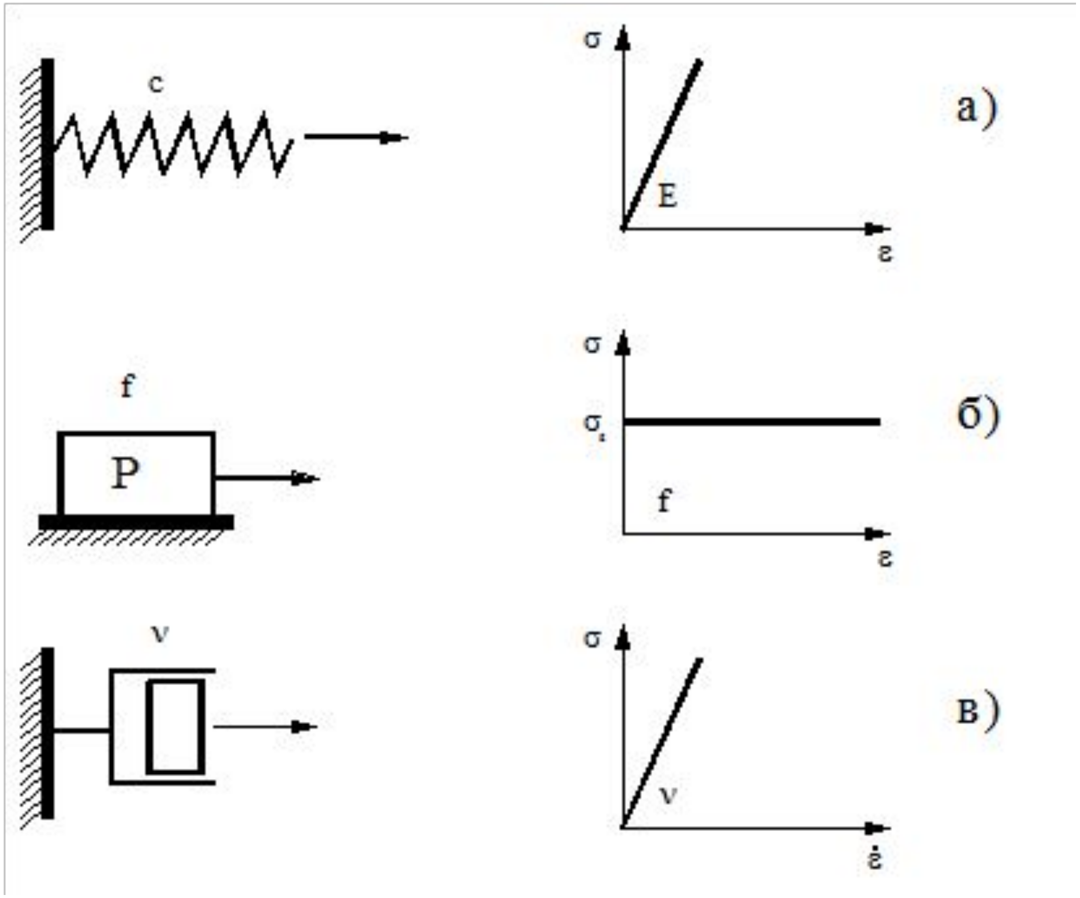
$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad r_{12} = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$$

Примеры структурных моделей. Система “Солнце – Земля – Луна”

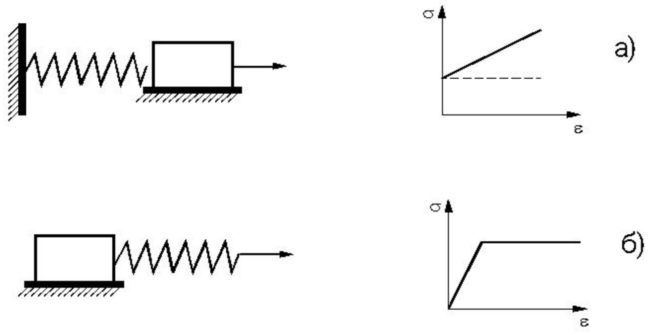
Результаты моделирования



Примеры структурных моделей. Структурная модель упругопластического тела



Примеры структурных моделей. Структурная модель упругопластического тела

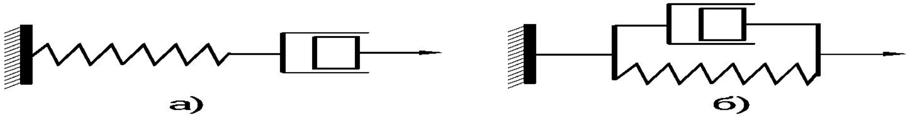


Виды упругопластических агрегатов

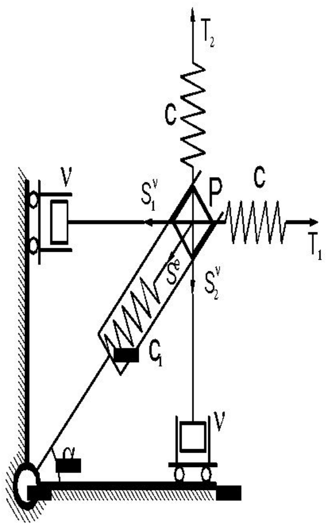
Примеры структурных моделей. Структурная модель упругопластического тела

При последовательном соединении вязкого и упругого элементов в них возникают одинаковые усилия (напряжения), но различные перемещения и скорости перемещений (деформации и скорости деформаций). Такая модель называется *телом Максвелла.*

При параллельном соединении этих же структурных элементов свойства агрегата изменяются; элементы будут испытывать одинаковые деформации (скорости деформаций), но различные напряжения (*тело Фойхта*).



