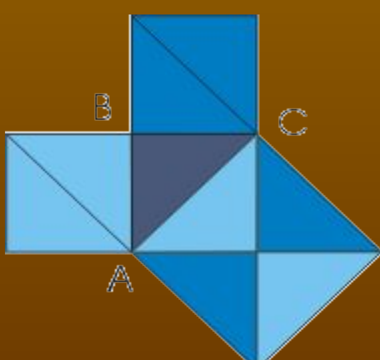
# ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

## Пифагоровы штаны Во все стороны равны




Чиркова Татьяна Викторовна
ГБОУ СОШ № 530
Учитель математики
Пушкинский район, Санкт-Петербург

# содержание

1. Введение
2. Основное содержание:
- Из биографии Пифагора.
- Пифагорейская школа.
- Теорема Пифагора и способы её доказательства:
- Простейшее доказательство.
- Доказательство Эйнштейна.
- Древнекитайское доказательство.
- Древнеиндийское доказательство.
- Доказательство Евклида.
- Алгебраическое доказательство.
- Векторное доказательство.
- Применение данной теоремы.
- Великие тайны теоремы.

3. Выводы.
4. Библиография

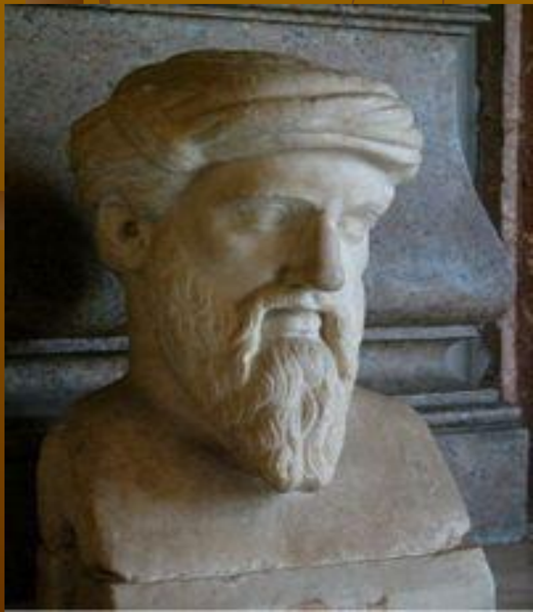
# Цели работы:

•посмотреть, в чем кроется популярность великого математика Пифагора;

•открыть тайны теоремы Пифагора через разбор истории теоремы;

•разобраться в разных способах доказательств теоремы;

• рассмотреть область ее применения.



# Задачи:

- изучить и проанализировать литературу по данному вопросу;
- познакомиться с биографией великого ученого;
- пронаблюдать за историей создания теоремы Пифагора;
- объяснить великие тайны теоремы Пифагора;
- рассмотреть разные способы доказательств теоремы Пифагора, ее применение.

# Методы исследования:

1. Изучить теоретические сведения по исследуемой проблеме.

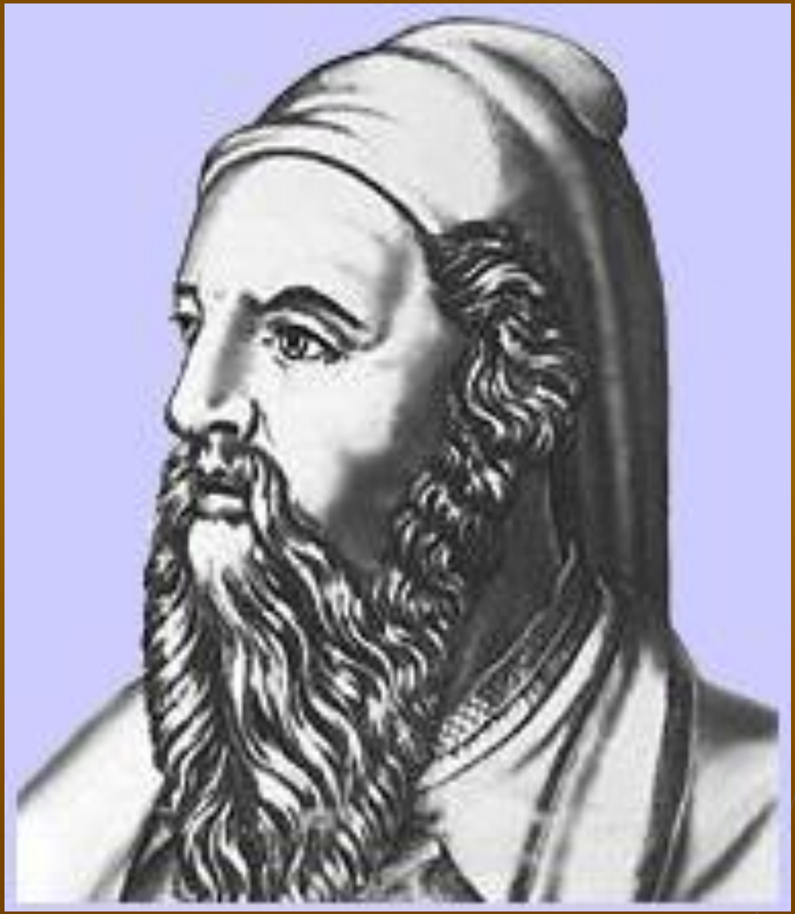
2. Сделать анализ литературных источников (книг).

3. Провести социологический опрос среди людей старшего поколения с целью выявить, какое количество доказательств знают не учёные и не исследователи данного вопроса, а обыкновенные люди.

