

Аттестационная работа

Слушателя курсов повышения квалификации по программе:

«Проектная и исследовательская деятельность как способ формирования метапредметных результатов обучения в условиях реализации ФГОС»

Сумароковой Лилии Зуфаровны

учителя математики

Государственного образовательного учреждения

«Коми республиканский физико-математический лицей-интернат»

На тему:

Программа курса

Математическая логика

Актуальность

Как сказано в концепции современного математического образования: «Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе».

В обязательный минимум содержания основных образовательных программ по математике согласно ФГОС входят элементы логики и теории множеств: строение математической теоремы, доказательство от противного, операции над множествами, диаграммы Эйлера. Вопрос о строении математической теоремы и метод доказательства от противного затрагивается при изучении геометрии в общеобразовательной школе. Более детально эти и другие вопросы математической логики можно изучить на факультативных занятиях или в рамках элективного курса.

Система математического образования, сложившаяся в Сыктывкарском физико-математическом лицее-интернате способствует повышению уровня математической образованности и помогает решать проблемы содержательного характера.

В ФМЛИ с учетом концепции развития математического образования разработаны рабочие программы учебных предметов, в которых содержание обучения в классах с углубленной подготовкой по математике включает полностью содержание курса математики соответствующих классов общеобразовательной школы и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к этому курсу и углубляющих его по основным идейным линиям.

Программа курса

Тема «Математическая логика», рассчитанная на 24 часа, включена в программу 9 класса. В нее входят такие разделы, как:

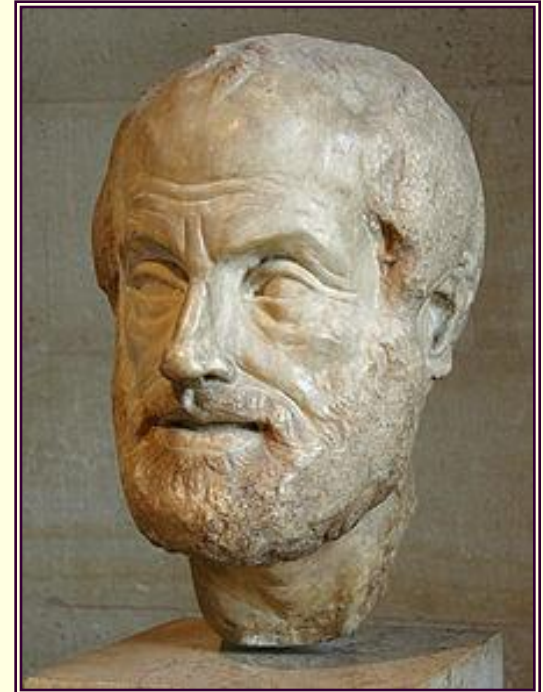
- Высказывания. Логические операции над высказываниями. Таблицы истинности. Логические законы. Предикаты. Операции над предикатами. Кванторы всеобщности и существования.
- Строение математической теоремы (определения, доказательства, аксиомы и теоремы; следствия; необходимые и достаточные условия; контрпример; доказательство от противного; прямая и обратная теоремы; понятие об аксиоматике и аксиоматическом построении геометрии; пятый постулат Эвклида и его история).
- Множества. Отношение множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Образ, прообраз множества. Виды отображений: инъекция, сюръекция, биекция. Примеры отображений.

Классическая логика.

Логика, т.е. наука о том, какие формы рассуждений правильны, возникла лишь немногим более двух тысяч лет тому назад.

Была развита в IV в. до н. э. в работах Аристотеля.

Аристотель исследовал различные формы суждений и их комбинаций, ввел понятие **силлогизма**.

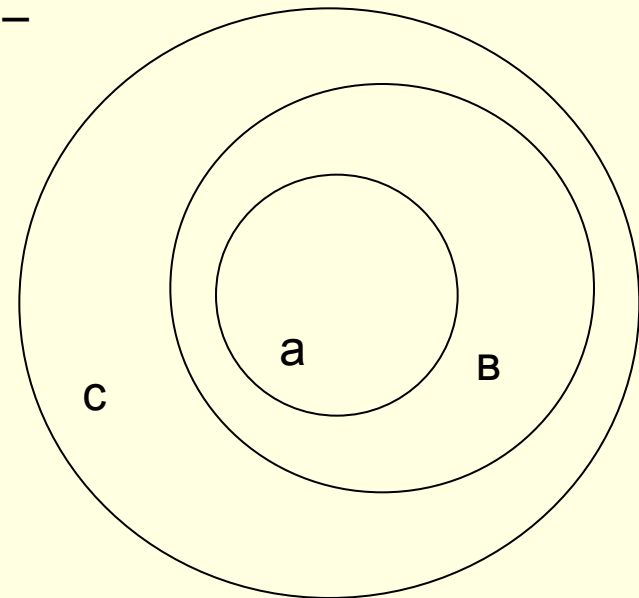


Аристотель
(384—322 гг. до н. э.)