Примеры структурных моделей. Структурная модель упругопластического тела



Двумерная структурная модель упругопластического упрочняющегося тела

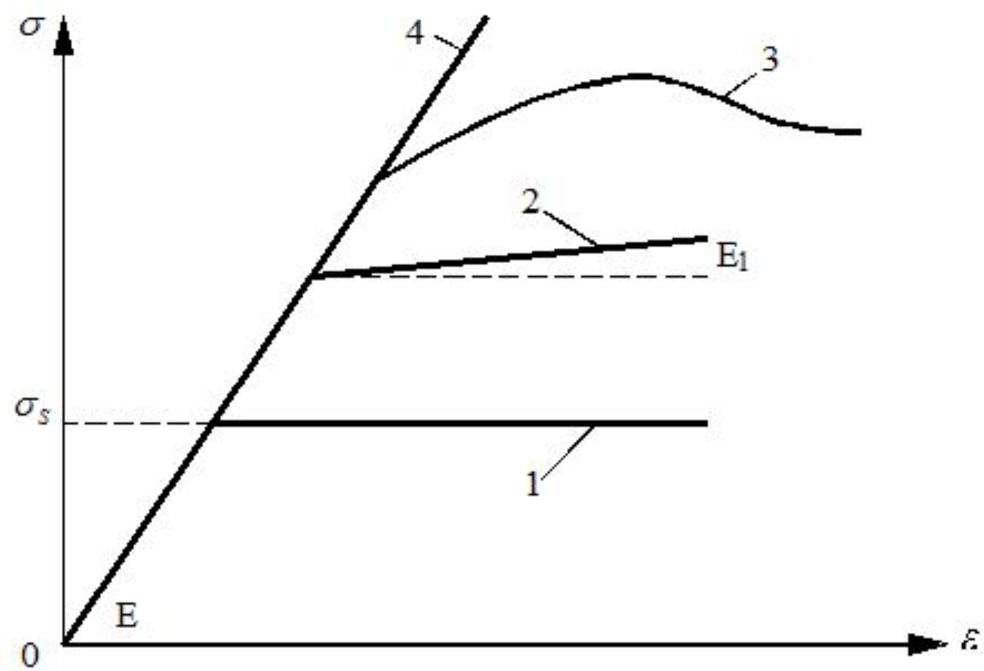


Рис. 4.19. Различные диаграммы деформирования

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University
Department of Theoretical and Applied Mechanics

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИМИТАЦИОННОГО ПОДХОДА

Когда имитация лучше прямой модели

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования или отдельных его элементов.
2. Если аналитические методы имеются, но математические процедуры трудно реализуемы, сложны и трудоемки.
3. Когда изучаются новые ситуации в сложных системах, о которых мало что известно. В этом случае имитация служит для предварительной проверки новых стратегий и правил принятия решений перед проведением экспериментов на реальной системе.
4. Когда основное значение имеет последовательность событий в проектируемой сложной системе и модель используется для предсказания узких мест в функционировании системы и других трудностей, связанных с добавлением в систему новых элементов.

Когда имитация лучше прямой модели

5. Когда кроме оценки влияния параметров сложной системы желательно осуществить наблюдение за поведением отдельных компонентов этой системы в течение определенного периода времени.
6. Когда имитационный подход оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальной обстановке.
7. Когда необходимо контролировать протекание процессов в сложной системе путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.
8. При подготовке специалистов и освоении новой техники, когда имитатор обеспечивает возможность приобретения необходимых навыков в эксплуатации новой техники.

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Под системой массового обслуживания (СМО) понимают системы, на вход которых подается случайный поток однотипных *заявок* (событий), обработка которых выполняется одним или несколькими однотипными *каналами* (устройствами).

СМО	***Канал***	***Поток событий***
Телефонная станция	Телефонная линия	Звонки
Ремонтная мастерская	Мастер	Заявки на ремонт
Железнодорожная касса	Кассир	Пассажиры
Участок цеха	Отдельный станок	Детали на обработку
Больница (стационар)	Больничная койка	Больные
Перекресток	Направление переезда	Автомашины
Магазин	Продавец	Покупатели
Морской порт	Причал	Суда под разгрузку

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Система массового обслуживания

- Одноканальная
  - С отказами
- Многоканальная
  - С очередью
    - С ограниченной очередью
    - С неограниченной очередью

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Разработкой и изучением математических моделей для СМО занимается специальная дисциплина, называемая *теорией массового обслуживания.* Как правило, вопросы моделирования СМО особенно остро стоят при проектировании новых систем. Само проектирование выполняется с учетом так называемых *параметров эффективности* системы, в качестве которых могут выступать:

- среднее число заявок, обслуженных в единицу времени;
- среднее число занятых каналов;
- средняя длина очереди;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее число заявок, получивших отказ в обслуживании и так далее.

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Например, если известна интенсивность поступления заготовок на участок цеха, то какое количество станков и какой производительности необходимо использовать, чтобы участок работал эффективно, то есть загрузка станков была выше 50-60% (станки и рабочие не простаивали), и в то же время участок справлялся с потоком заявок (не тормозил работу других участков)?

- можно взять меньшее количество высокопроизводительных станков. Но, как правило, такие станки более дорогостоящие, требуют более квалифицированного обслуживания, более дорогих запасных частей. В то же время, в этом случае число самих рабочих будет меньше.
- напротив, менее производительные станки дешевле при приобретении и в обслуживании, но для их установки, возможно, потребуются обширные производственные помещения.

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Рассмотрим модель *n*-канальной СМО с отказами.

Примем следующие предположения:
- Все каналы однотипны.
- Время обслуживания заявки в канале случайно и образует простейший поток интенсивностью μ.
- Поступающий поток заявок интенсивностью λ будем считать простейшим.
- Система может иметь $n+1$ состояний: S_0 – все каналы свободны; S_1 – занят один канал; S_2 – заняты два канал и так далее.
- Если все каналы системы заняты, то очередная заявка не будет удовлетворена.

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Так как входной и выходной потоки простейшие, то система может переходить из одного состояния в другое тоже последовательно: из S_0 в S_1; из S_1 в S_0 или в S_2 и так далее:

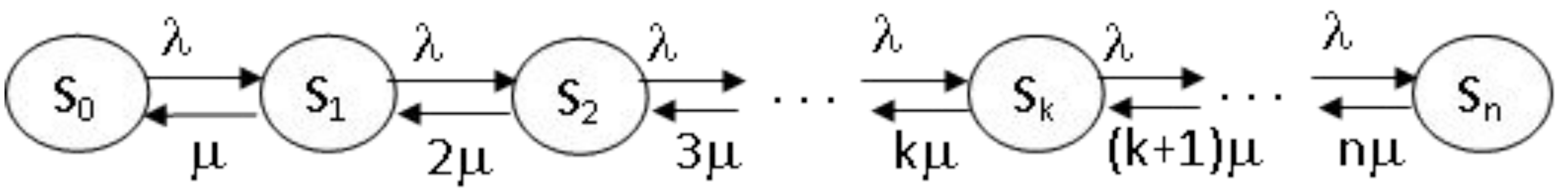


Рис. 5.10. Граф состояний

$$p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1},$$

$\alpha = \lambda / \mu$ - приведенная интенсивность заявок

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_o$$

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Если все каналы заняты, то очередная заявка не будет обслужена системой и получит отказ. Поэтому *вероятность отказа* системы равна

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_o$$

Вероятность обслуживания заявки

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_o$$

Абсолютной пропускной способностью называют среднее число заявок, обслуженных системой в единицу времени

$$A = \lambda Q.$$

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Среднее число загруженных каналов

$$N_з=p_1+2p_2+\ldots+np_n.$$

Можно ввести *коэффициент загрузки* одного канала как отношение среднего числа загруженных каналов к их общему количеству:

$$K_з=N_з/n.$$

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Имитатор одноканальной СМО с отказами

Пусть на вход системы поступает случайный поток заявок, интервал времени Δt между которыми является случайной величиной, распределенной по равномерному закону в интервале от t_1 до t_2 ($\Delta t = R(t_1, t_2)$). Время выполнения Δw заявки в канале также случайно и подчинено равномерному закону:
$\Delta w = R(w_1, w_2)$.
Требуется определить вероятность отказа в обслуживании и коэффициент загрузки канала.

