НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

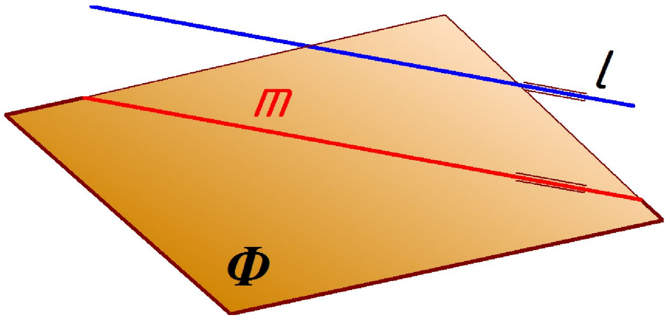
Лекция 2

Направление обучения – «Строительство»

Взаимное положение прямой линии и плоскости

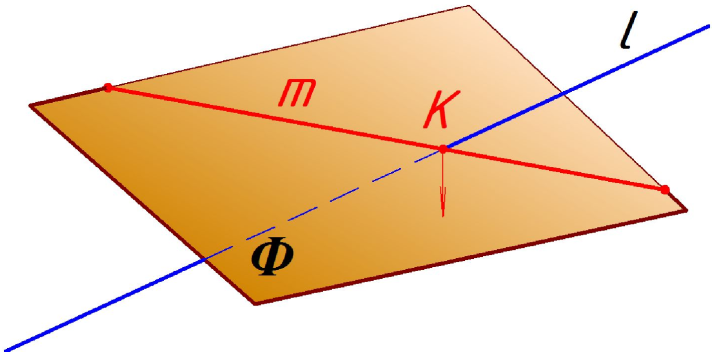
Прямая по отношению к плоскости может занимать следующие положения:

- Принадлежать;
- Быть параллельной;
- Пересекать;
- Быть перпендикулярной.



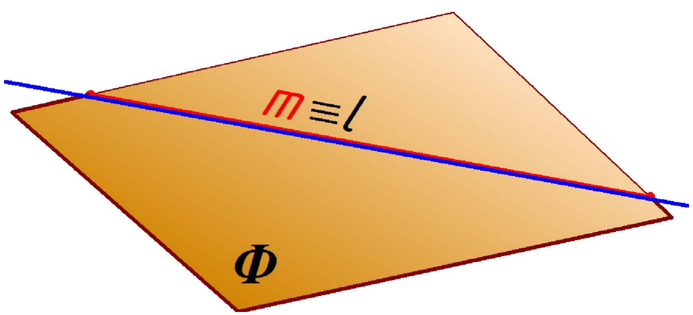
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

$$l \parallel \Phi \Leftrightarrow l \parallel m \; ; \; m \subset \Phi$$



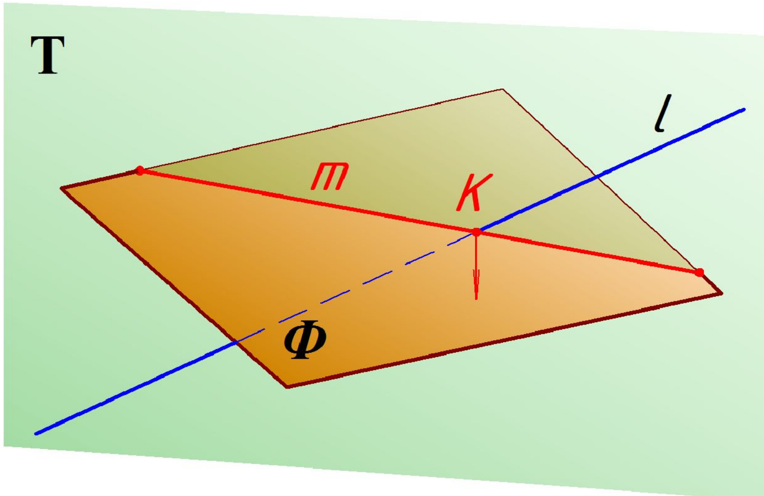
Прямая пересекает плоскость, если она пересекает какую-либо прямую, принадлежащую этой плоскости.

$$l \cap \Phi \Leftrightarrow l \cap m \; ; \; m \subset \Phi$$



Прямая принадлежит плоскости, если она тождественна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

$$l \subset \Phi \Leftrightarrow l \equiv m \; ; \; m \subset \Phi$$



Если $\begin{cases} l \parallel m \\ l \cap m, \\ l \equiv m \end{cases}$

то прямые l и m должны принадлежать какой-то другой плоскости, например T.