Силлогизм

Определение. **Силлогизм** – это рассуждение, в котором из двух заданных суждений выводится третье.

- 1) Все млекопитающие имеют скелет. Все киты – млекопитающие. Следовательно, все киты имеют скелет.
- 2) Все квадраты – ромбы, все ромбы – параллелограммы. Следовательно, все квадраты – параллелограммы.
- 3) Все квадраты – ромбы, некоторые ромбы имеют острый угол. Следовательно, некоторые квадраты имеют острый угол.



«Все *a* суть *b*, все *b* суть *c*. Значит, все *a* суть *c*»

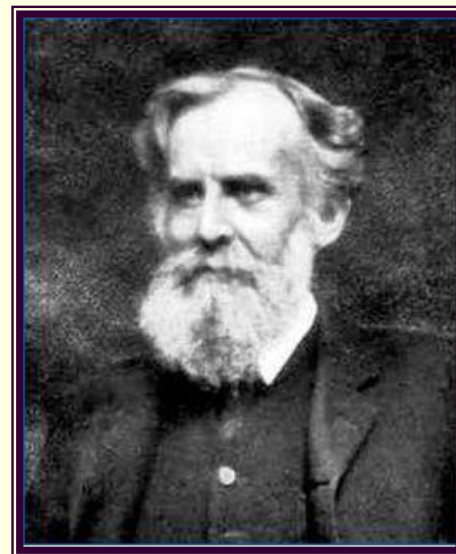
Развитие логики

Определение. Логика, основанная на теории силлогизмов, называется *классической*.

Общее число силлогизмов, которые можно составить из суждений указанного вида, равно 258. Из них правильными являются лишь 24.



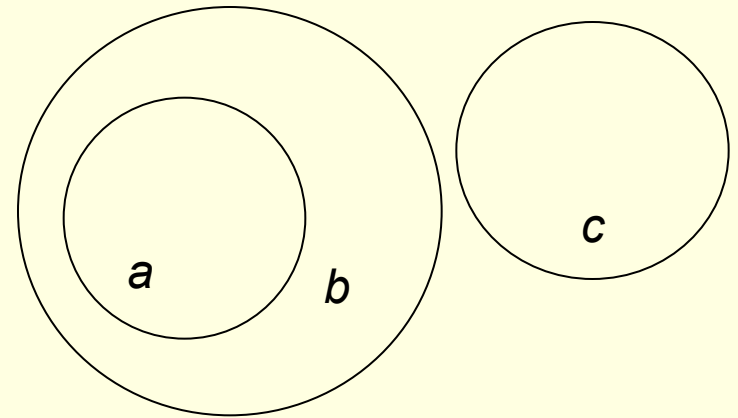
Леонард Эйлер (1707 – 1783)



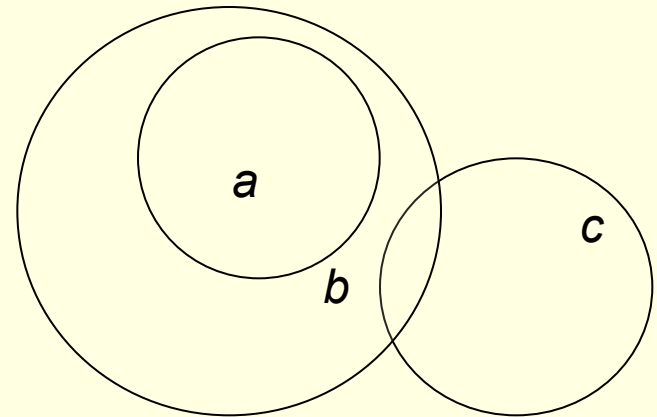
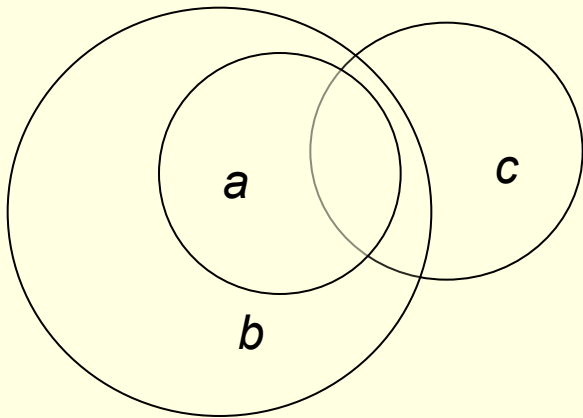
Джо Венн (1834 – 1923)

Диаграммы Эйлера-Венна

Если все a суть b и ни одно b не является c , то ни одно a не является c .