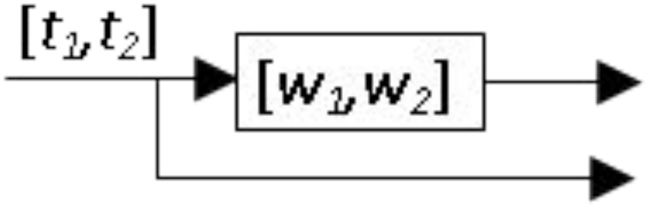


Рис.7.1. Схема СМО

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

В качестве отдельных элементов можно выделить следующие:

1) Источник заявок. Характеризуется

- общим количеством N_{max} сгенерированных заявок за весь интервал наблюдений;
- количеством $N(t)$ заявок, сгенерированных к моменту времени t;
- законом распределения интервалов времени Δt между появлением заявок;
- временем t_n появления текущей заявки.

2) Канал. Характеризуется:

- своим состоянием $S(t)$ (занят или свободен в момент времени t);
- числом N_w обслуженных заявок;
- суммарным временем T_w нахождения в занятом состоянии;
- производительностью Δw (закон распределения времен выполнения заявок определенного типа);
- временем W_n окончания обслуживания n-ой заявки.

Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания

Зная число N_w обслуженных заявок в момент времени t из их общего числа N, можно оценить вероятность отказа $P_{отк}(t)$ ее частостью $W_{отк}(t)$:

$$P_{отк}(t) \approx W_{отк}(t) = (N(t) - N_w(t))/N(t).$$

Коэффициент загрузки $K_з$ канала можно оценить, зная время работы T_w канала:

$$K_з(t) = T_w(t) / t$$

Блок-схема имитатора:

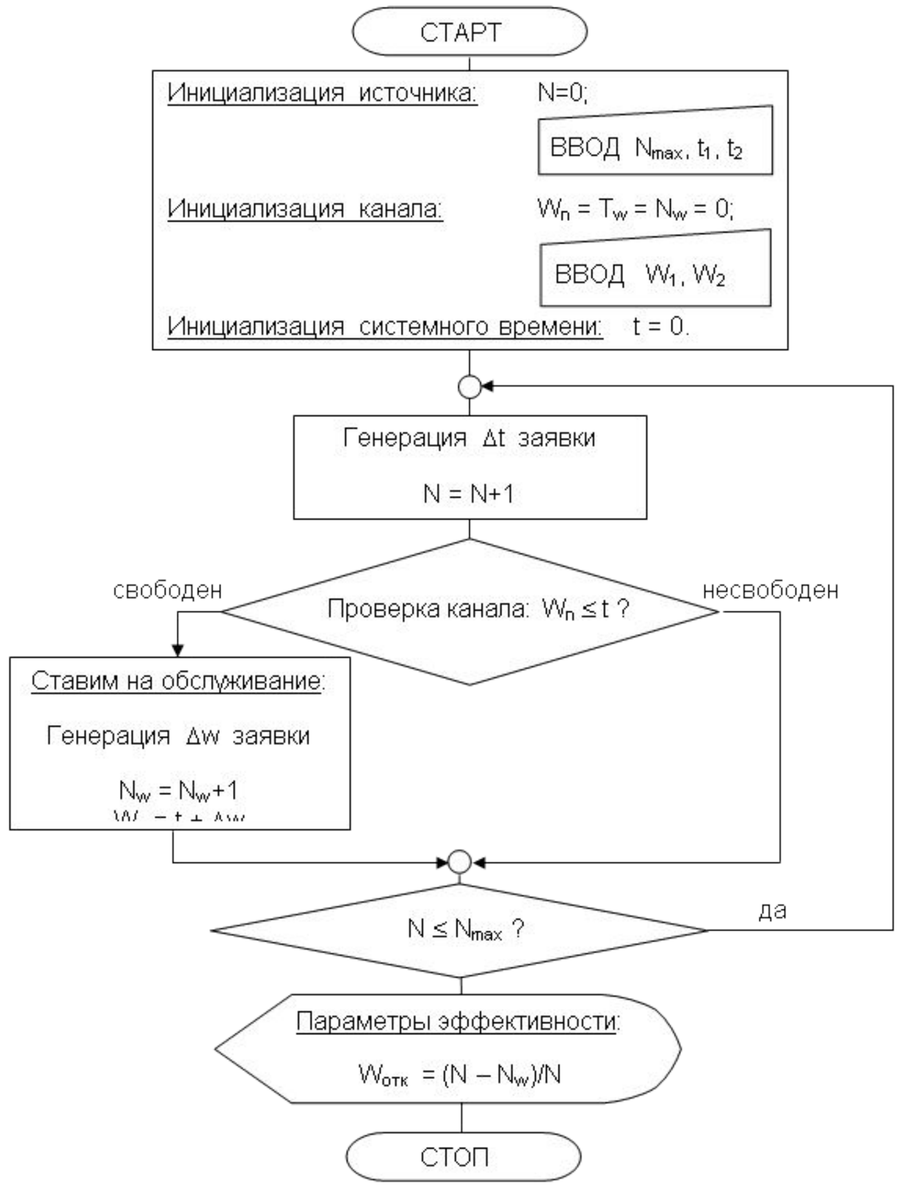
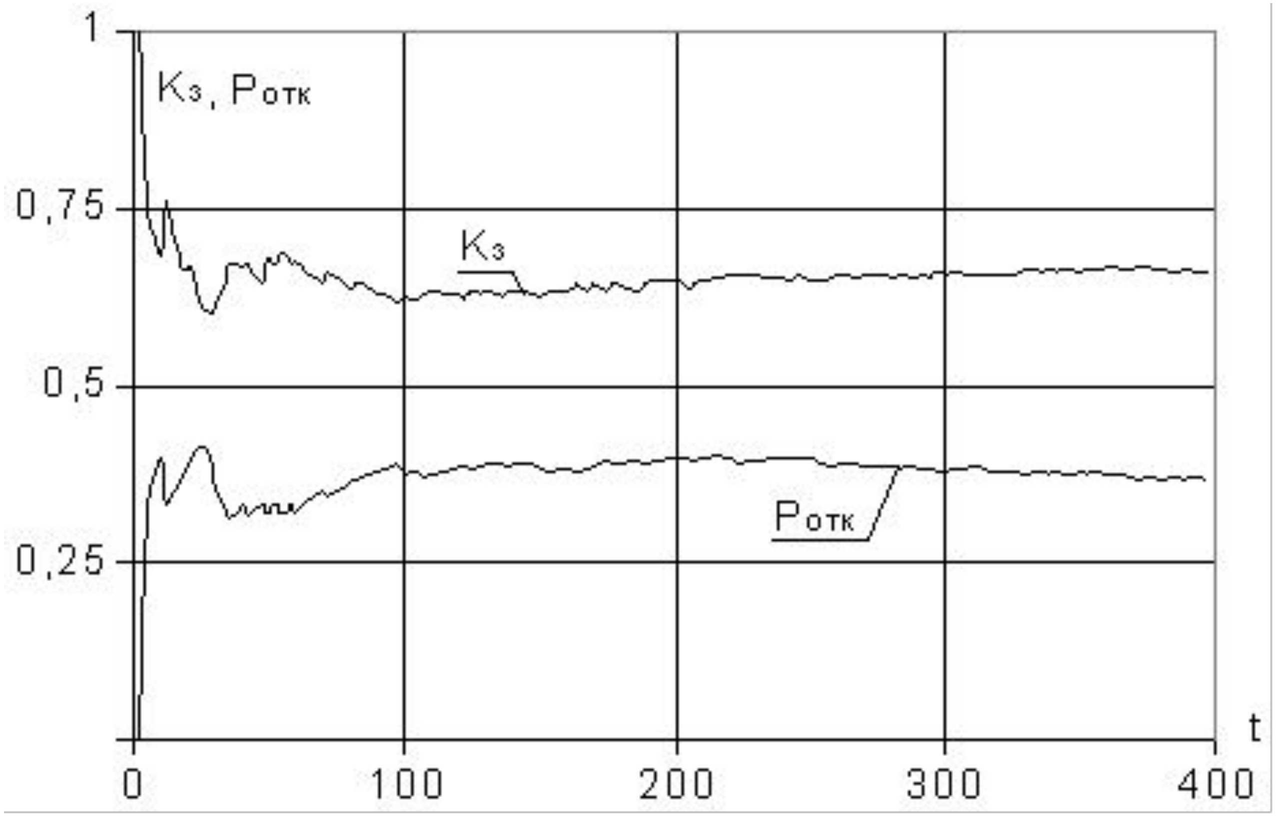