$$l \subset T \text{ и } m \subset T$$

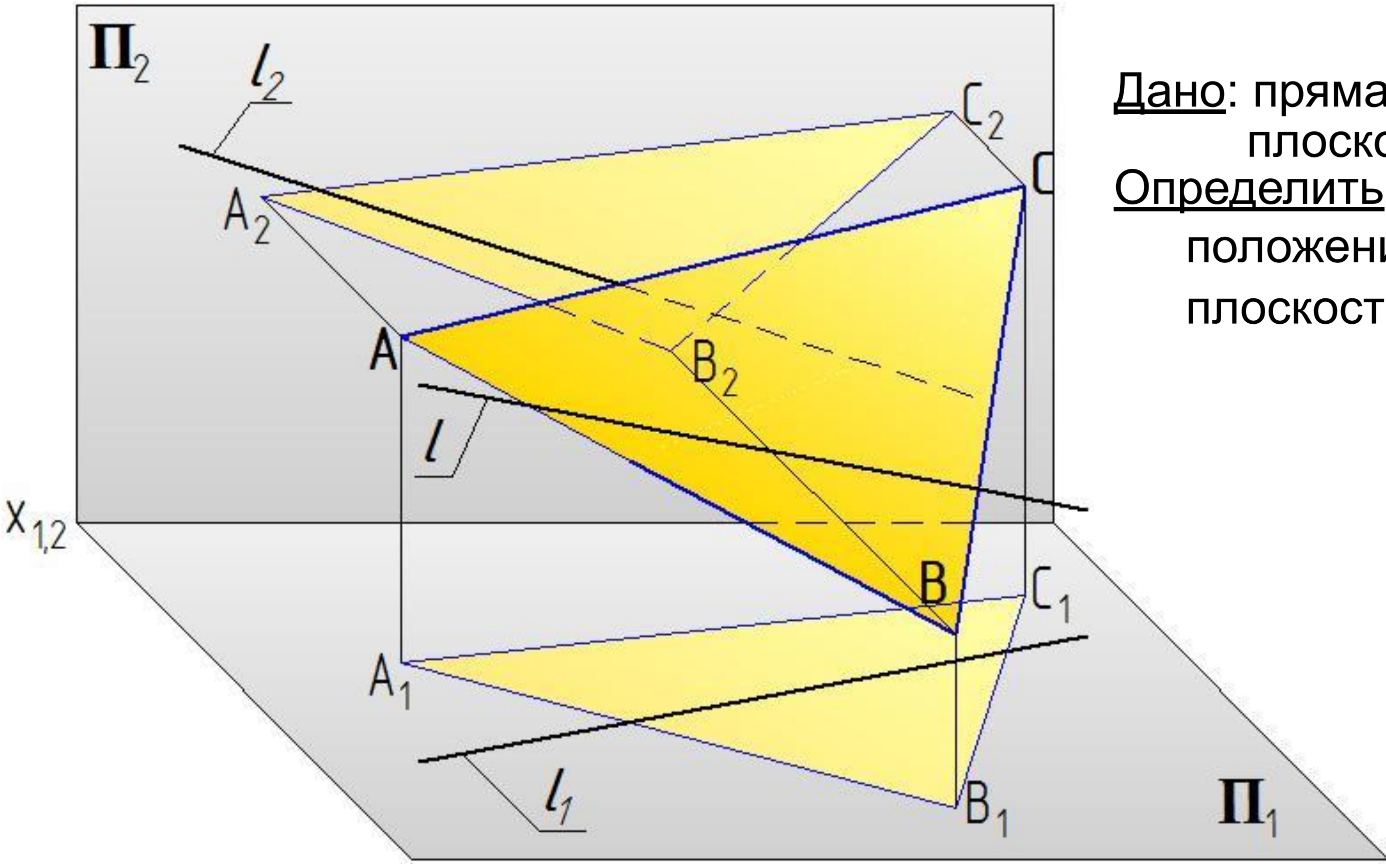
T – вспомогательная секущая плоскость

Но $m \subset Ф$ $m \subset T$. Следовательно, $m = Ф \cap T$

При определении взаимного положения прямой линии и плоскости вспомогательная секущая плоскость всегда выбирается проецирующей.

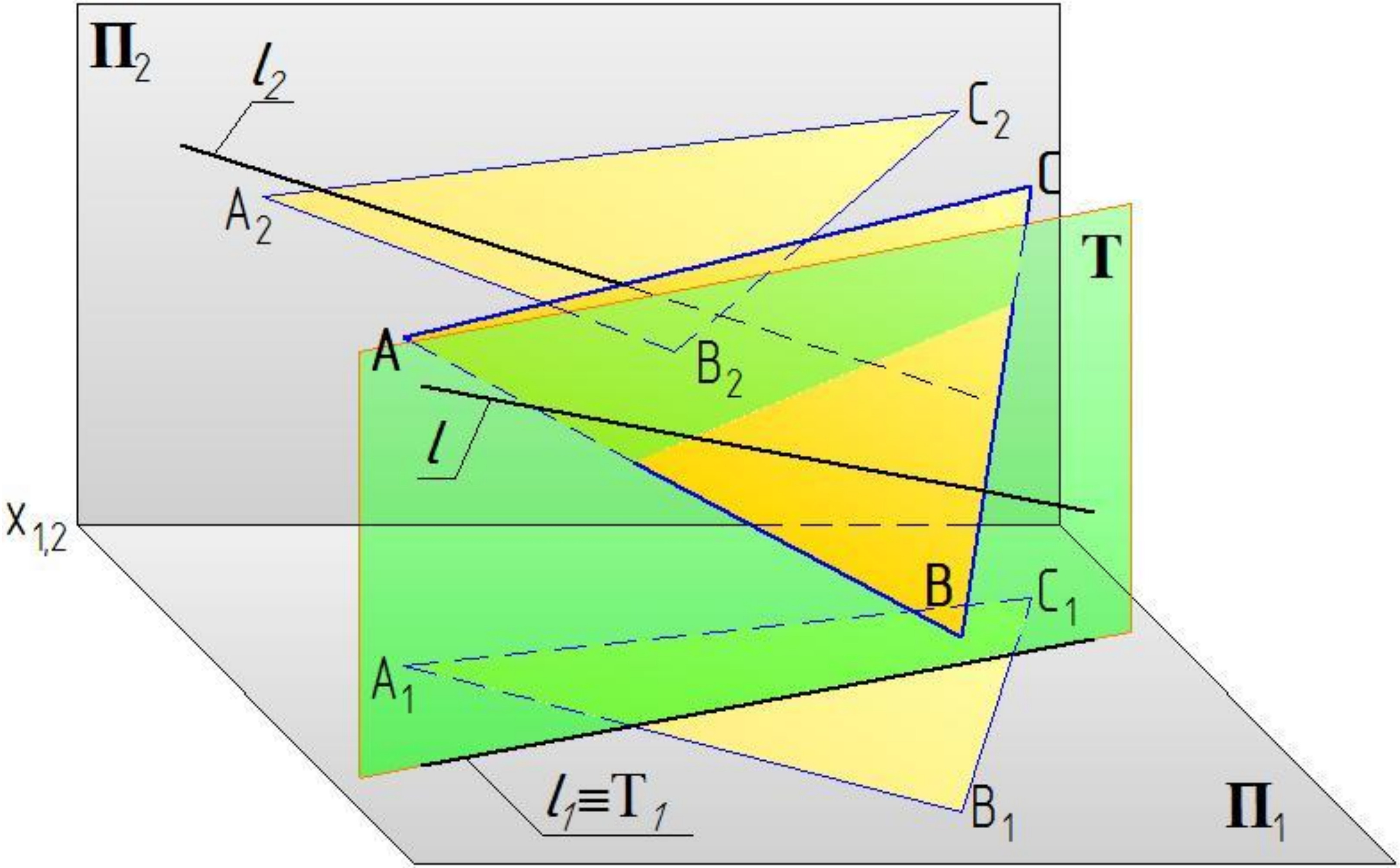
В этом случае, если $T \perp П_к$, то на эпюре $T_к \equiv l_к \equiv m_к$

Общий алгоритм определения взаимного положения прямой линии и плоскости



Дано: прямая l и плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.

