ТРИ ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(ЧАСТЬ 6)

Л. А. Янкина, канд. пед. наук,

доцент кафедры методики начального образования

Деление целых неотрицательных чисел

Аксиоматический подход

Частным натуральных чисел *a* и *b* называется натуральное число *c = a : b*, удовлетворяющее условию *b · c = a*

$$c = a : b \Leftrightarrow b \cdot c = a$$

Действие, с помощью которого находится частное, называется делением.

<u>Это действие обратное умножению</u>

делимое

$$a : b = c$$

частное

делитель

Примеры:

18 : 3 = 6, так как $3 \cdot 6 = 18$

35 : 5 = 7, так как $5 \cdot 7 = 35$

Теоретико-множественный подход

Выделяют <u>два типа задач на деление</u>.

<u>Деление по содержанию</u>

Множество М, состоящее из *a* элементов требуется разбить на <u>попарно непересекающиеся подмножества</u> так, чтобы в каждом подмножестве было *b* элементов. Найти число таких подмножеств.

***<u>Определение 1</u>*. Если множество М, состоящее из *a* элементов, разбито на <u>попарно непересекающиеся подмножества</u> так, что в каждом подмножестве *b* элементов, то <u>число таких подмножеств есть частное чисел *a* и *b*</u>**

Деление на части

Множество М, состоящее из *a* элементов, требуется разбить на *b* попарно непересекающихся равномощных подмножества. Найти число элементов в каждом подмножестве.

Определение 2*. Если множество М, состоящее из *a* элементов, разбито на *b* попарно непересекающихся равномощных подмножества, то число элементов в каждом подмножестве есть частное чисел *a* и *b

Действие, с помощью которого находится частное, называется делением.

Это действие обратное умножению

Пример: Объясните, почему следующие задачи решаются делением

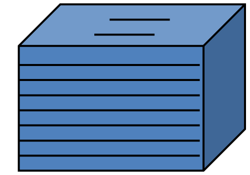
1) 12 тетрадей раздали 4 ученикам поровну. Сколько тетрадей получил каждый?

A – множество тетрадей, $n(A) = 12$

Множество A разбили на 4 ***равномощных непересекающихся подмножества***:

$$A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4, \; A_i \subset A, \; i = 1, \ldots, 4 \quad n(A_i) = ?$$

Число элементов в каждом подмножестве – это частное чисел 12 и 4: 12 : 4 = 3 (т.)



4

$$12 : 4 = 3$$

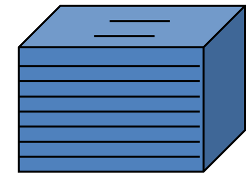
2) 12 тетрадей раздали ученикам по 4 тетради каждому. Сколько учеников получили тетради?