Рис. 7.2. Блок-схема имитатора

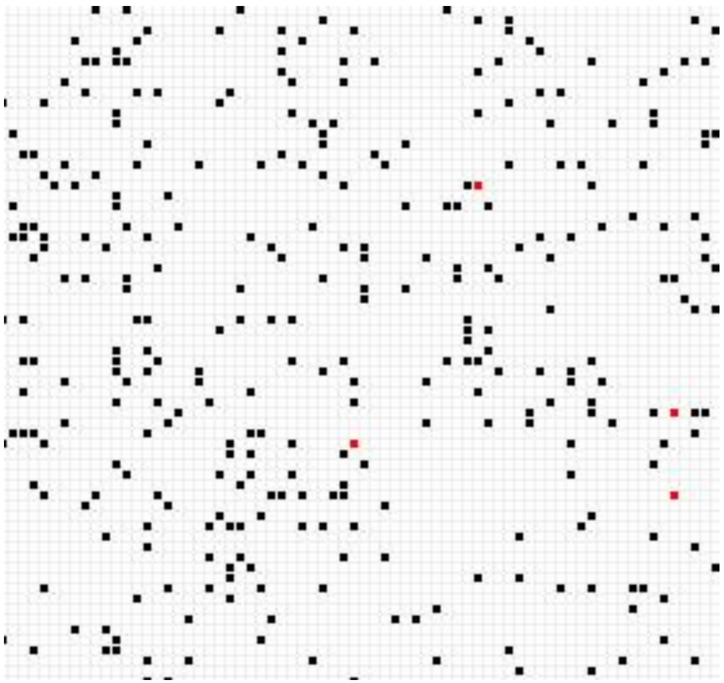
Примеры имитационных моделей. Системы массового обслуживания



Клеточные автоматы

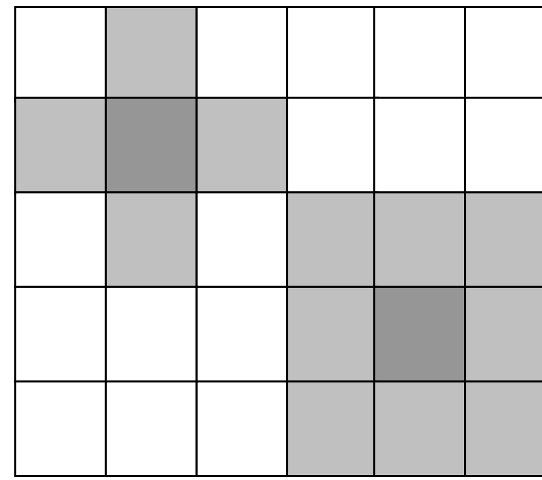
Автоматом называют устройство (или совокупность устройств), которое без непосредственного участия человека выполняет процессы приема, преобразования и передачи энергии, материалов или информации в соответствии с заложенной в него программой.

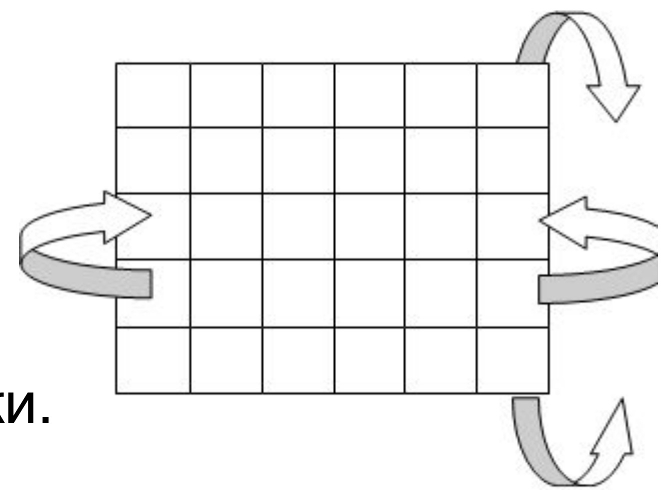
Клеточный автомат можно представить, как регулярную решетку (или «таблицу») ячеек («клеток»), каждая из которых может находиться в конечном числе возможных состояний.



Клеточные автоматы

- Состояние каждой ячейки обновляется в результате выполнения последовательности *дискретных* постоянных шагов во времени (или *тактов*).
- Переменные в каждой ячейке изменяются *одновременно* («синхронно»), исходя из значений переменных на предыдущем шаге.
- Правило определения нового состояния ячейки зависит только от *локальных* значений ячеек из некоторой окрестности данной ячейки.