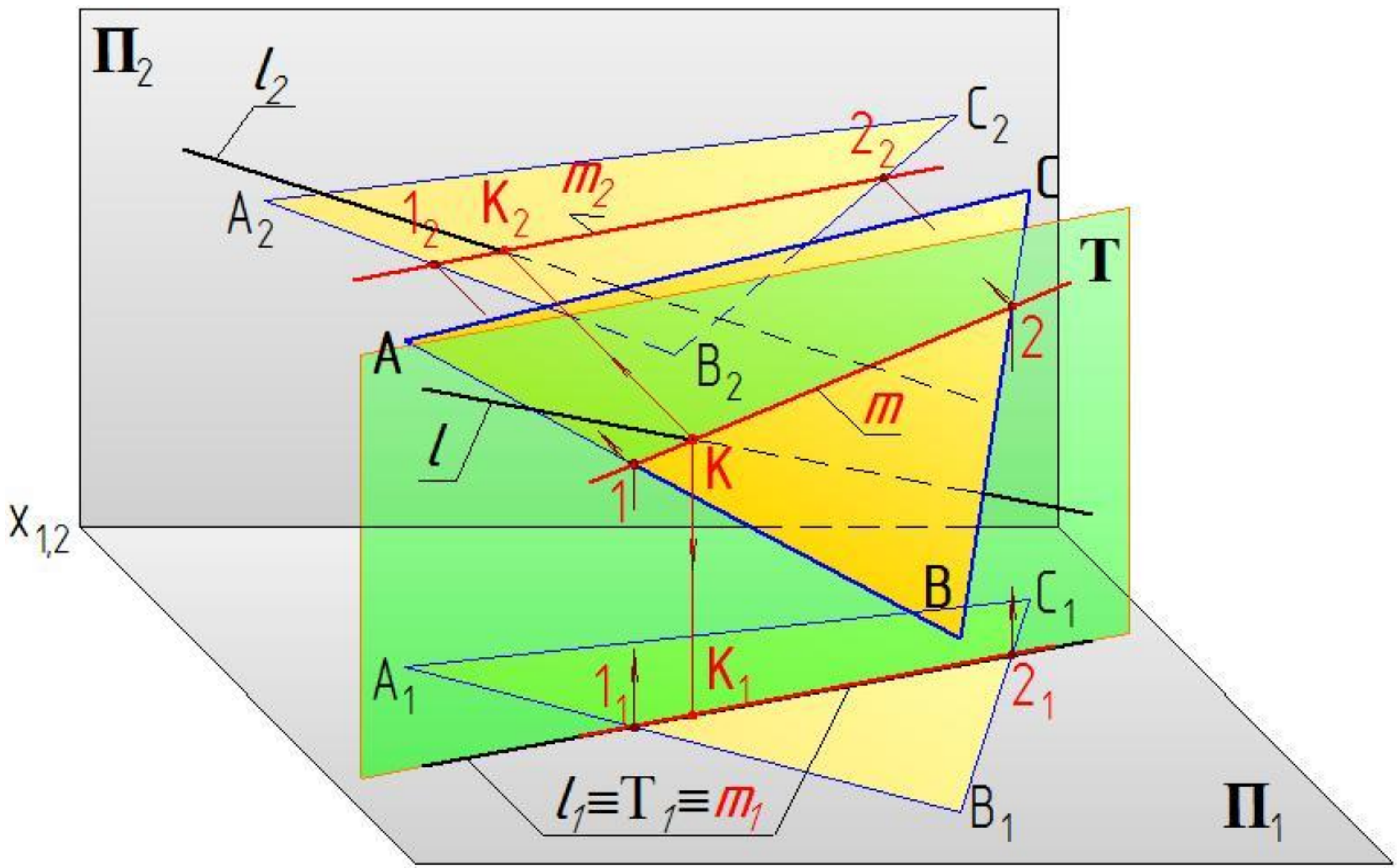
Определить: взаимное положение прямой l и плоскости α



1. Прямую *l*, заключить в какую-либо вспомогательную проецирующую плоскость.

$l \cup T;\ T \perp \Pi_к$. Тогда $T_к \perp l_к$

На примере $T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \perp l_1$



2. Построить линию пересечения заданной плоскости α и вспомогательной T.

$$m = \alpha \cap T$$

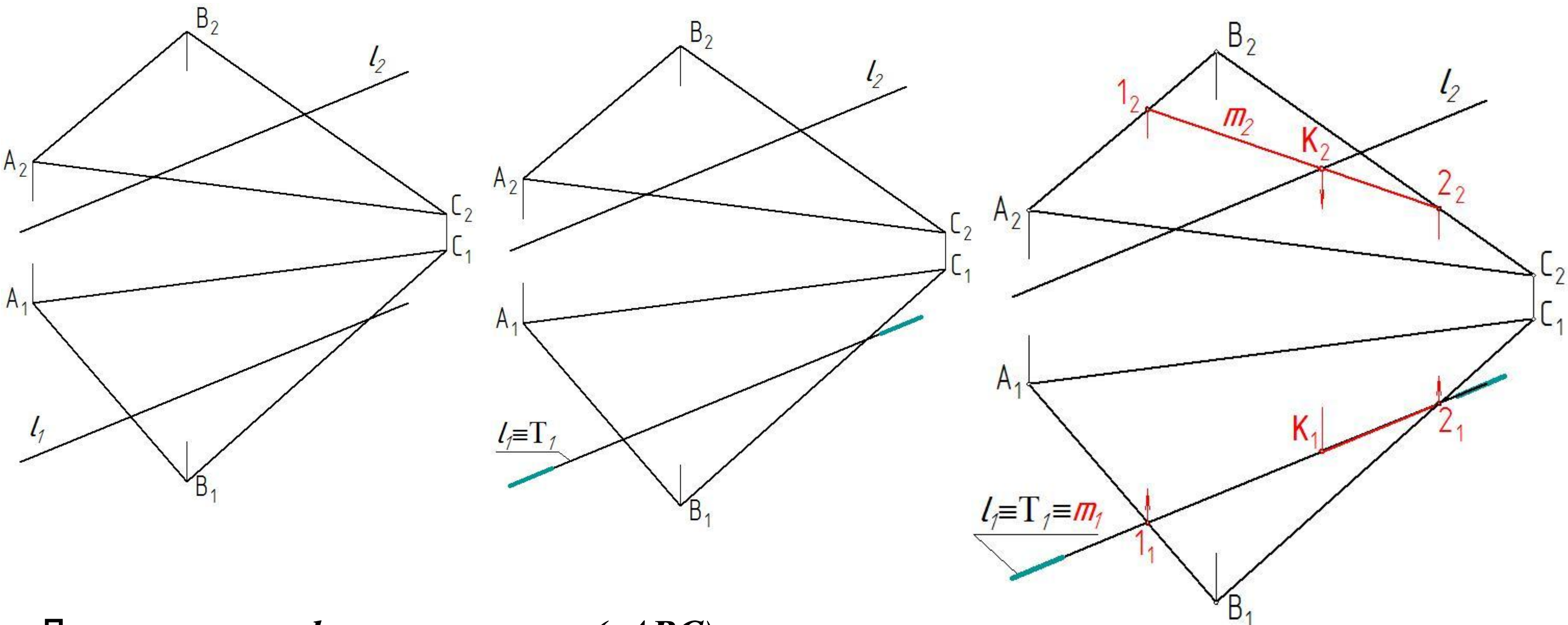
$$m \subset T \Rightarrow m_k \equiv T_k; \quad m \subset \alpha \Rightarrow m\ (1,2)$$