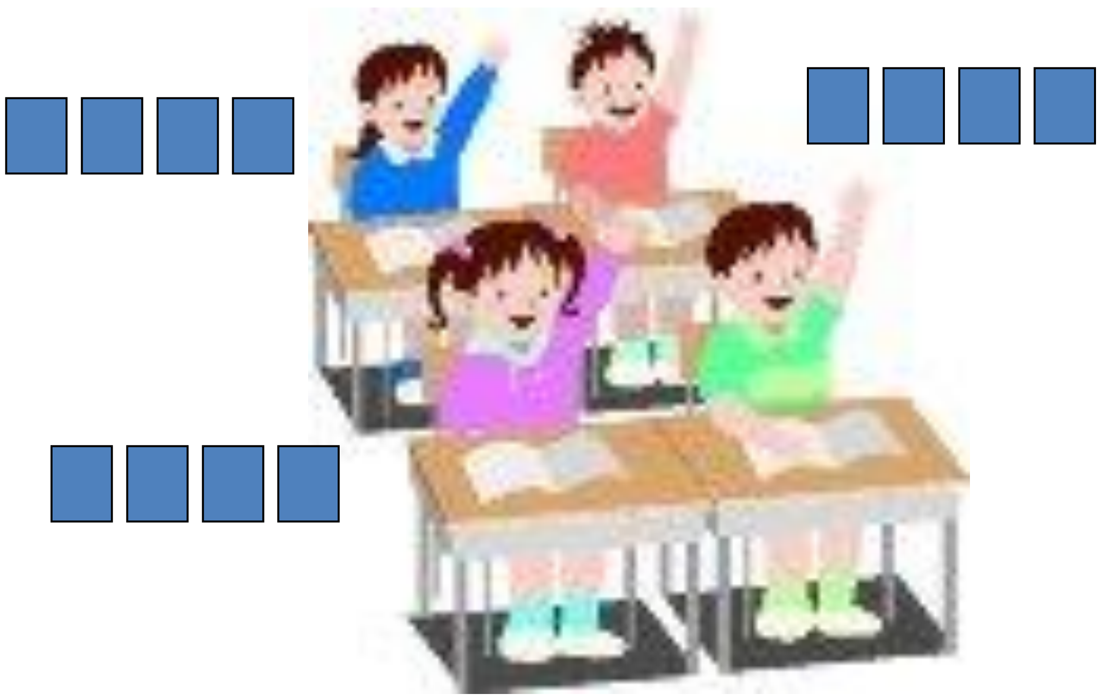
A – множество тетрадей, $n(A) = 12$

Множество A разбили на *<u>непересекающиеся подмножества</u>* по 4 элемента в каждом:

$$A_1 \sim A_2 \sim \dots,\ A_i \subset A,\quad n(A_i) = 4,\quad i = 1, \dots, ?$$

Число таких подмножеств – это частное чисел 12 и 4:   12 : 4 = 3 (у.)





$$12 : 4 = 3$$

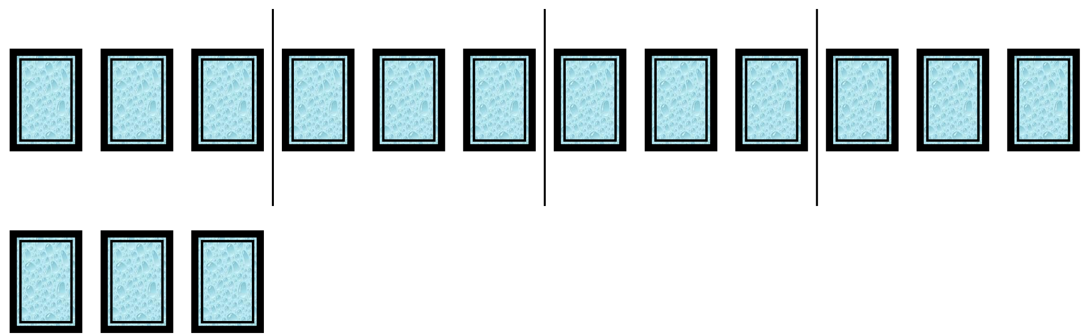
3) **У Коли было 12 марок, а у Миши в 4 раза меньше. Сколько марок было у Миши?**

A – множество марок Коли, n(A) = 12

B – множество марок Миши, n(B) = ?

A

B



Множество A разбили на 4 *<u>равномощных непересекающихся подмножества</u>*. Множество B равномощно каждому такому подмножеству.

Число элементов в каждом подмножестве, т. е. число элементов в множестве B – это частное чисел 12 и 4:

12 : 4 = 3 (м.)

4) У Коли было 12 марок, это в 4 раза больше, чем у Миши. Сколько марок было у Миши?

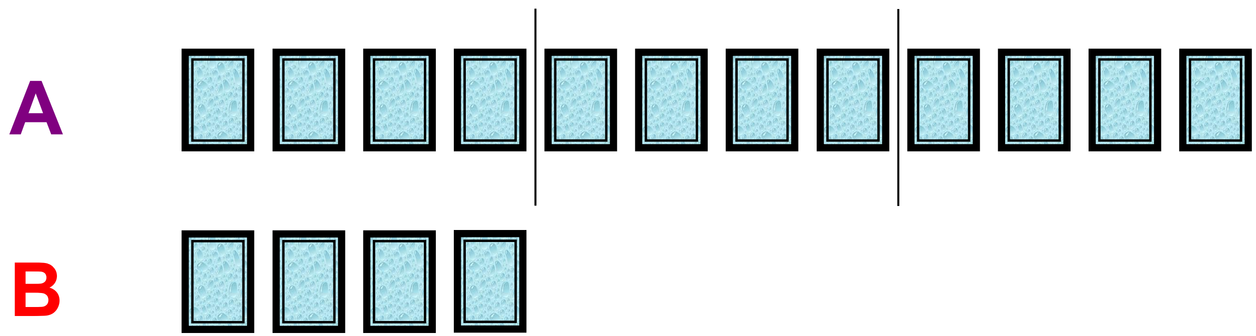
***Переформулируем задачу*:**

У Миши марок в 4 раза меньше, чем у Коли ⇒ задача 3

5) **У Коли было 12 марок, а у Миши 4 марки. Во сколько раз у Коли марок больше, чем у Миши?**