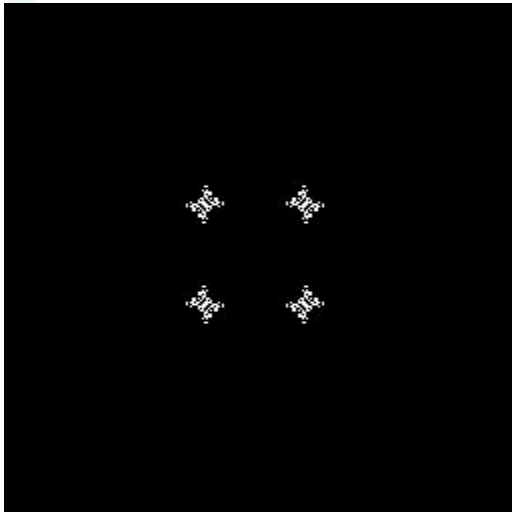
Клеточный автомат «Жизнь»

Джон Конвей (1970).

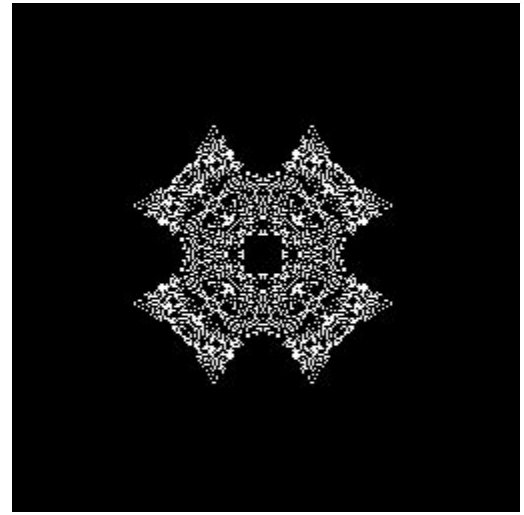
Множество правил :

- Клетка может находиться в двух состояниях: *пассивном* и *активном*.
- В качестве окрестности рассматривается 8 соседних клеток.
- Если в окрестности пассивной клетки ровно 2 активных, то данная клетка также становится активной («рождается»).
- Если в окрестности активной клетки 3 или более активных клеток, то она становится пассивной («умирает»).

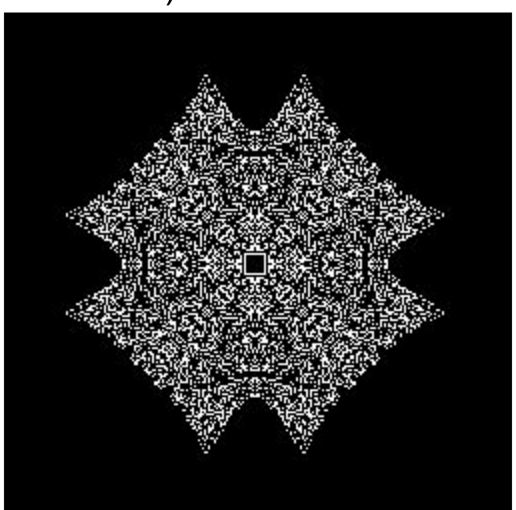
Клеточный автомат «Жизнь»



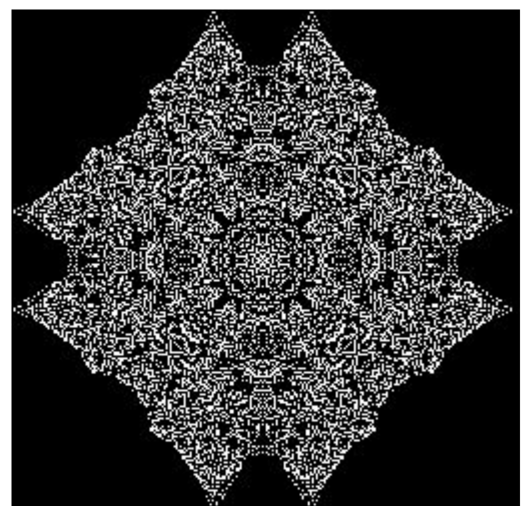
а) 10-ый такт



б) 40-ой такт



в) 70-ый такт

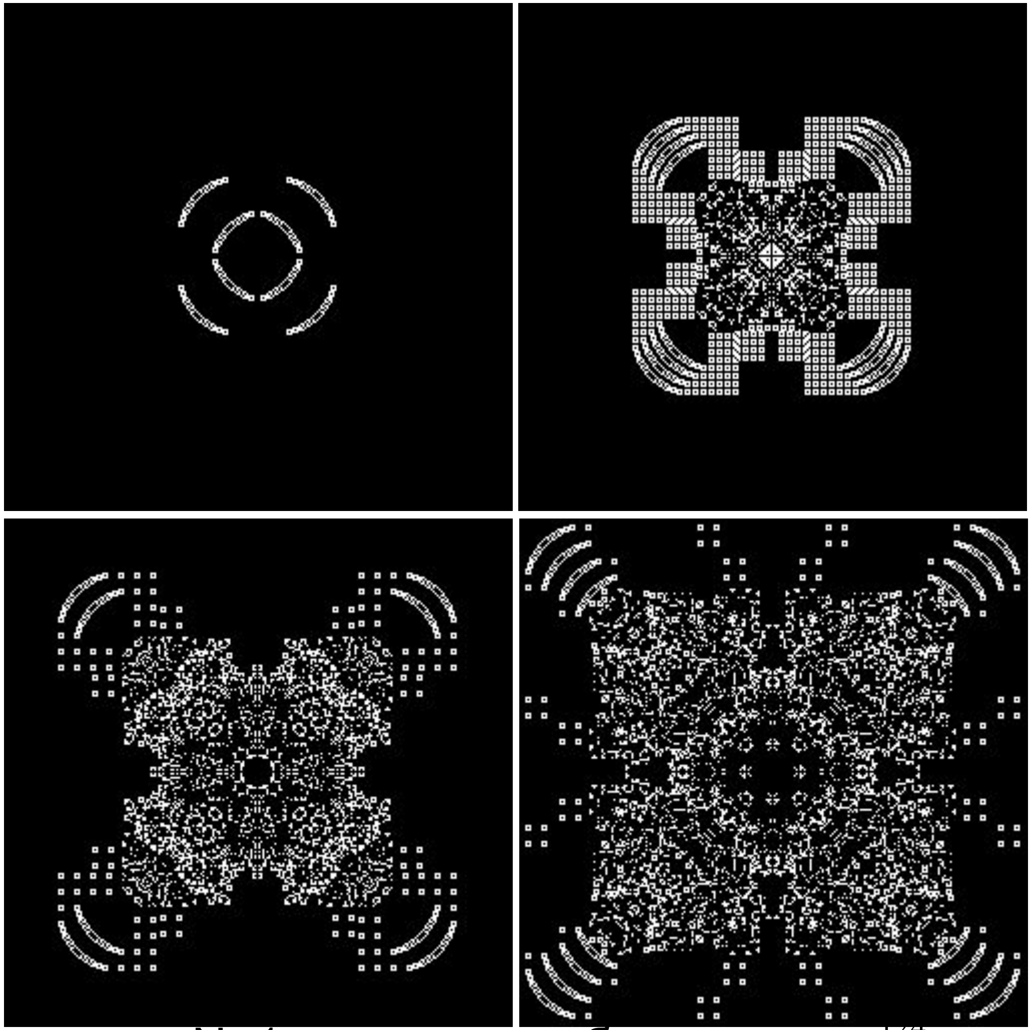


г) 100-ый такт

Модификации КА «Жизнь»