*«Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них – это теорема Пифагора»*

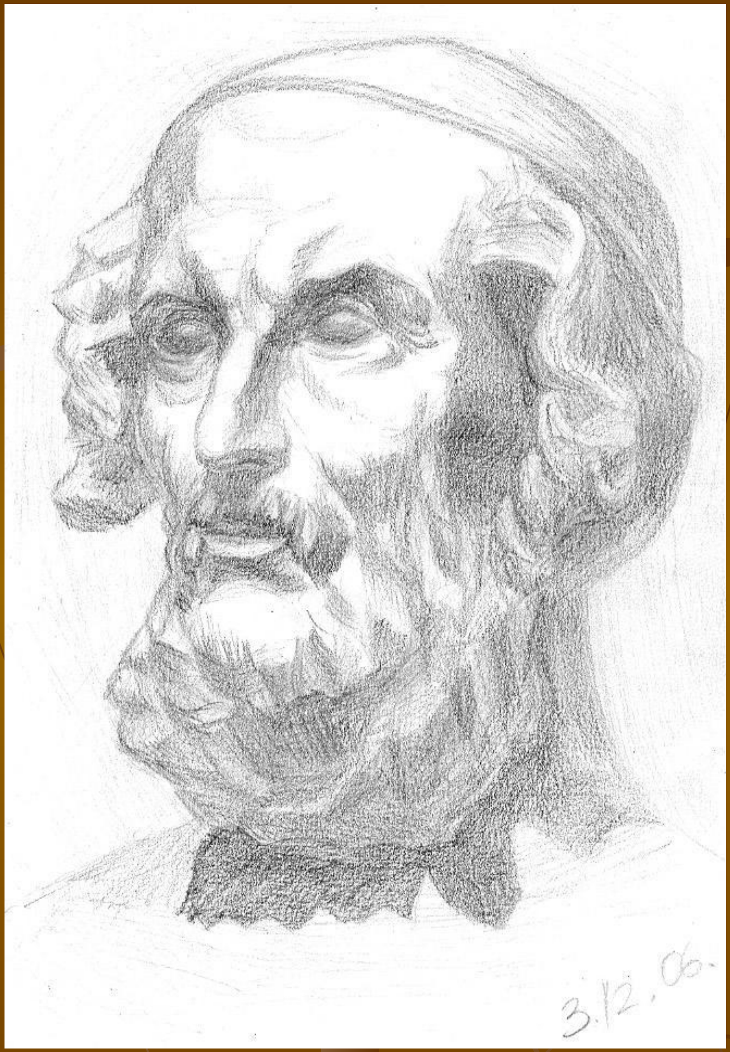
Иоганн Кеплер

# О великом Пифагоре



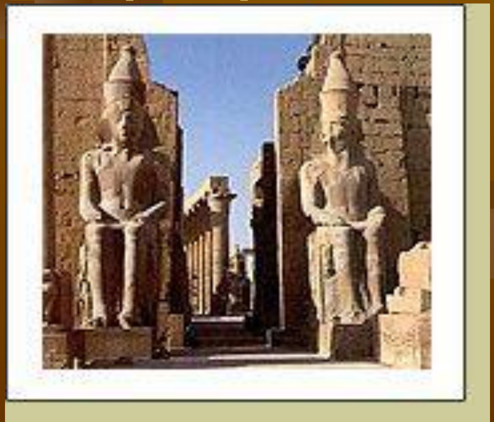
Великий ученый Пифагор родился в 570 г. до н.э. на острове Самосе. Отцом Пифагора был Мнесарх, резчик по драгоценным камням. Имя матери Пифагора не известно. По многим античным свидетельствам, родившийся мальчик был сказочно красив, а вскоре проявил и свои незаурядные способности.

Среди учителей юного Пифагора называет имена старца Гермодаманта и Ферекида Сиросского (хотя и нет твердой уверенности в том, что именно они были первыми учителями Пифагора). Целые дни проводил юный Пифагор у старца Гермодаманта, внимая мелодии кифары и гекзаметрам Гомера. Страсть к музыке и поэзии Пифагор сохранил на всю жизнь. И будучи признанным мудрецом, окруженным толпой учеников, Пифагор начинал день с песен Гомера.



Гомер

Ферекид был философом и считался основателем италийской школы философии. Таким образом, если Гермодамант ввел юного Пифагора в круг муз, то Ферекид обратил его ум к логосу. Он направил взор Пифагора к природе и в ней одной советовал видеть своего первого и главного учителя. Но как бы то ни было, неугомонному воображению юного Пифагора очень скоро стало тесно на маленьком Самосе, и он отправляется в Милет, где встречается с другим ученым - Фалесом. Фалес советует ему отправится за знаниями в Египет, что Пифагор и делает.

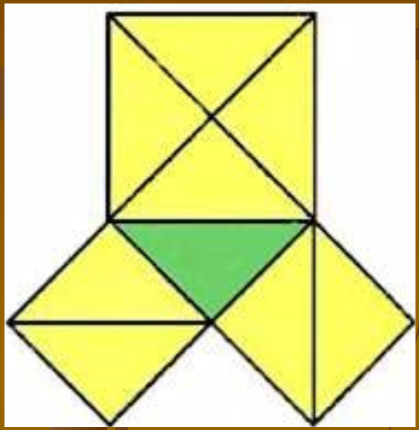


В 548 г. до н.э. Пифагор прибыл в Навкратис - самосскую колонию, где было у кого найти кров и пищу. Изучив язык и религию египтян, он уезжает в Мемфис. Несмотря на рекомендательное письмо фараона, хитроумные жрецы не спешили раскрывать Пифагору свои тайны, предлагая ему сложные испытания. Но влекомый жаждой к знаниям, Пифагор преодолел их все, хотя по данным раскопок египетские жрецы не многому могли его научить, т.к. в то время египетская геометрия была прикладной наукой (удовлетворявшей потребность того времени в счете и в измерении земельных участков). Поэтому, научившись всему, что дали ему жрецы, он, убежав от них, двинулся на родину в Элладу.

**Однако, проделав часть пути, Пифагор решился на сухопутное путешествие, во время которого его захватил в плен Камбиз, царь Вавилона, направлявшийся домой. Не стоит драматизировать жизнь Пифагора в Вавилоне, т.к. великий властитель Кир был терпим ко всем пленникам. Вавилонская математика была, бесспорно, более развитой (примером этому может служить позиционная система исчисления), чем египетская, и Пифагору было чему поучится. Но в 530 г. до н.э. Кир двинулся в поход против племен в Средней Азии. И, пользуясь переполохом в городе, Пифагор сбежал на Родину.**

# Вавилон. 500 г. до н.э

В чем же причина такой популярности «пифагоровых штанов»?



Знатоки утверждают, что причин здесь три:

б) красота,

а) простота,

в) значимость.