На примере. $m_1 \equiv T_1; \quad m \subset \alpha \Rightarrow m\ (1,2),\ 1 = m \cap AB,\ 2 = m \cap CB$

3. Определить **взаимное положение прямой l и плоскости α.**

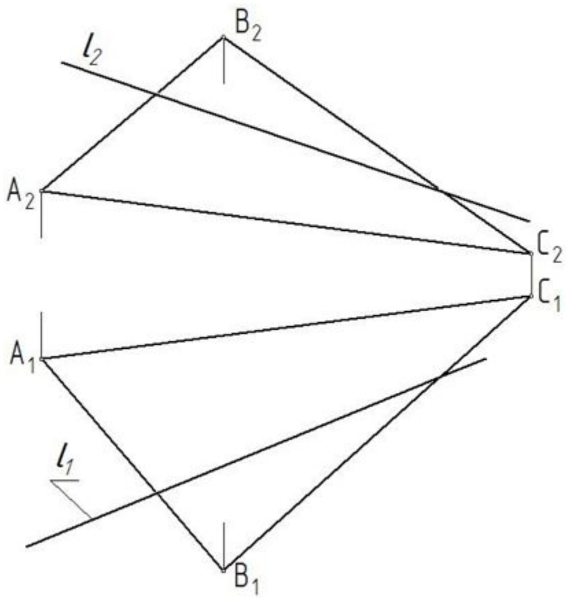
Решение рассмотренной задачи на эпюре

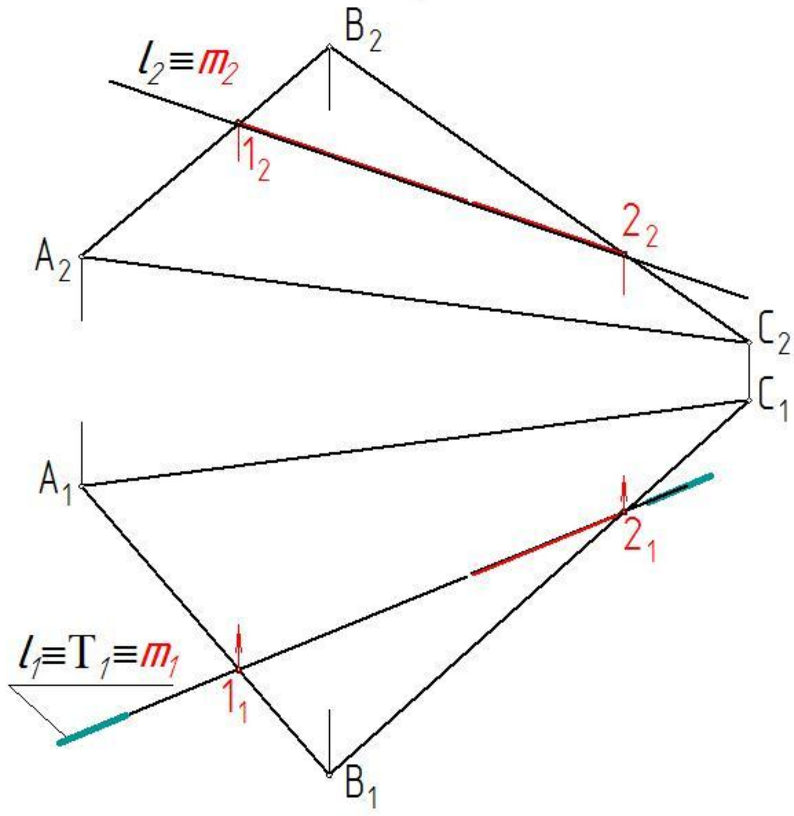
Пример 1



<u>Дано</u>: прямая ***l*** и плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.
<u>Определить:</u> взаимное положение прямая ***l*** и плоскость α

1. $l \cup T;\ T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$
2. $m = \alpha \cap T \Rightarrow m \subset T \Rightarrow m_1 \equiv T_1 \equiv l_1;$
   $m \subset \alpha\ (\Delta\ ABC) \Rightarrow m(1,2);\ 1 = m \cap AB;\ 2 = m \cap BC;$
3. $l_2 \cap m_2 = K_2 \Rightarrow l \cap m = K, \Rightarrow K = l \cap \alpha$





Пример 2

1.Выбрано $l_1 \equiv m_1$

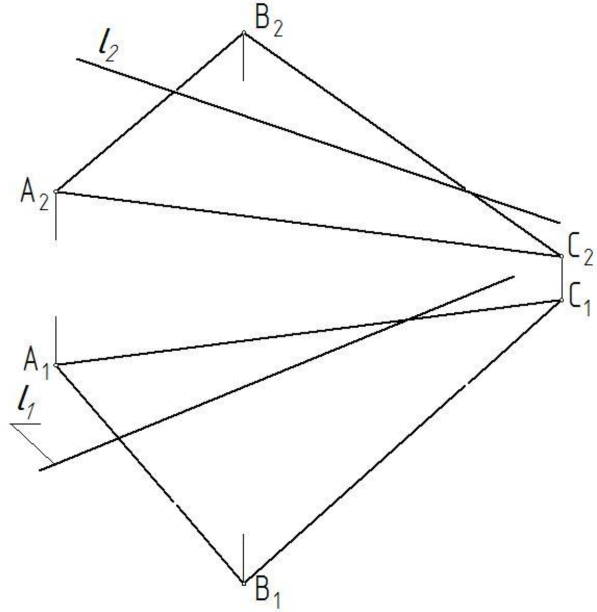
2. $m(1,2)$; $1 = m \cap AB$; $2 = m \cap BC$;