Рассмотрим КА, реализующий следующее множество правил:

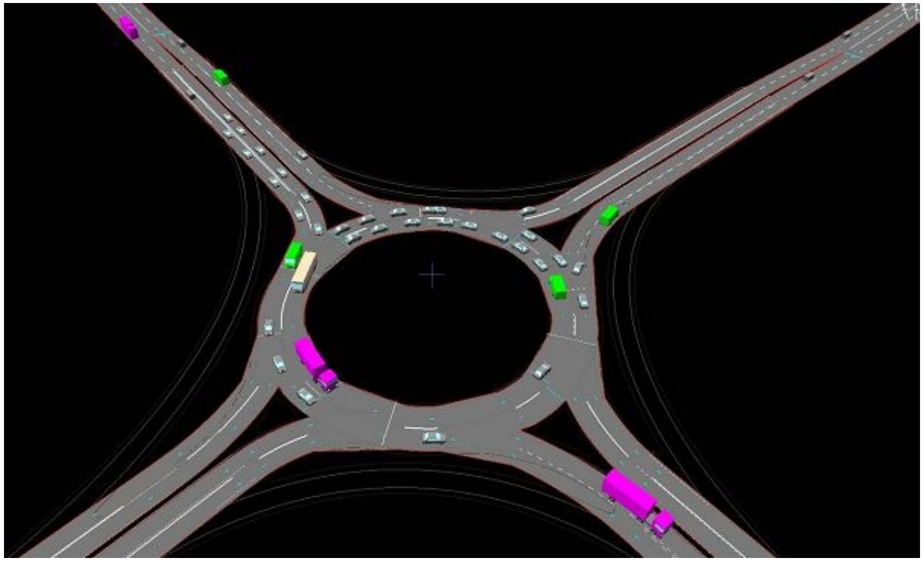
- Клетка может находиться в двух состояниях: пассивном и активном.
- В качестве окрестности рассматривается 8 соседних клеток.
- Клетка становится активной, если в ее окрестности находится ровно N активных клеток.
- Если число активных клеток в окрестности не равно N, то клетка становится пассивной.