Формулировки теоремы Пифагора различны. Общепринятой считается следующая:

***«В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетовкатетов».***

Во времена Пифагора формулировка теоремы звучала так:

***«Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах».***

Доказательство теоремы считалось в кругах учащихся средних веков очень трудным и называлось:

*"Dons asinorum"* -

**«ослиный мост»**

или

*"elefuga"* -

**«бегство убогих»**

а сама теорема –

**«ветряной мельницей»,**

**«теоремой – бабочкой»**

или

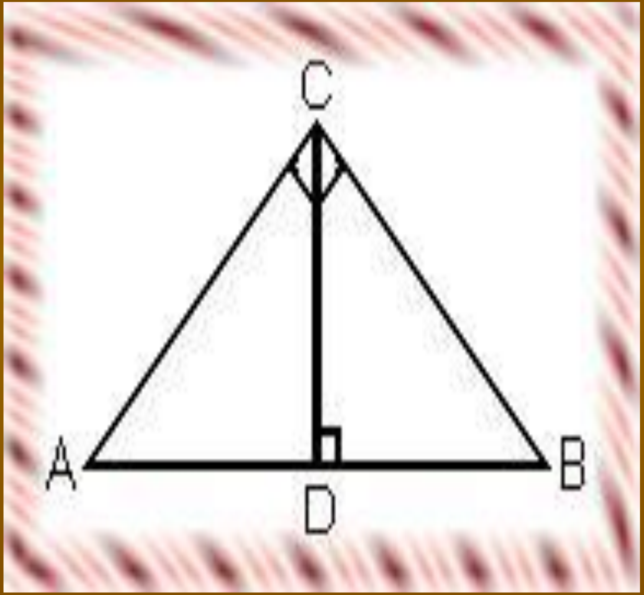
**«теоремой невесты»**

Сейчас известно около 150 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.)

# Различные способы доказательства теоремы

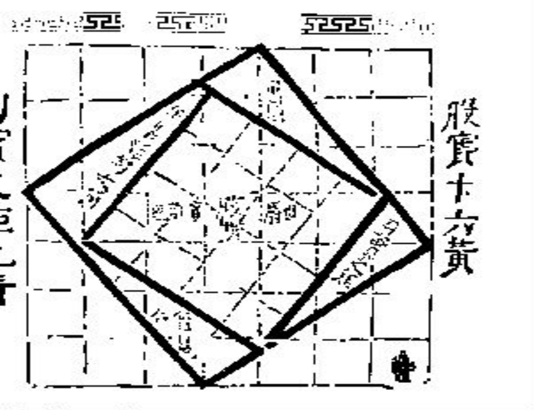
- ✔Доказательства, основанные на использовании понятия равновеликости фигур
- ✔Аддитивные доказательства (основаны на разложении квадратов, построенных на катетах, на фигуры, из которых можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе
- ✔Доказательства методом достроения
- ✔Алгебраический метод доказательства
- ✔И т.д.

# Алгебраическое доказательство



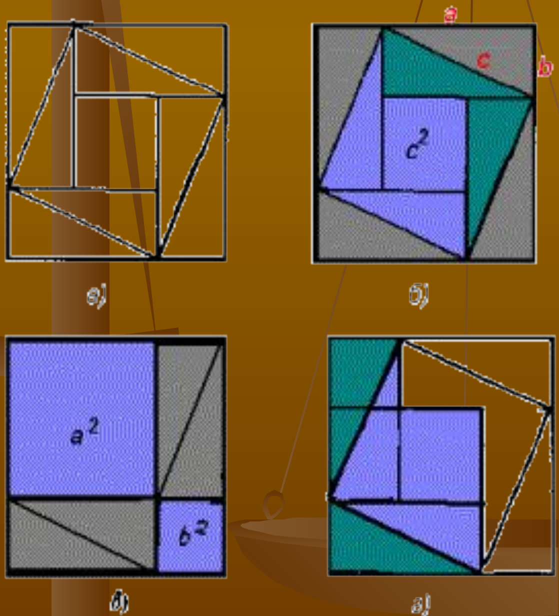

**Дано:** ***ABC***-прямоугольный треугольник
**Доказать:** $AB^2=AC^2+BC^2$
**Доказательство:**

1) Проведем высоту ***CD*** из вершины прямого угла ***C***.
2) По определению косинуса угла ***cosA=AD/AC=AC/AB***, отсюда следует ***$AB*AD=AC^2$.***
3) Аналогично ***cosB=BD/BC=BC/AB***, значит ***$AB*BD=BC^2$.***
4) Сложив полученные равенства почленно, получим:
***$AC^2+BC^2=AB*(AD + DB)$***
***$AB^2=AC^2+BC^2$.***



# Древнекитайское доказательство

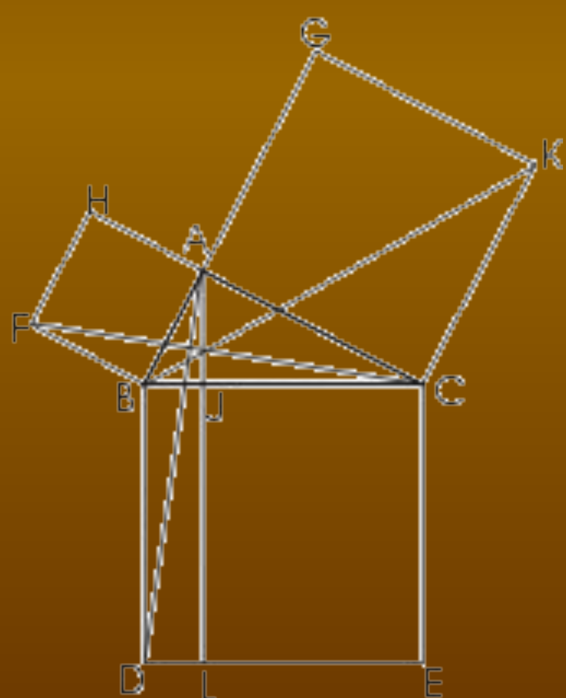
- В IX книге "Математики"- главном из сохранившихся математико-астрономических сочинений Древнего Китая- помещен чертеж (рис. а), доказывающий теорему Пифагора. Четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой c уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной $a+b$ внутренний - квадрат со стороной c, построенный на гипотенузе (рис. б). Если квадрат со стороной c вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. с), то ясно, что образовавшиеся пустота, с одной стороны, равна $c^2$, а с другой - $a^2+b^2$, т.е. $c^2=a^2+b^2$. Теорема доказана.