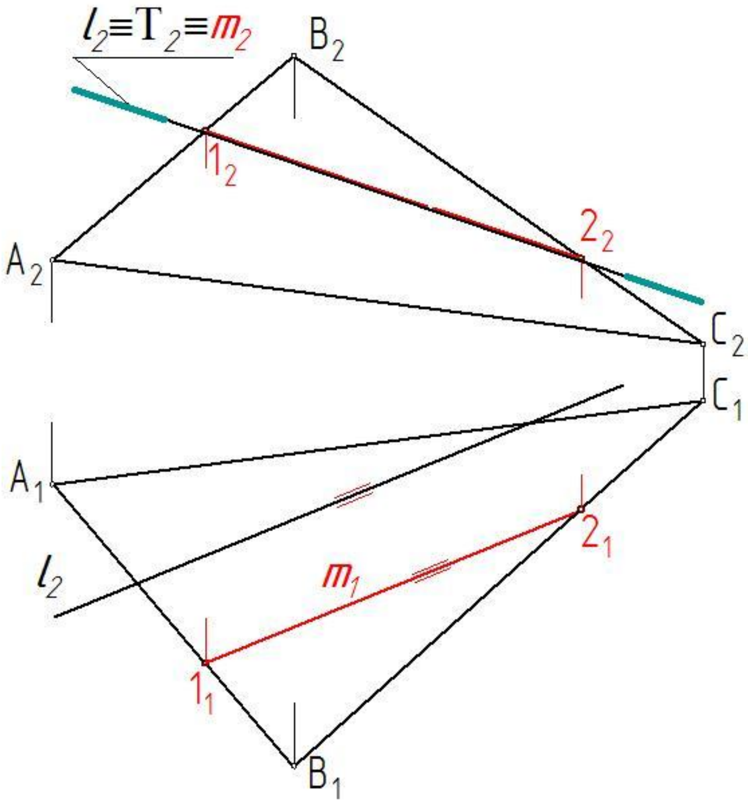
3. Строим m_2.

4. Определяем взаимное положение прямых m_2 и l_2

$$m_2 \equiv l_2$$

5. Следовательно, $l \subset \alpha$





Пример 3

1.Выбрано $l_2 \equiv m_2$

2. $m(1,2)$; $1=m\cap AB$; $2=m\cap BC$;

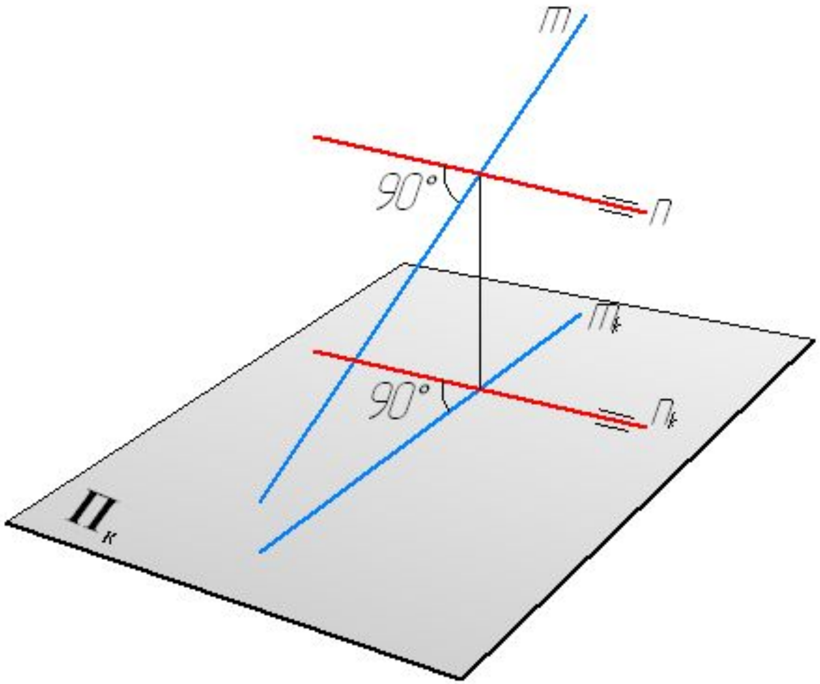
3. Строим m_1.

