ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

При этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > \varepsilon,$$

т.е. функция принимает сколь угодно большие по абсолютной величине значения, при стремлении значений аргумента к x_0.

Функция имеет конечный предел при неограниченном возрастании аргумента, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ или } \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall\; |x| > \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, означает, что функция принимает сколь угодно большие по абсолютной величине значения при неограниченном возрастании абсолютного значения аргумента, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \forall\; |x| > \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| > \varepsilon.$$

КАК НАЙТИ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ?

Из определений следует, что для вычисления предела функции в точке или на бесконечности нужно сначала попытаться найти значение функции в предельном значении аргумента, на практике это обозначим так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = [f(x_0)].$$

Например, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+4}{x-2} = \left[\frac{1+4}{1-2}\right] = -5$ (здесь все просто).

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x-2} = \left[\frac{4+4}{2-2}\right] = \left[\frac{8}{0}\right] = \infty$ (придется научиться делить на ноль)

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left[\frac{4-4}{2-2}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$, а это неопределенность, от которой необходимо избавиться для нахождения предела:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4$ (тоже все просто, как в седьмом классе)

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для успешной работы необходимо повторить

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена.

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим на общий множитель $(x+1)\neq 0$ $(x\to-1$, но $x\neq-1)$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x}=\frac{-1-2}{-1}=3.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Для разложения на множители знаменателя используем формулу $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Затем сократим на общий множитель $(x-2)\neq 0$ $(x\to 2$, но $x\neq 2)$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+3)}{(x^2+2x+4)}=\frac{2+3}{4+4+4}=\frac{5}{12}$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Для разложения на множители числителя используем формулу $a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)$. Затем сократим на общий множитель $(x-1)\neq0$ ($x\to1$, но $x\neq1$)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1+1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.

При наличии иррациональных выражений рекомендуется перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого выполнить упрощение.

В предложенной задаче переведем иррациональность из знаменателя в числитель. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2+5}+3$ (сопряженное знаменателю). После этого для преобразования знаменателя используем формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2+5-9}=.$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)}=\frac{\sqrt{2^2+5}+3}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.
При наличии иррациональных выражений рекомендуется перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого выполнить упрощение.

В предложенной задаче переведем иррациональность из числителя в знаменатель. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{1+2x}+3$ (сопряженное числителю). После этого для преобразования знаменателя используем формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=.$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.
При наличии иррациональных выражений рекомендуется перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого выполнить упрощение.
В предложенной задаче переведем иррациональность из числителя в знаменатель. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1$ (неполный квадрат суммы). Для последующего преобразования числителя используем формулу $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{0^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{0^2+1}+1}=\frac{1}{3}$$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Одним из мощных способов вычисления пределов является ***правило*** (раскрытия неопределенностей) ***Лопиталя***, которое докажем позже, а пока применим его на практике без доказательства.

Теорема (Лопиталя). *Пусть*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ *(или* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$*);*

2) функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют производные в окрестности точки* x_0 *, причем существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$*,*

тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

В виде правила запишем:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt[m]{x}-1)'}{(\sqrt[n]{x}-1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{m}$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ или } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Полезны следующие варианты второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ или } \lim_{x\to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

Р е ш е н и е.Так как при $x\to 0 \sin 7x\to 0$, то имеет место неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для использования первого замечательного предела домножим числитель и знаменатель дроби на 7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x\to 0$. Применим тригонометрическое тождество $\operatorname{tg} 3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ и вычислим предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x==\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot 1=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *эквивалентные бесконечно малые* при $x\to x_0$, обозначают $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема *Если* $\alpha(x)\sim a(x)$ *и* $\beta(x)\sim b(x)$ *при* $x\to x_0$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a(x)}{b(x)}$$

ТАБЛИЦА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

при $x \to 0$	если $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$
$\sin x \sim x$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha}(x) - 1 \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^{\alpha}(x) - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
$\ln(1 + x) \sim x$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$(1 + x)^p - 1 \sim px$	$(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе отношения эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\left|\begin{matrix} 3x\to 0 & \Rightarrow & \sin 3x\sim 3x \\ 4x\to 0 & \Rightarrow & \operatorname{tg} 4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

Р е ш е н и е. В числителе воспользуемся теоремой о замене функций в пределе разности эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left|\begin{matrix} \sin x\sim x & & \\ \frac{x}{2}\to 0 & \Rightarrow & \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x-\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-\frac{x^2}{4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x^2}{x^2}=\frac{7}{4}.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg} 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 2x)}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе суммы и отношения эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg} 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 2x)}=\left|\begin{gathered}\sin 2x\sim 2x;\quad \operatorname{arctg} 3x\sim 3x;\\ (3x+\sin^2 2x)\to 0 \text{ при } x\to 0\ \Rightarrow\\ \ln\left(1+3x+\sin^2 2x\right)\sim 3x+\sin^2 2x\sim 3x+(2x)^2\end{gathered}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2\cdot 3x+3x^2}{3x+(2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+6x+3x^2}{3x+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(8+3x)}{x(3+4x)}=\frac{8}{3}.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2}-1}$.

Р е ш е н и е. По таблице эквивалентных бесконечно малых получаем:

$$\operatorname{arctg} x^2 \sim x^2,\ e^{3x^2}-1 \sim 3x^2 \text{ при } x\to 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Р е ш е н и е. Величины $2x$ и $3x$ не являются бесконечно малыми при $x\to\pi$, поэтому бесконечно малые при $x\to\pi$ величины $\sin 2x$ и $\sin 3x$ нельзя заменить на их аргументы $2x$ и $3x$ соответственно.

Сделаем замену переменной. Пусть $y=x-\pi$, тогда $x=\pi+y$ и $y\to 0$ при $x\to\pi$.

Получим

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2\pi+2y)}{\sin(3\pi+3y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{(-\sin 3y)}=\lim_{y\to 0}-\frac{2y}{3y}=-\frac{2}{3}.$$

НО НЕ ВСЕ ТАК ПРОСТО

Пусть $f(x) \sim g(x)$, т.е. по определению эквивалентных функций $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, тогда по определению предела функции в точке $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)) = g(x) + g(x)\alpha(x) = g(x) + o(g(x)),$$

следовательно,

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Так как порядок бесконечно малой $o(g(x))$ в общем случае неизвестен, то переход к эквивалентным функциям в разности нужно производить осторожно.

Например, заменим на эквивалентные слагаемые в числителе в следующем пределе:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^4} = \left| \begin{array}{c} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}\ ; \quad \sin^2 x \sim x^2 \\ \sin^2 x \sim x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{x^2}{2} - x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

Однако, выполнив тождественные преобразования тригонометрического выражения в числителе, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - \left(1 - \cos^2 x\right)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} =$$

$$= \left|1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}\right| = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

Порядок бесконечно малой $o(g(x))$ и более точные эквивалентные функции научимся определять позже с помощью формулы Тейлора.

<u>Замечание.</u> В рассмотренном ранее примере $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ разность в числителе заменили на эквивалентные, так как $2x \sin x \sim 2x^2$, $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$ при $x \to 0$ и $2x^2 \neq \frac{x^2}{4}$.

Домашнее задание (сборник задач Бермана Г.Н.)

- № 272 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$ ответ: 0
- № 277 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$ ответ: -1
- № 297 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$ ответ: 3
- № 326 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x-\sin^3 x}$$ ответ: ∞
- № 327 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$$ ответ: 0
- № 329 $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$$ ответ: ∞