# Доказательство Евклида

Это доказательство было приведено Евклидом в его "Началах". По свидетельству Прокла (Византия), оно придумано самим Евклидом. Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал".

На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник JCEL - квадрату AGКС. Тогда сумма площадей квадратов на катетах будет равна площади квадрата на гипотенузе.




В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: FB = AB, BC = BD, а углы между ними равны как тупые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$S_{ABD} = 0{,}5 S_{BJLD}$,

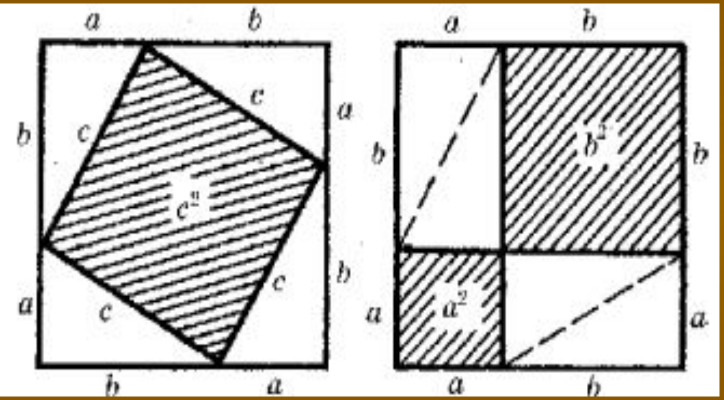
так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD. Аналогично $S_{FBC} = 0{,}5 S_{ABFH}$

(BF-общее основание, AB-общая высота). Отсюда, учитывая, что $S_{ABD} = S_{FBC}$, имеем $S_{BJLD} = S_{ABFH}$.

Аналогично, если вы проведёте отрезок AE используете равенство треугольников ВСК и АСЕ, то докажете, что $S_{JCEL} = S_{ACKG}$.

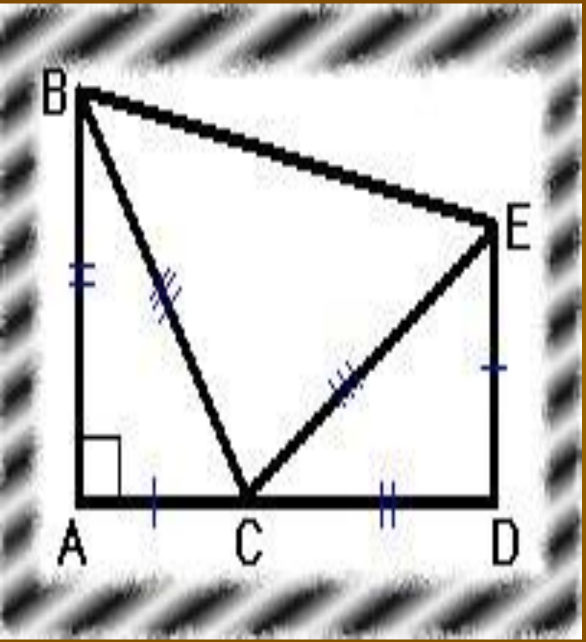
Итак, $S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{BCED}$, что и требовалось доказать.

# Древнеиндийское доказательство




Доказывая эту теорему просто говорили:- «Смотри!» Квадрат, сторона которого имеет длину а + в , можно разбить на части . Ясно, что невыделенные части на обоих рисунках одинаковы .

# Геометрическое доказательство




**Дано:** *ABC*-прямоугольный треугольник

**Доказать:** $BC^2=AB^2+AC^2$

**Доказательство:**

1) Построим отрезок *CD* равный отрезку *AB* на продолжении катета *AC* прямоугольного треугольника *ABC*. Затем опустим перпендикуляр *ED* к отрезку *AD*, равный отрезку *AC*, соединим точки *B* и *E*.

2) Площадь фигуры *ABED* можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED}=2*AB*AC/2+BC^2/2$$

3) Фигура *ABED* является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED}=(DE+AB)*AD/2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB*AC+BC^2/2=(DE+AB)(CD+AC)/2$$