Все a суть b некоторые b суть c .
Значит, некоторые a суть c .

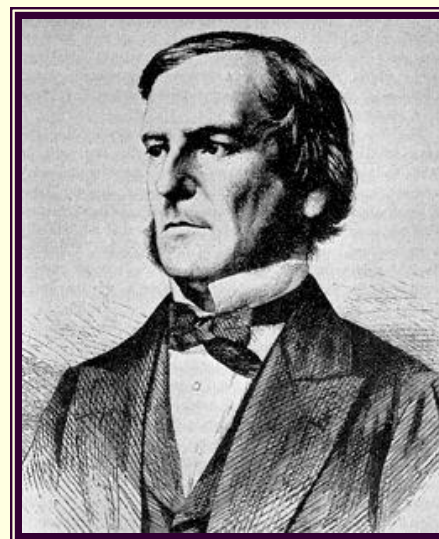


Основы математической логики

Определение. *Алгеброй логики* называют раздел математики, в котором изучают общие свойства выражений, составленных из данных высказываний.



Готфрид Лейбниц (1646—1716)



Джордж Буль (1815—1854)

Высказывания

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, относительно которого известно, истинно оно или ложно.

Не являются высказываниями:

- 1) Вопросительные и восклицательные предложения.
- 2) Определения.
- 3) Высказывательные формы.

Высказывание, которое можно разложить на части, будем называть **сложным**, а неразложимое далее высказывание – **простым**.

Из заданных высказываний получаются новые с помощью операций, имеющих специальные названия:

□ **Конъюнкция**

□ **Дизъюнкция**

□ **Импликация**

□ **Эквиваленция**

□ **Отрицание высказывания**

Отрицание

Определение. **Отрицанием** высказывания **A** называют высказывание, истинное в том случае, когда высказывание **A** ложно, и ложное, когда высказывание **A** истинно.

Обозначение: \bar{A} (« не A» или «отрицание A»)

Таблица истинности:

A	\bar{A}
И	Л
Л	И

Конъюнкция

Определение. **Конъюнкцией** двух высказываний A и B называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B .

Обозначение: $A \wedge B$ (читают « A и B »)

Синонимы: союз «и», «логическое умножение»

Таблица истинности:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

ДИЗЬЮНКЦИЯ

Определение. **Дизъюнкцией** двух высказываний **A** и **B** называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из двух высказываний **A** или **B**.

Обозначение: $A \vee B$ (Витают «**A** или **B**»)

Синонимы: союз «или», «логическое сложение»

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Импликация

Определение. **Импликацией** двух высказываний **A** и **B** называется новое высказывание, ложное лишь в том случае, когда **A** истинно, а **B** ложно.

Обозначение: $A \Rightarrow B$ (читают «если **A**, то **B**»)

Таблица истинности:

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эквиваленция

Определение. **Эквиваленцией** двух высказываний **A** и **B** называется новое высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда оба высказывания истинны или оба ложны.

Обозначение: $A \Leftrightarrow B$ (читают «**A** тогда и только тогда, когда **B**»)

Таблица истинности:

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Алгебра логики

Любое высказывание называется **формулой**.

Если A и B – формулы, то формулами будут также

$$\bar{A}, \quad \bar{B}, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B.$$

Две формулы называются **тождественными** (эквивалентными), если таблицы истинности этих формул совпадают.

Обозначение: $A \equiv B$

Формула, истинная при любых значениях входящих в нее высказываний, называется **тавтологией**.

Формула называется **противоречием**, если она ложна при любом значении входящих в нее высказываний.

Логические законы

1. Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

2. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

3. Дистрибутивность одной операции относительно другой

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

4. Законы де Моргана

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$$

5. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$$

Логические законы

6. Поглощение логических констант

$$\overline{И} \Leftrightarrow Л$$

$$A \wedge И \Leftrightarrow A$$

$$A \vee И \Leftrightarrow И$$

$$\overline{Л} \Leftrightarrow И$$

$$A \wedge Л \Leftrightarrow Л$$

$$A \vee Л \Leftrightarrow A$$

7. Закон исключенного третьего

$$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow И$$

8. Закон противоречия

$$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow Л$$

9. Метод доказательства от противного

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

Логические законы

10. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$

11. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

12. Другие свойства

$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$

$$A \vee A \Leftrightarrow A$$

$$A \Rightarrow A \Leftrightarrow И$$

$$A \Leftrightarrow A \Leftrightarrow И$$

Заключение

Краткий курс математической логики призван повысить общую культуру мышления учащихся и тем самым подготовить их к сознательному и глубокому усвоению математических дисциплин общего и специального циклов. Знакомство с языком математической логики и ее методами поможет учащимся развить способности к рассуждениям, грамотному доказательству утверждений, лаконичной и корректной аргументации.