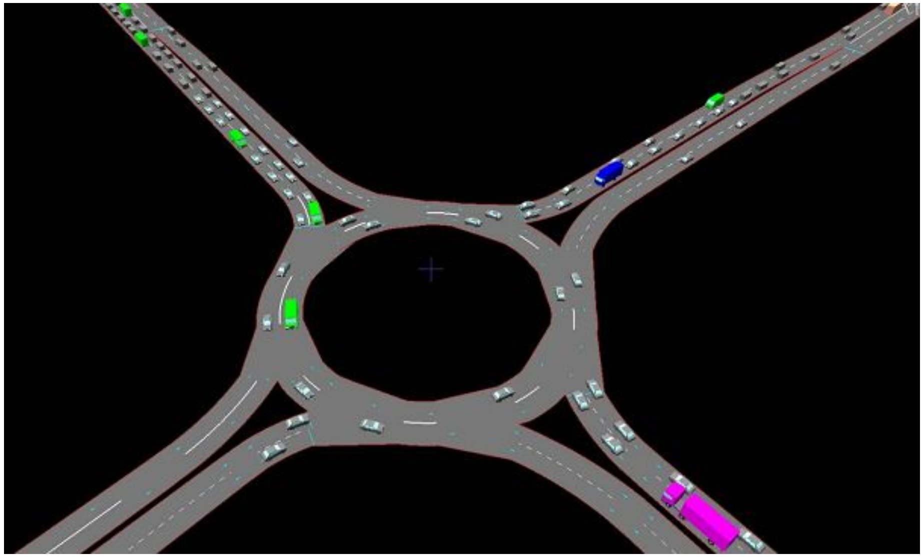
N=1; начальная область – круг

Применение клеточных автоматов

1. Моделирование транспортных потоков



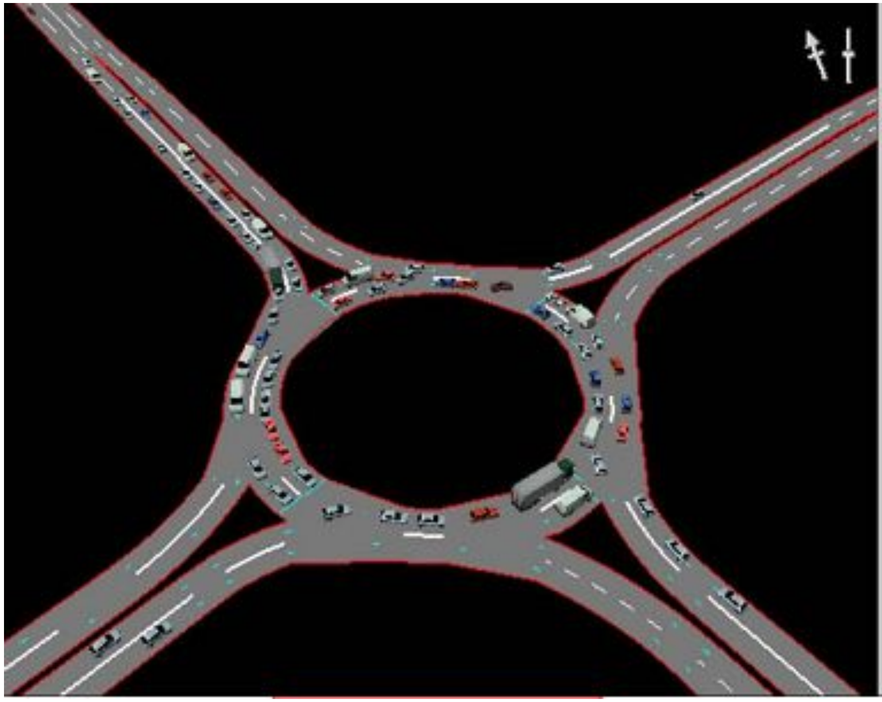
Модель российского типа



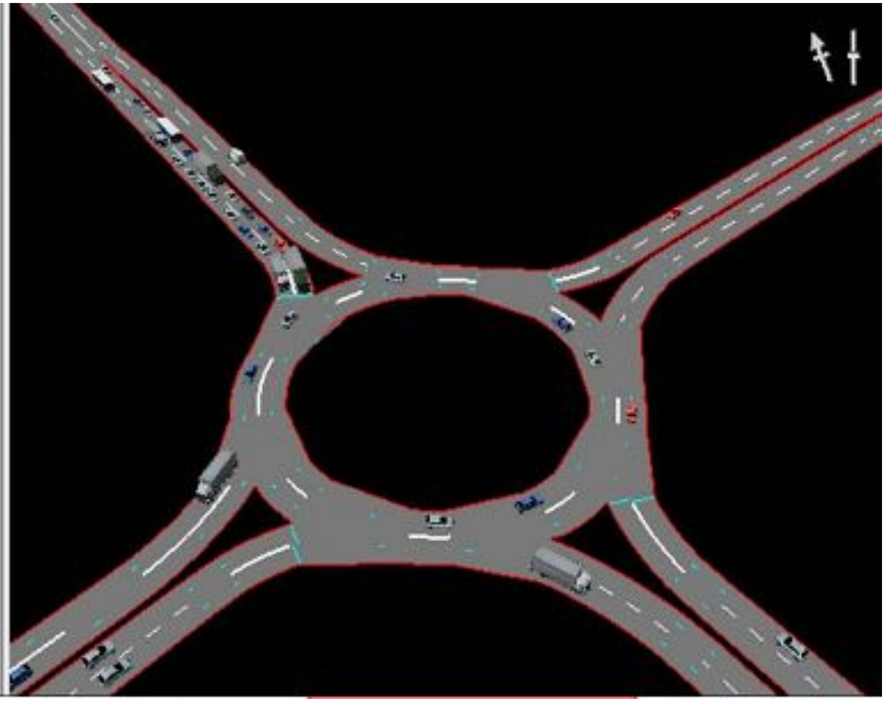
Модель европейского типа

Применение клеточных автоматов

1. Моделирование транспортных потоков



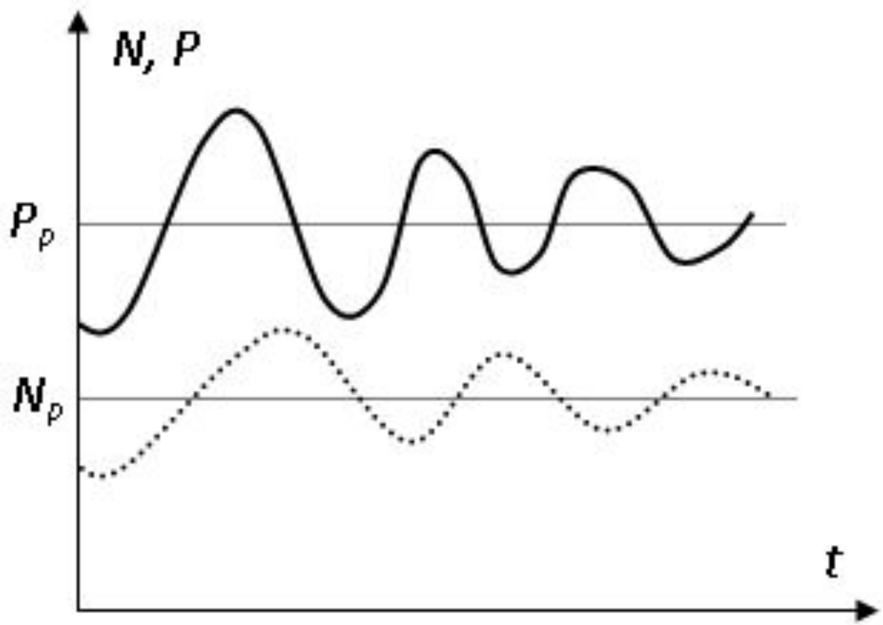
Модель российского типа

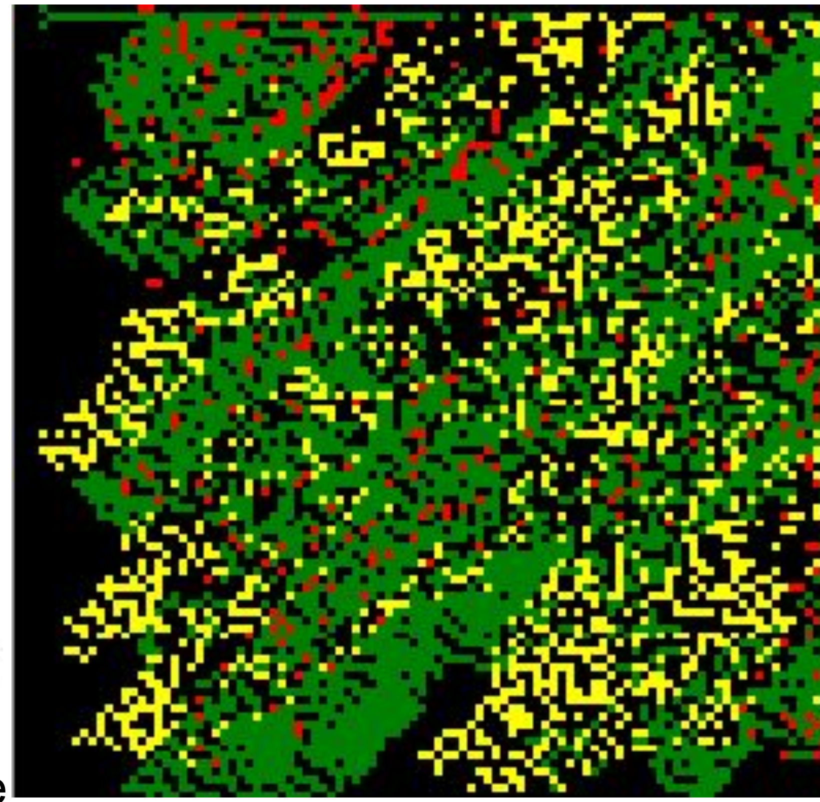


Модель европейского типа

Применение клеточных автоматов

2. Моделирование биологических систем