$$AB*AC+BC^2/2=(AC+AB)2/2$$

$$AB*AC+BC^2/2=AC^2/2+AB^2/2+AB*AC$$

$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

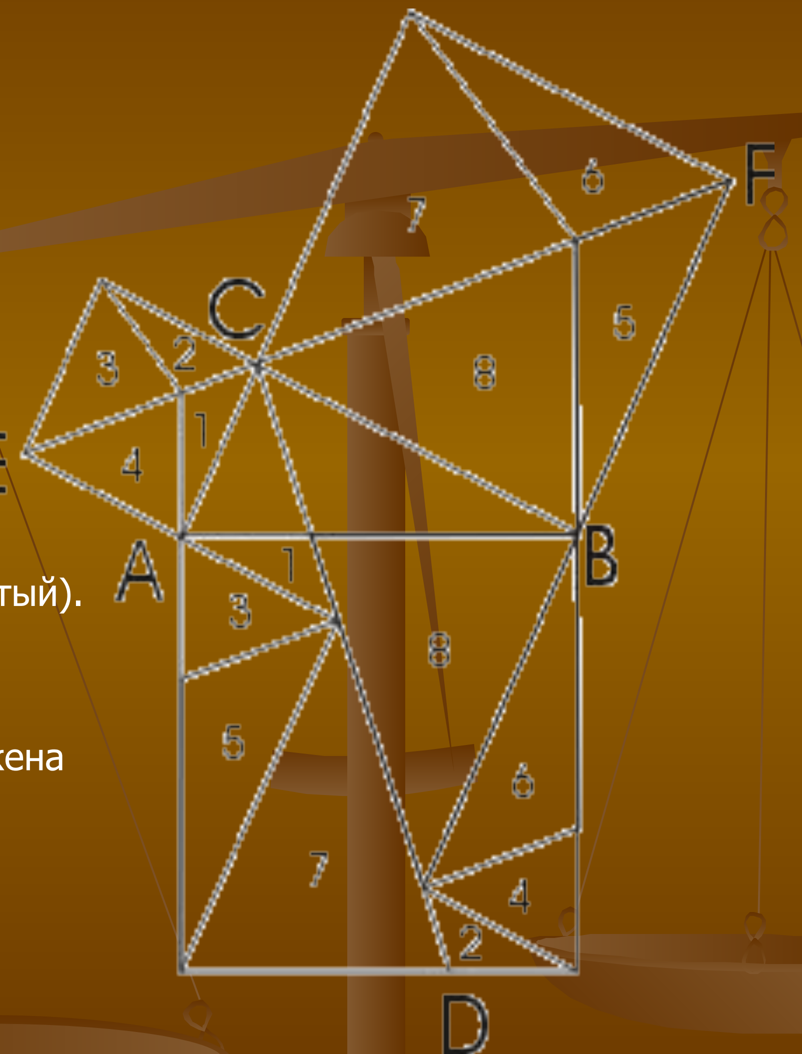
# Доказательство Эйнштейна

Точки E, C и F лежат на одной прямой;   это  следует из несложных расчётов градусной меры угла ECF (он развёрнутый).

CD проводим перпендикулярно   EF.

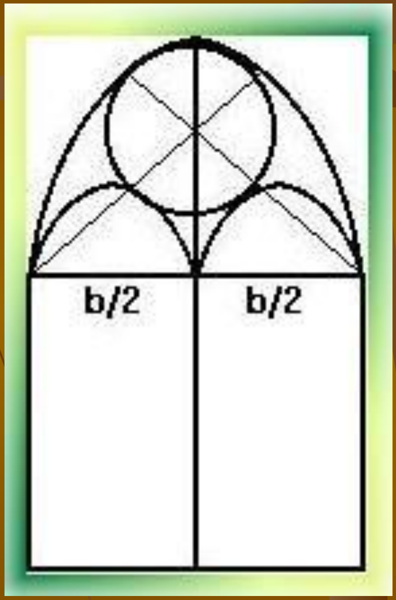
Продолжены вверх левая и правая стороны квадрата, построенного на гипотенузе,  до пересечения с EF; продолжена сторона  EA  до пересечения с CD.

Соответственно равные треугольники одинаково пронумерованы.



## Область применения.

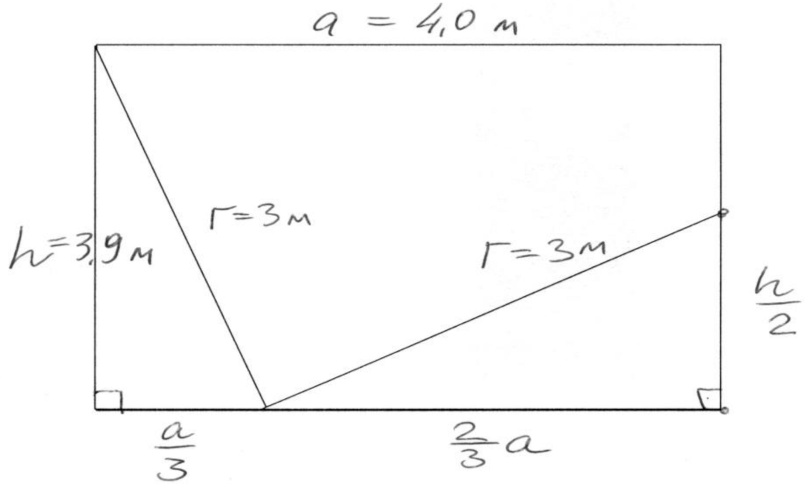
Теорема Пифагора всегда имела широкое применение при решении самых разнообразных геометрических задач.



- А прямой угол при геодезических измерениях отмечают на местности колышками с помощью верёвки. Если её разметить углами на местности размером 3, 4 и 5 метров и образовать из верёвки прямоугольный треугольник с соответственными длинами сторон, то он будет прямоугольным. Прямоугольные треугольники с целочисленными длинами сторон называются пифагоровыми треугольниками.

**Задача 5.10.**б)
Лестница стоит на полу в 2 раза ближе к одной стене, чем к противоположной ей. Приставленная к ближней стене, она упирается в потолок, а приставленная к более далёкой стене, она упирается в её середину. Длина лестницы равняется 3м. Чему равно расстояние между стенами и высота комнаты? ( a и h)

***Решение***.
Графически задача может быть представлена в виде 2 прямоугольных треугольников, вписанных в прямоугольник, которые приведены на рисунке. Гипотенузы у треугольников одинаковы и равны 3м.




Составим уравнения:

$$\begin{cases} h^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2=г^2 \\ \left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2=г^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2+\frac{a^2}{9}=9 \\ \frac{h^2}{4}+\frac{4}{9}a^2=9 \end{cases}$$

из 1 уравнения: $a^2=81-9h^2$

подставим в 2 ур $\frac{h^2}{4}+\frac{4}{9}(81-9h^2)=9,$

$$h^2+16(9-h^2)=36; \quad h^2+144-16h^2=36$$

$$15h^2=108; \quad h=\sqrt{\frac{108}{15}}=3,9\,м$$

$$a=\sqrt{81-9h^2}=\sqrt{81-9\cdot\frac{108}{15}}=\sqrt{81-64,8}=\sqrt{16,2}$$

$a=4,0$ м

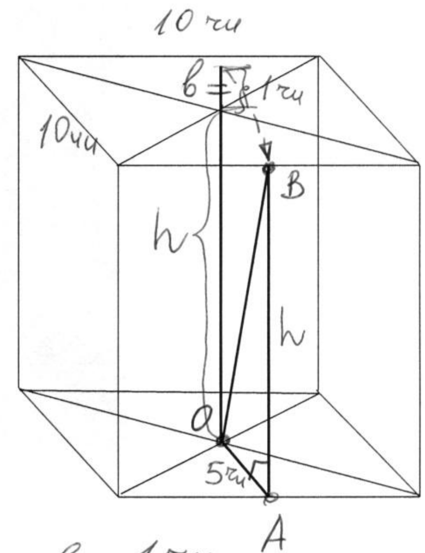
**Задача 5.11.**

Имеется квадратный водоем со стороной в один чжан. В центре его растет камыш, выступающий над водой на один чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. 1 чжан = 10 чи

Спрашивается, какова глубина водоёма и какова длина камыша? ($h$ и $l$)

***Решение***.

Графически задача может быть представлена в виде прямоугольного треугольника, вписанного в параллелепипед, которые приведены на рисунке.