4. Определяем взаимное положение прямых m_1 и l_1

$$m_1 \parallel l_1$$

5. Следовательно, $l \parallel \alpha$

Взаимно перпендикулярные прямые



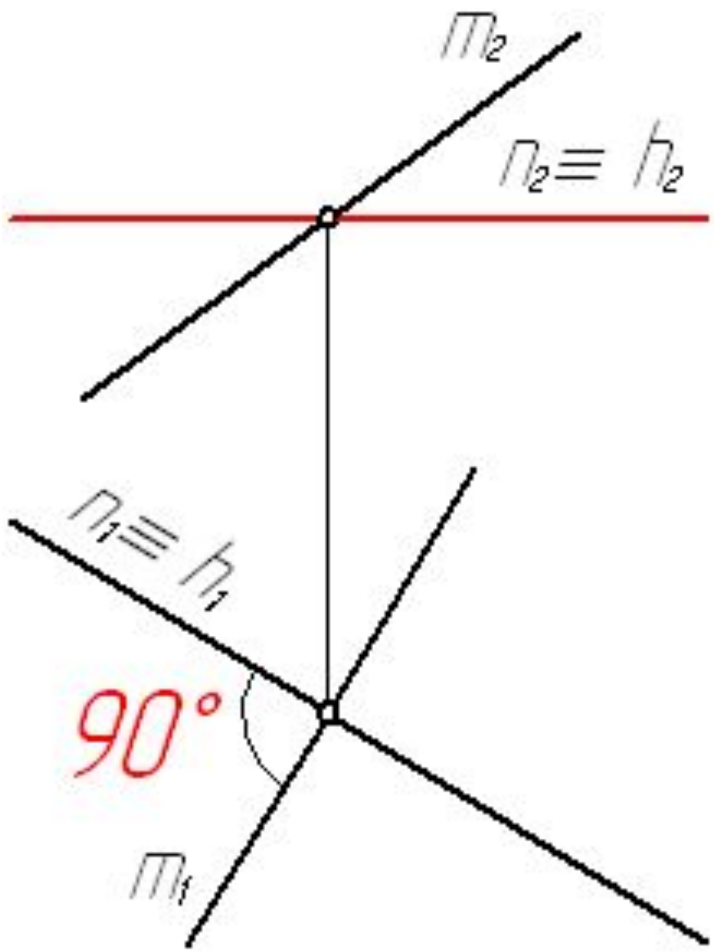
Если $m \perp n$,

$m \cap n \vee m \dot{-} n$,

$n \parallel П_к$,

$m \perp П_к$,

то $m_к \perp n_к$

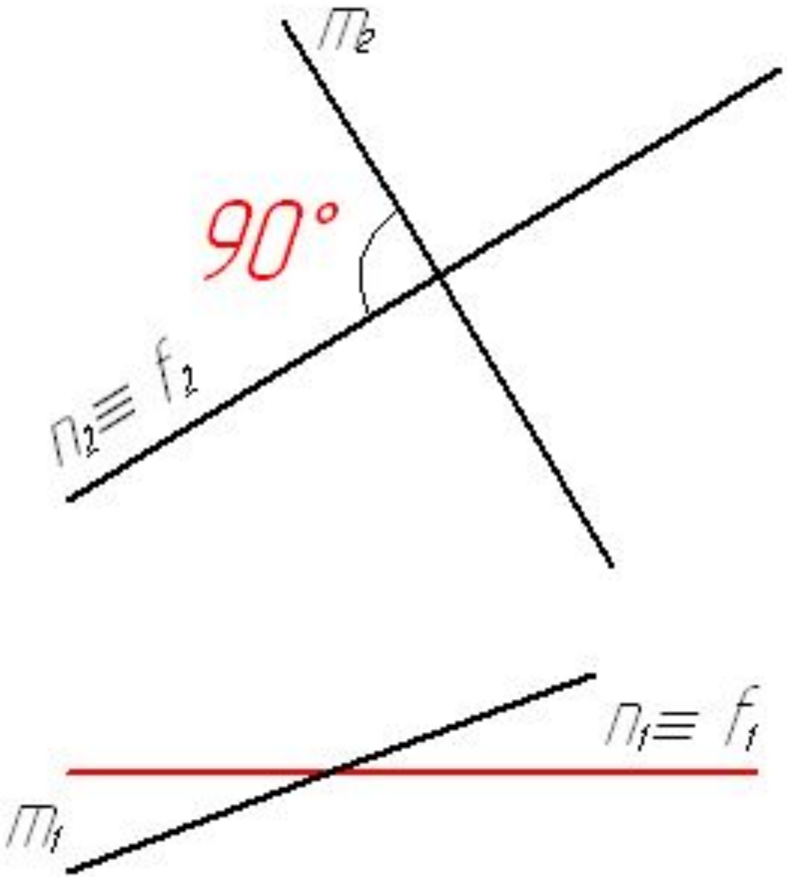


$m \perp n \ \wedge \ m \cap n$

$n \parallel \Pi_1 \quad \Rightarrow n \equiv h$

$m \not\perp \Pi_1$

$\Rightarrow \ m_1 \perp n_1$



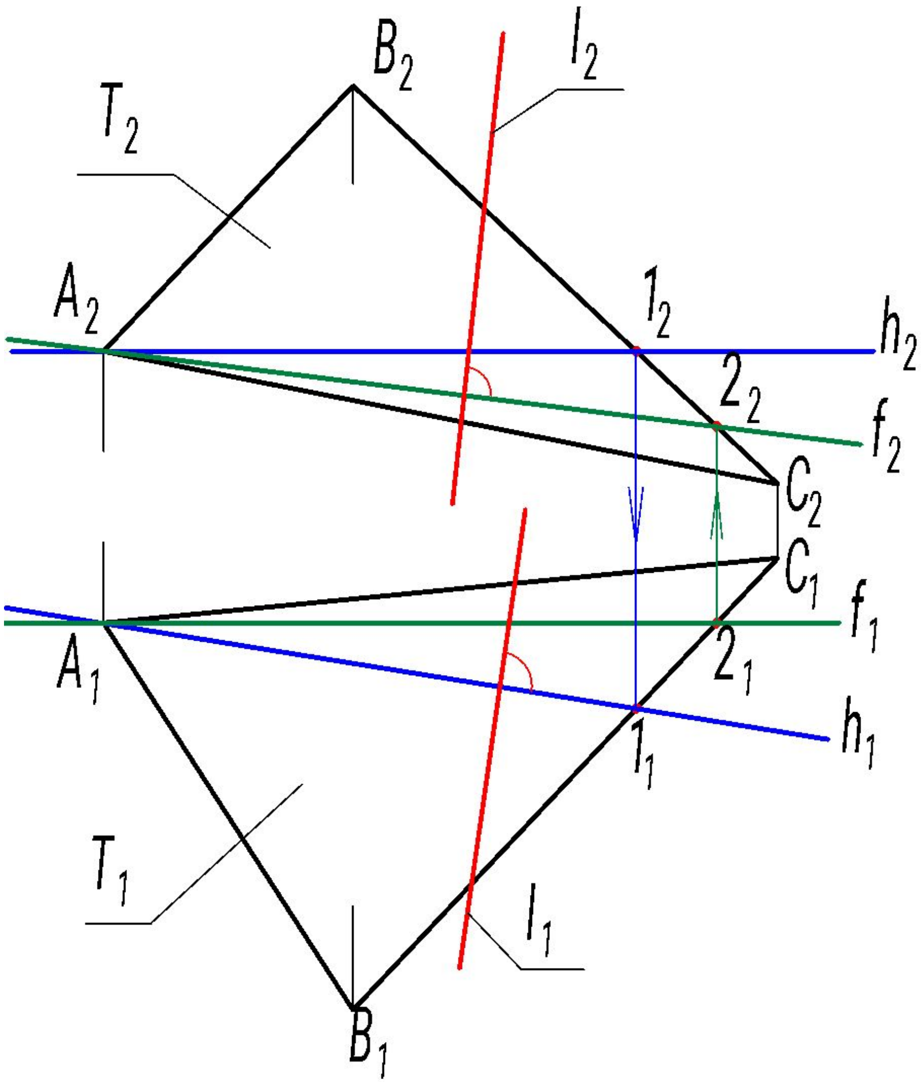
$m \perp n \wedge m \cdot n$

$n \parallel \Pi_2 \Rightarrow n \equiv f$

$m \not\perp \Pi_2$

$\Rightarrow m_2 \perp n_2$

Прямая перпендикулярная плоскости



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

На эпюре в качестве прямых должны быть использованы прямые уровня – горизонталь и фронталь.