A – множество марок Коли, $n(A) = 12$

B – множество марок Миши, $n(B) = 4$

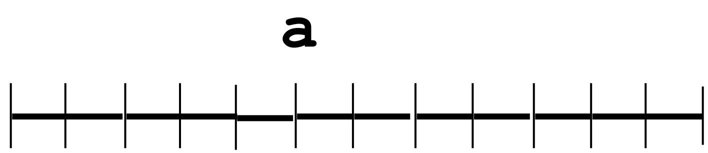


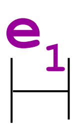
Множество A разбили на *__непересекающиеся подмножества, равномощные множеству__* B.

Число таких подмножеств – это частное чисел 12 и 4:

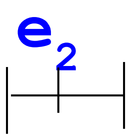
$12 : 4 = 3$ (р.)

Натуральное число как результат измерения величин



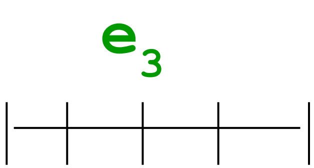


$m_{e1}(a) = 12$ или $a = 12\ e_1$



$m_{e2}(a) = 6$ или $a = 6\ e_2$

$e_2 = 2e_1$



$m_{e3}(a) = 3$ или $a = 3\ e_3$

$e_3 = 4e_1$

Если отрезок a состоит из p отрезков длины e, а отрезок e_1 состоит из q отрезков, равных e, то мера отрезка a при единице длины e_1 будет равна $p : q$

$$a = pe,\ e_1 = qe \Rightarrow e = (1:q)e_1 \Rightarrow a = p\cdot(1:q)e_1 = (p:q)e_1$$

Деление натуральных чисел отражает переход к новой (<u>более крупной</u>) единице длины

<u>Пример 1:</u> Объяснить, почему следующая задача решается делением:

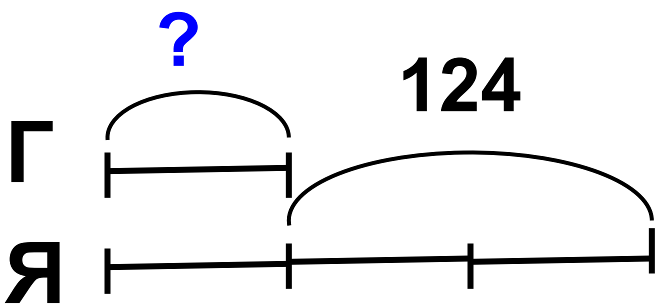
«12 кг варенья надо разложить в банки, по 3 кг в каждую. Сколько банок потребуется?»

a – масса варенья, e – 1 кг, e_1 – 1 банка

$a = 12e$, $e_1 = 3e \Rightarrow e = (1:3)e_1$ $a = 12 \cdot (1:3)e_1 = (12:3)e_1 = 4e_1$

12 : 3 = 4 (б.)

<u>Пример 2</u>: Груш собрали на 124 килограмма меньше, чем яблок. Яблок собрали в 3 раза больше, чем груш. Сколько собрали груш?



1) 3 – 1 = 2 (ч.) – приходится на 124 кг,

2) 124 : 2 = 62 (кг) – груш собрали

Ответ: 62 кг.