Выступ камыша $b = 1$ чи

$OA = \frac{1}{2} \cdot 10$ чи $= 5b$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$(h+b)^2 = (5b)^2 + h^2$$

$$\cancel{h^2} + 2hb + b^2 = 25b^2 + \cancel{h^2}$$

$$2h\cancel{b} = 24b^{\cancel{2}}$$

$h = 12b$, $h = 12$ чи

$l = h + b = 12$ чи $+ 1$ чи $= 13$ чи

**Задача 5.10.**а)

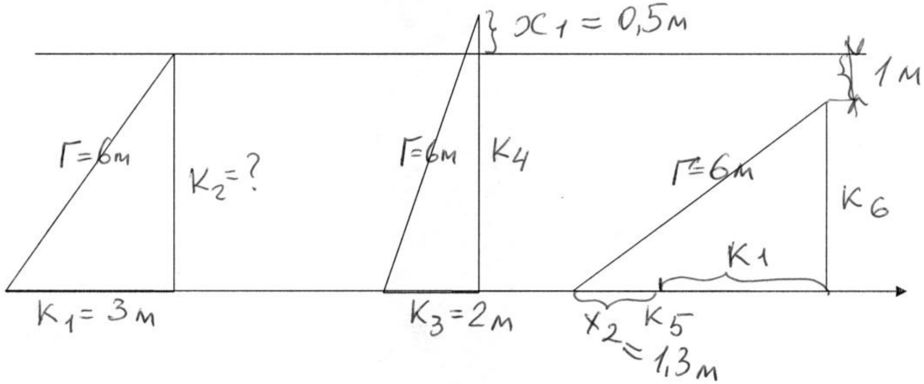
Лестницу длиной 6м, упирающуюся одним концом в стену, а другой конец которой отстоит от стены на 3м, пододвинули к стене на 1м.

На сколько её верхний конец стал выше? $- x_1$

На сколько её нужно отодвинуть, чтобы её верхний конец стал на 1м ниже? $- x_2$

***Решение***.

Графически задача может быть представлена в виде 3 прямоугольных треугольников приведенных на рисунке. Гипотенузы Г во всех треугольниках одинаковы и равны 6м.




Исходя из свойств прямоугольных треугольников на основании теоремы Пифагора можно записать:

$$Г^2 = К_1^2 + К_2^2, \text{ откуда } К_2^2 = Г^2 - К_1^2$$

$$K_2 = \sqrt{Г^2 - K_1^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 5,2$$

$$K_4 = \sqrt{Г^2 - K_3^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 5,7$$

$$x_1 = K_4 - K_2 = \sqrt{32} - \sqrt{27} = 5,7 - 5,2 = 0,5 \text{ м}$$

$$K_5 = \sqrt{Г^2 - K_6^2} \; ; \quad K_6 = K_2 - 1$$

$$x_2 = K_5 - K_1 = \sqrt{6^2 - (K_2-1)^2} - 3 =$$

$$= \sqrt{36 - (\sqrt{27}-1)^2} - 3 = \sqrt{36 - (5,2-1)^2} - 3 =$$

$$= \sqrt{36 - 4,2^2} - 3 = \sqrt{18,4} - 3 = 4,3 - 3 = 1,3 \text{м}$$

**Задача 5.14.**

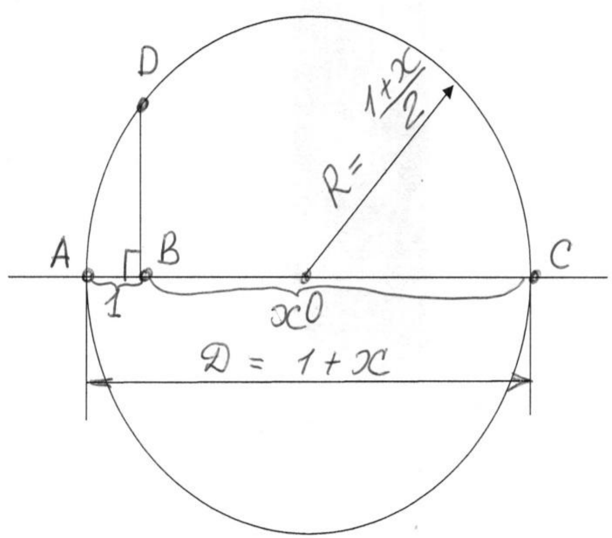
Придумать способ для построения циркулем и линейкой отрезка, длина которого равняется корню квадратному из любого заданного натурального числа, например 11.

***Решение***.

Графически задача может быть представлена в виде круга, диаметр которого равен сумме заданного числа и единицы. На диаметре круга из точки на единичном расстоянии от окружности возведем перпендикуляр до пересечения с окружностью.

Древним математикам было известно, что

$$BD = \sqrt{AB \cdot BC}\ ; \text{ если } AB = 1,\ \text{то } BD = \sqrt{BC}$$




$$BC = x$$

Длина перпендикуляра составляет значение квадратного корня из заданного числа.

$$BD = \sqrt{x},$$

$$\text{если } x = 11,\ \text{то } \sqrt{11} \approx 3{,}32$$

# Великие тайны теоремы:

***Первая тайна*** *заключается в таком множестве названий: «теорема бабочки», «т. невесты», «т. нимфы», « т. 100 быков», «бегство убогих», «мост ослов», «ветряная мельница». Думаю, что не найти другой теоремы, которая имела бы столько всевозможных названий!*

***Вторая тайна*** *– точно неустановленное количество доказательств знаменитой теоремы Пифагора Самосского. Именно по этому поводу я решила провести социологический опрос, который показал, что большинство людей старшего поколения согласны с существованием 250 доказательств, хотя мне из дополнительных источников известно, что существует более 350 доказательств этой теоремы, поэтому она даже попала в Книгу рекордов Гиннеса! Но, конечно же, принципиально различных идей в этих доказательствах используется сравнительно немного.*