$$l \perp T \Rightarrow l \perp h \wedge l \perp f;$$

$$h \subset T \wedge f \subset T$$

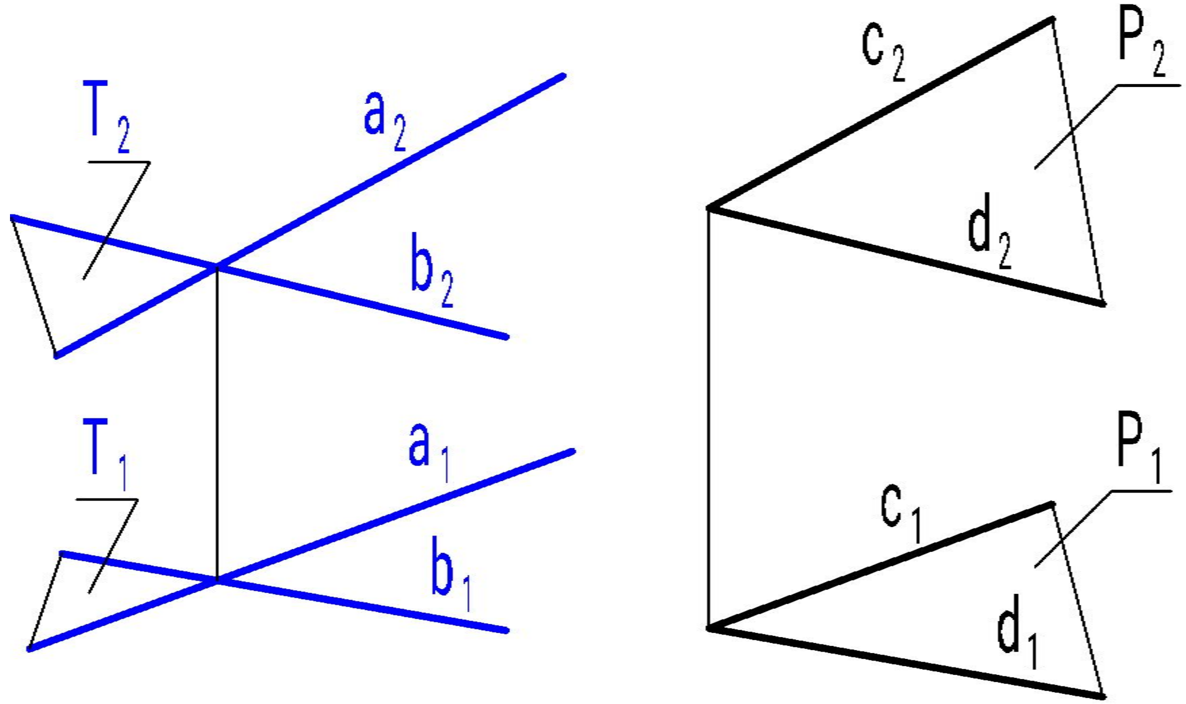
$$l \perp h;\ h \parallel \Pi_1;\ l \perp \Pi_1 \Rightarrow$$

$$l_1 \perp h_1$$

$$l \perp f;\ f \parallel \Pi;\ l \perp \Pi \Rightarrow$$

Взаимное положение двух плоскостей

Параллельные плоскости



Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

$$T(a \cap b);$$
$$P(c \cap d);$$
$$a \parallel c;\ b \parallel d;$$
$$\Rightarrow T \parallel P$$

Пересечение двух плоскостей

Линией пересечения плоскостей является прямая, которая должна быть задана двумя точками.

Любая из этих двух точек может быть получена:

- пересечением двух прямых (в каждой из двух заданных плоскостей выбирается по одной прямой и находится точка их пересечения);
- пересечением прямой с плоскостью (в одной из двух заданных плоскостей выбирается прямая и определяется точка ее пересечения с другой плоскостью);
- пересечением трех плоскостей (вводится дополнительная третья плоскость, и строится точка пересечения двух заданных плоскостей и дополнительной).

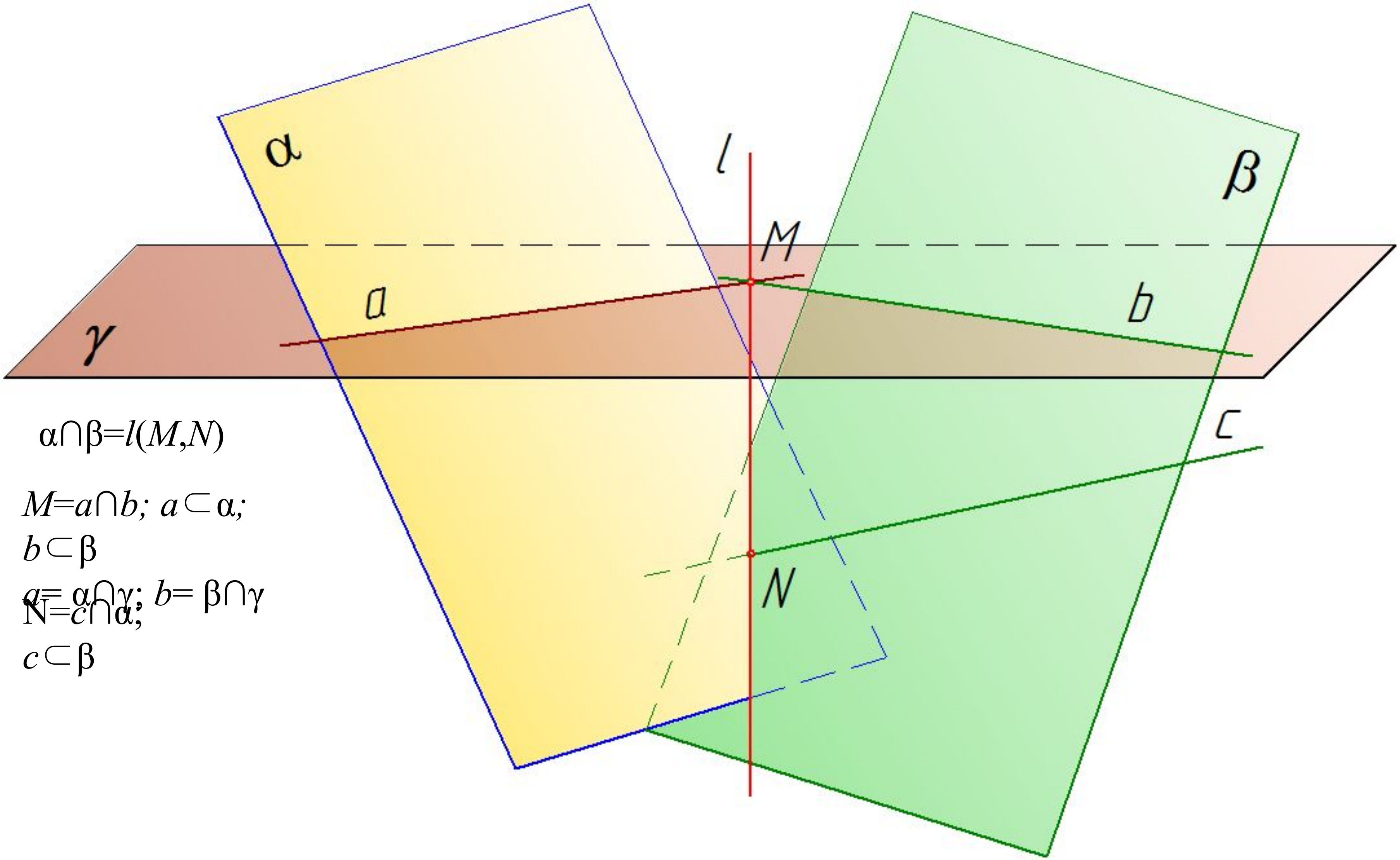
В первом варианте для выполнения пересечения двух прямых должно быть обеспечено условие: обе прямые должны лежать в одной плоскости. Т.е. должна быть введена третья дополнительная плоскость, которая при пересечении с исходными плоскостями и создает эти прямые. Тем самым мы переходим к третьему варианту.