Теорема о существовании и единственности частного

Для того чтобы <u>существовало</u> частное чисел a и b необходимо, чтобы $b \leq a$:

$$\exists\ c = a : b \Rightarrow b \leq a$$

Если частное чисел a и b существует, то оно <u>единственно</u>

Свойства деления

Правило деления суммы на число

$$a \ \square \ c \wedge b \ \square \ c \Rightarrow (a + b) : c = a : c + b : c$$

Правило деления разности на число

$$a \ \square \ c \wedge b \ \square \ c \Rightarrow (a - b) : c = a : c - b : c$$

Правило деления произведения на число

$$a \ \square \ c \Rightarrow (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

$$b \ \square \ c \Rightarrow (a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$$

Правило деления числа на произведение

$$a : (b \cdot c) = a : b : c$$

В курсе математики начальной школы

1) Вычисли удобным способом:

а) $\underbrace{370 : 2 : 5 = 370}_{\text{правило деления числа на произвед.}} : (2 \cdot 5) = 370 : 10 = 37$

б) $376 : 4 = \underbrace{376 : (2 \cdot 2) = 376}_{\text{правило деления числа на произвед.}} : 2 : 2 = 188 : 2 = 94$

в) $376 : 4 = (360 + 1\underbrace{6) : 4 = 360:4 +}_{\text{правило деления суммы на число}} 16:4 = 94$

г) $376 : 4 = (400 – \underbrace{24) : 4 = 400:4 -}_{\text{правило деления разности на число}} 24:4 = 94$

2) Какие числа нужно вставить в «окошки», чтобы получить верные равенства?

(18 + □) : 3 = □ + 24 : 3

(□ – □) : 5 = 9 – 7

3) Запиши цифры в «окошки», чтобы получились верные равенства?

(3□ + 3□) : □ = 7 + 6

(3□ – 2□) : 4 = □ – □

4) **Реши задачу разными способами. Какой закон (правило) является обобщением различных способов решения задачи?**

а) ***В упаковке 36 штук витаминов. В день можно принимать 2 штуки. На сколько дней хватит 3 упаковки витаминов?***

1 способ

$(36 \cdot 3) : 2 = 108 : 2 = 54$ (д.)

2 способ

$(36 : 2) \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54$ (д.)

$$(36 \cdot 3) : 2 = (36 : 2) \cdot 3$$

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

б) *Магазин продал 17 лотков хлеба и выручил 8500 руб. Сколько стоит один батон, если в лотке умещается 20 батонов?*

1 способ

$8500 : (20 \cdot 17) = 8500 : 340 = 25$ (руб.)

2 способ

$(8500 : 17) : 20 = 500 : 20 = 25$ (руб.)

$$8500 : (20 \cdot 17) = (8500 : 17) : 20$$

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad a : (b \cdot c) = (a : b) \cdot c$$

Деление
с остатком

Разделить с остатком натуральное число a на натуральное число b – значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + r$, причем $0 \le r < b$

неполное частное

делимое

$$a = b \cdot q + r$$

делитель

остаток

Теорема

Для любых двух натуральных чисел a и b существуют целые неотрицательные числа q и r, такие, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < b$. Другой пары целых неотрицательных чисел (q, r) с тем же свойством не существует

В курсе математики начальной школы

1) Выполни деление с остатком и проверь:

85 : 15

85 : 15 = 5 (ост. 10)

<u>Проверка</u>: 10 < 15, 15 · 5 + 10 = 85

2) Запиши три числа, при делении которых на 7 в остатке получится 5; 3.

$a = 7 \cdot q + 5$ $\qquad$ $a = 7 \cdot q + 3$

3) Выйдет ли квадратная проволочная рамка со стороной 7 см из треугольной рамки, каждая сторона которой равна 9 см?

1) $9 \cdot 3 = 27$ (см) – периметр треугольной рамки

2) $7 \cdot 4 = 28$ (см) – периметр квадратной рамки

3) $27 < 28$ – квадратной рамки не выйдет

4) Вставь в «окошки» пропущенные числа:

а) 88 : 26 = 3 (ост. □)   б) □ : 15 = 6 (ост. 8)

в) 35 : □ = 4 (ост. 3)

а) 88 - 26 · 3 = 10

б) 15 · 6 + 8 = 98

в) (35 – 3) : 4 = 8

5) Двум ученикам нужно разделить одно и то же число: первому на 14, а второму на 17. У первого получилось в частном 20 и в остатке 9. Какой ответ получил второй?

$$a = b \cdot q + r$$

$$a = 14 \cdot 20 + 9 \Rightarrow \quad a = 289 \Rightarrow$$

$$289 = 17 \cdot q + r \Rightarrow \quad q = 17, r = 0$$

Спасибо за внимание!