***Третья тайна*** *– это то, что теорема Пифагора является сегодня символом математики.*

***Четвёртая тайна*** *– теорема Пифагора представляет нам богатейший материал для обобщения – важнейшего вида мыслительной деятельности, основы теоретического мышления, которым в совершенстве владеют многие учёные. Здесь можно добавить, что от теоремы Пифагора можно перейти к другим теоремам.*

***Пятая тайна*** *заключается в том, что некоторые исследователи приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводил в первой книге своих «Начал». С другой стороны, Прокл (математик V в.) утверждал, что доказательство в «Началах» принадлежало самому Евклиду. Но всё-таки сегодня способ доказательства Пифагора остаётся неизвестным.*

***Шестая тайна*** *– легенды о самом Пифагоре, человеке, который первым доказал эту теорему. Существует легенда, что когда Пифагор Самосский доказал свою теорему, он отблагодарил богов, принеся в жертву 100 быков. Также о гипнотических способностях учёного ходили легенды: будто он одним своим взглядом мог менять направление полёта птиц. А ещё рассказывали, что этого удивительного человека одновременно видели в разных городах, между которыми было несколько дней пути. И что ему якобы принадлежало «колесо  фортуны», вращая которое, он не только предсказывал будущее, но и вмешивался, если это было необходимо, в ход событий.*

# Выводы:

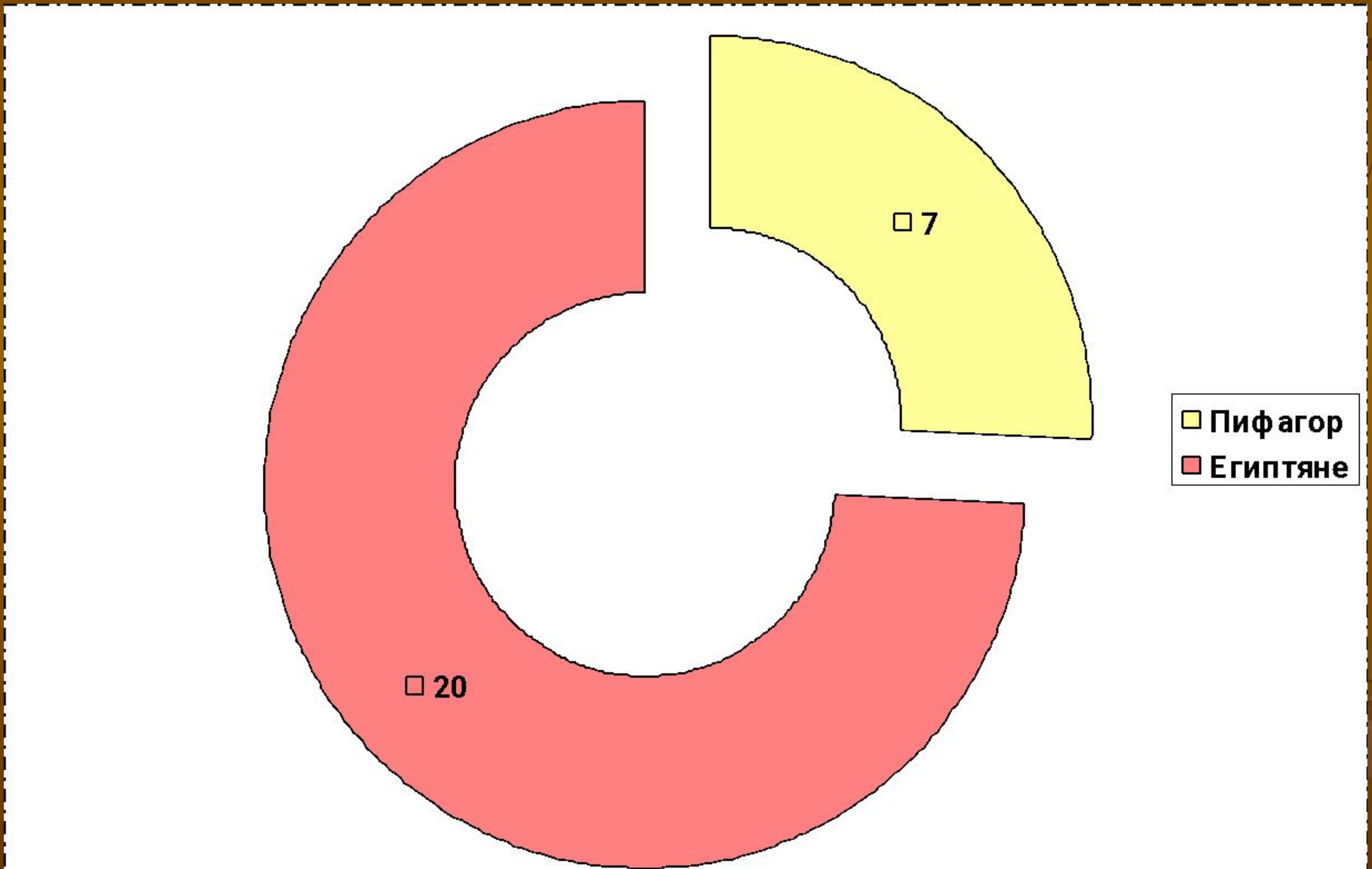
- Теорема Пифагора действительно занимает важное место в математике, с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии и решить множество не только математических  задач.
- В настоящее время всеобщее признание получило то, что успех развития многих областей науки и техники зависит от развития различных направлений математики. Так, например, на рынке мобильной связи идёт большая конкуренция среди операторов. Чем надёжнее связь, тем больше операторов. При строительстве вышки (антенны) часто приходится решать задачу об определении наибольшей высоты антенны, используя теорему Пифагора Самосского.   Это еще раз доказывает значимость данной теоремы.
- Прошло уже много лет с того момента, когда эта теорема была впервые открыта и доказана, но она до сих пор продолжает привлекать внимание многих исследователей, учёных, учеников…
- Вопрос о количестве доказательств теоремы Пифагора является сегодня довольно актуальным, именно поэтому я решила провести социологический опрос.