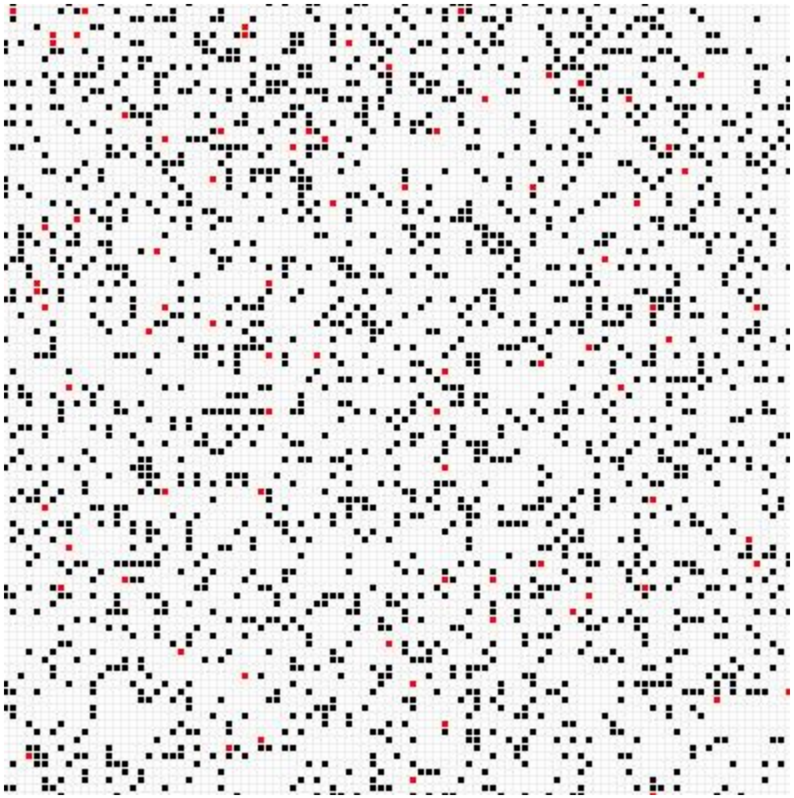


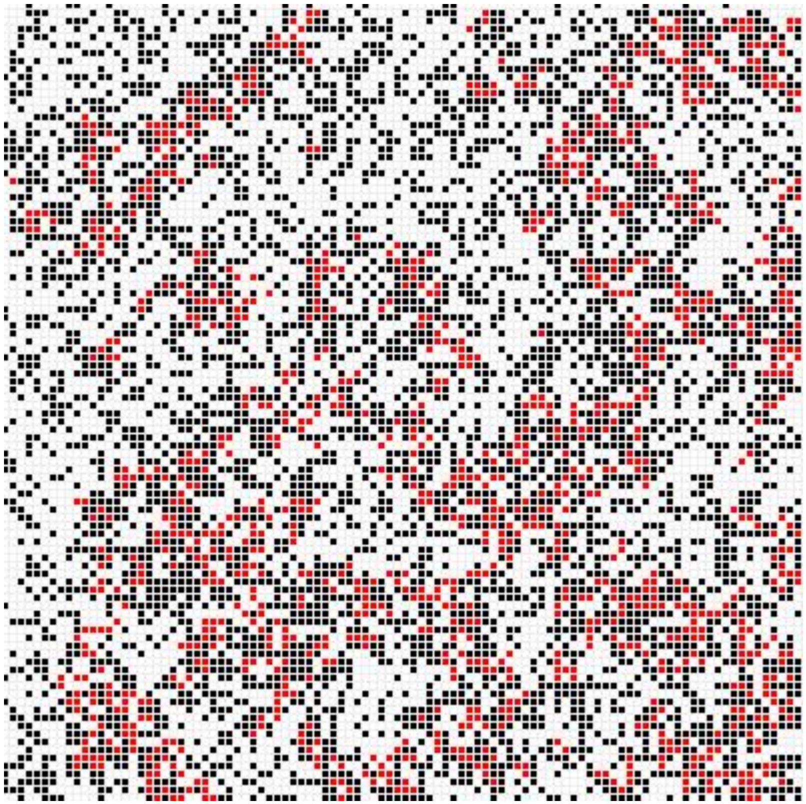


Характерные изменения численности хищников и жертв в замкнутой системе

Применение клеточных автоматов

2. Моделирование биологических систем. Распространение эпидемии

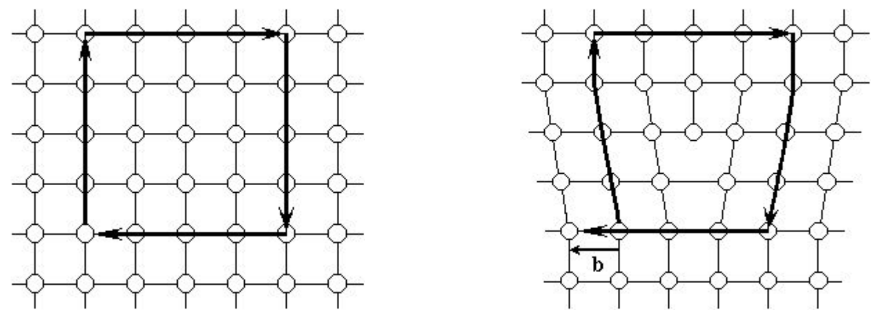




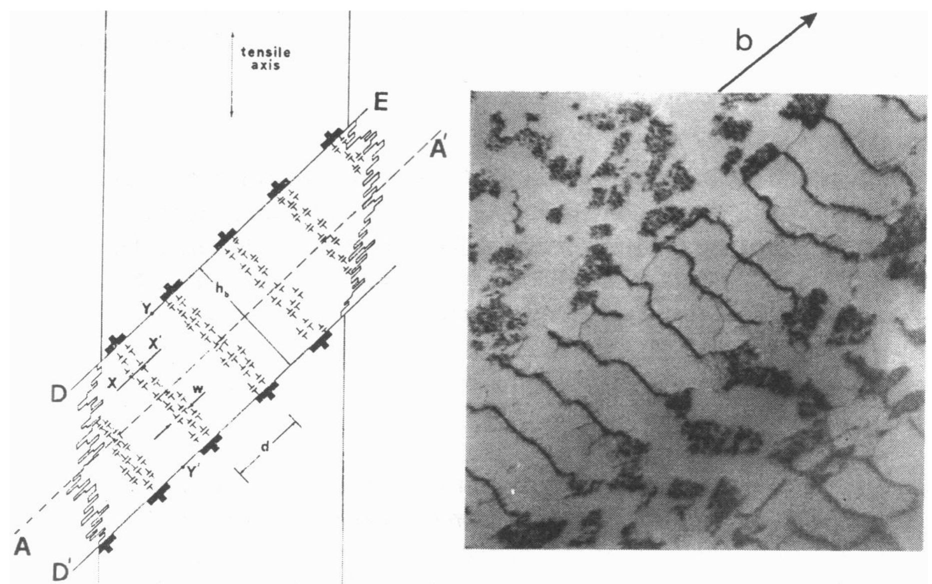
Применение клеточных автоматов

3. Моделирование деформирования металлов

«Крест» Людерса



Пример краевой дислокации в металле



Применение клеточных автоматов

3. Моделирование деформирования металлов