# Социологический опрос

- Социологический опрос проводился среди людей старшего поколения с целью выявить, какое количество доказательств знают не учёные и  не исследователи данного вопроса, а обыкновенные люди. А вот и результаты:

  **Вопрос 1:**
- На вопрос: «Кто был первым «открывателем» теоремы Пифагора: Пифагор Самосский или египтяне?»  ответили 27 человек, из которых большинство (20 человек) сказали, что первыми «открывателями» знаменитой теоремы были египтяне, остальные утверждали, что именно Пифагор Самосский открыл эту теорему. Эти данные говорят о том, что большинство людей всё-таки знают или догадываются, что Пифагор первым вывел доказательство этой теоремы, которая носит сегодня его имя, но не был 1 её «открывателем».

Кто был первым «открывателем теоремы» Пифагора:
Пифагор Самосский или египтяне?

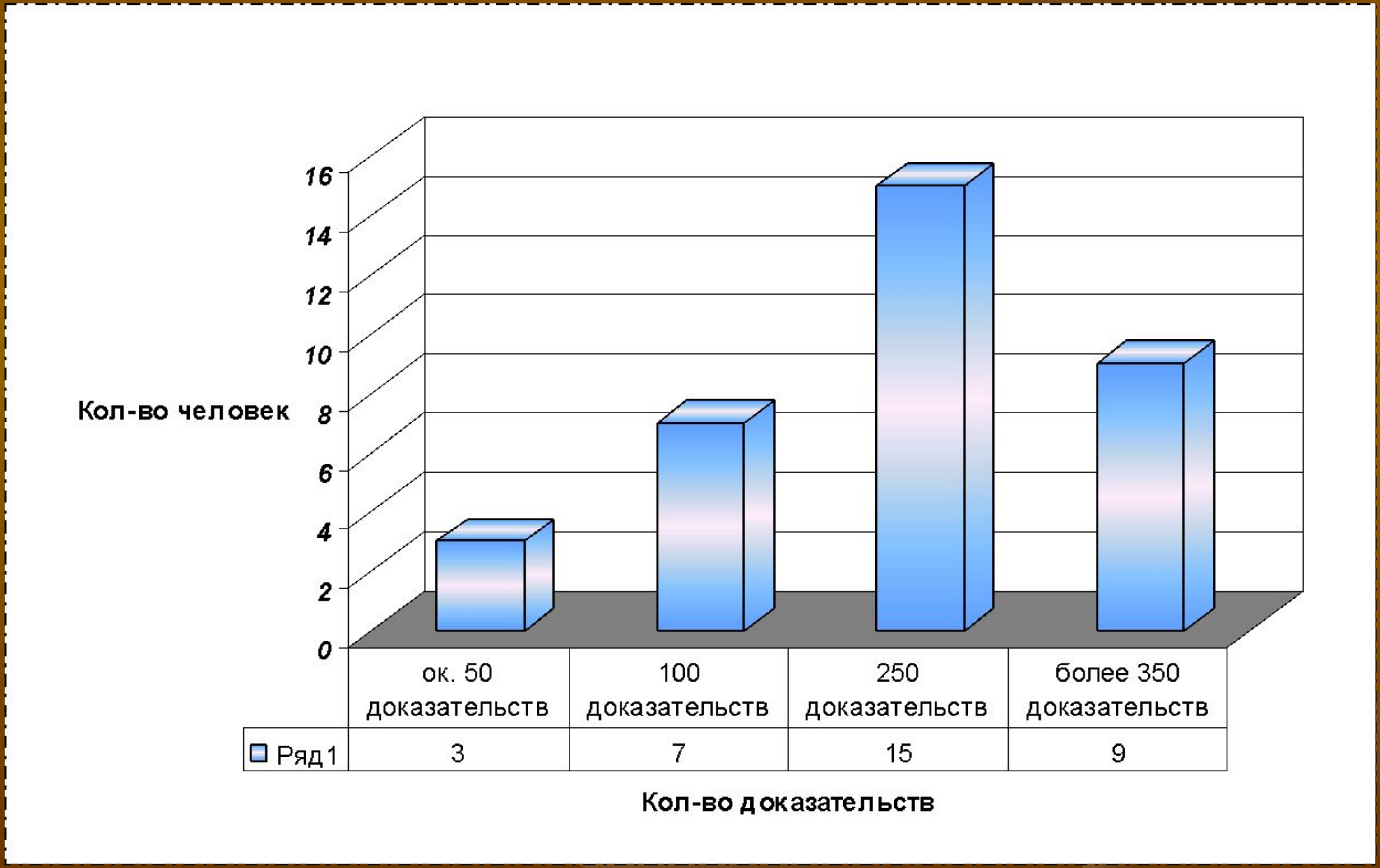


**Вопрос 2:**

- На второй мой вопрос: «Сколько существует доказательств теоремы Пифагора: ок. 50; 100; 250; более 350 доказательств?» ответили 34 человека. Из них большинство (15 человек) согласны с тем, что существует 250 доказательств теоремы Пифагора, меньшинство (3 человека) сказали, что на сегодняшний день известно всего лишь 50 доказательств, и только 9 человек правильно ответили на мой вопрос, сказав, что сегодня известно более 350 доказательств этой теоремы. Исходя из полученной информации, можно сделать вывод о том, что людям старшего поколения не известно точное количество доказательств теоремы Пифагора Самосского: может быть, их это не интересует, хотя мне кажется, что такая известная теорема должна особенно привлекать внимание населения.

Сколько существует доказательств теоремы

Пифагора: ок. 50; 100; 250; более 350 доказательств?



# Библиография


- Волошин А.В. Пифагор. – М.: Просвещение, 1993.
- Газета «Математика», № 21, 2006.
- Газета «Математика», № 28, 1995.
- Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – X кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983.
- Еленьский Щ. По следам Пифагора. М., 1961.
- Литурман В. Теорема Пифагора. – М., 1960.
- Пельтуер А. Кто вы Пифагор? – М.: Знание – сила, № 12, 1994.
- Перельман Я. И. Занимательная математика. – М.: «Наука», 1976.
- Пономарёва Т.Д. Великие учёные. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.
- Свешникова А. Путешествие в историю математики. – М., 1995.
- Смышляев В.К. О математике и математиках. – Марийское книжное издательство, 1977.
- Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика. /Глав. Ред. М.Д. Аксёнова. – М.: Аванта +, 2001.
- Энциклопедический словарь юного математика. Сост. А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.