При определении точки пересечения прямой линии с плоскостью также должна быть введена дополнительная секущая плоскость.

Следовательно, реально используются третий вариант.

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Пространственная модель построения линии пересечения двух плоскостей



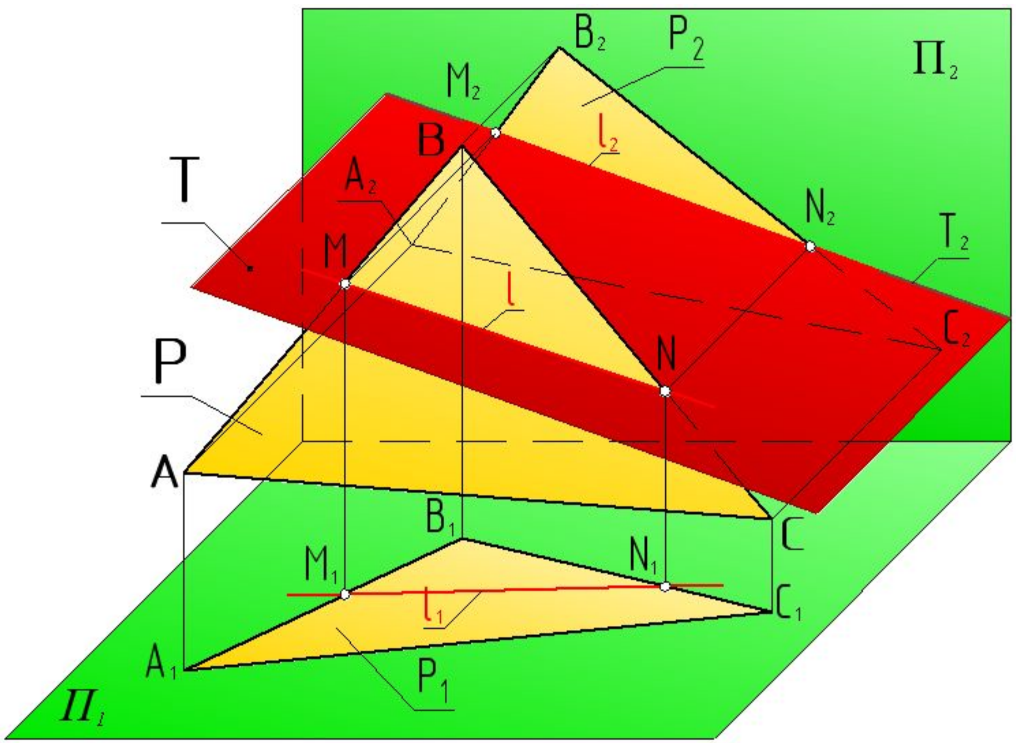
$\alpha \cap \beta = l(M,N)$

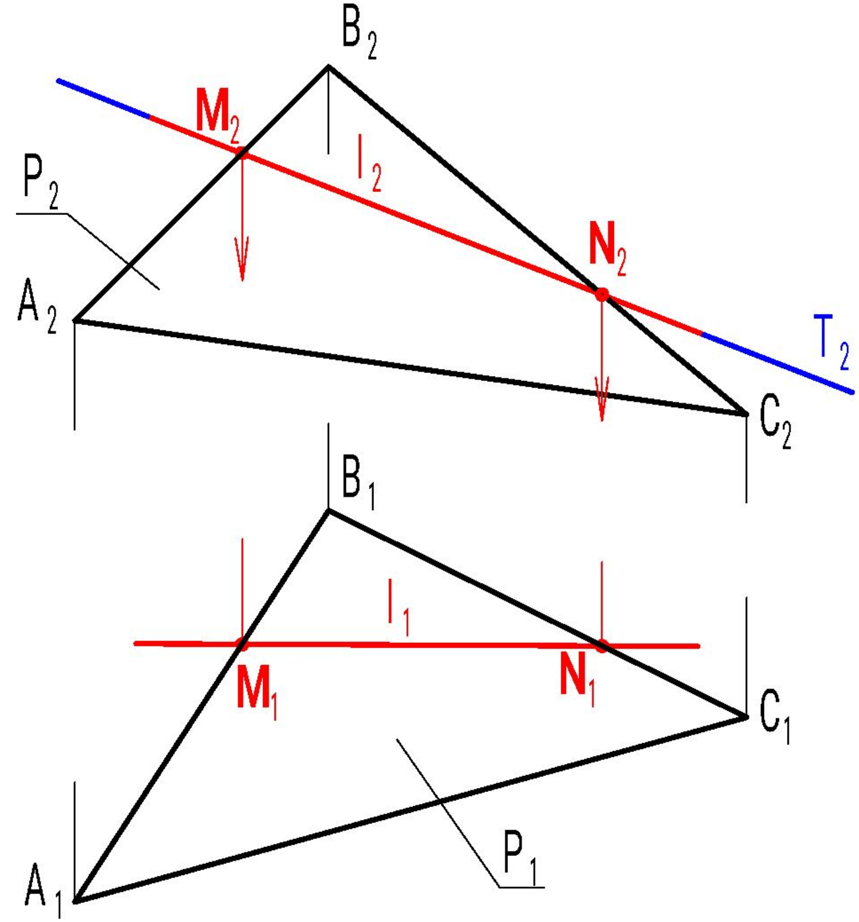
$M = a \cap b$; $a \subset \alpha$;
$b \subset \beta$

$a = \alpha \cap \gamma$; $b = \beta \cap \gamma$

$N = c \cap \alpha$;
$c \subset \beta$

Частный случай: одна из двух плоскостей плоскость частного положения, например фронтально-проецирующая, а другая –общего положения.





$T \cap P(\Delta ABC) = l \Rightarrow l \subset T$ и $l \subset P(\Delta ABC)$

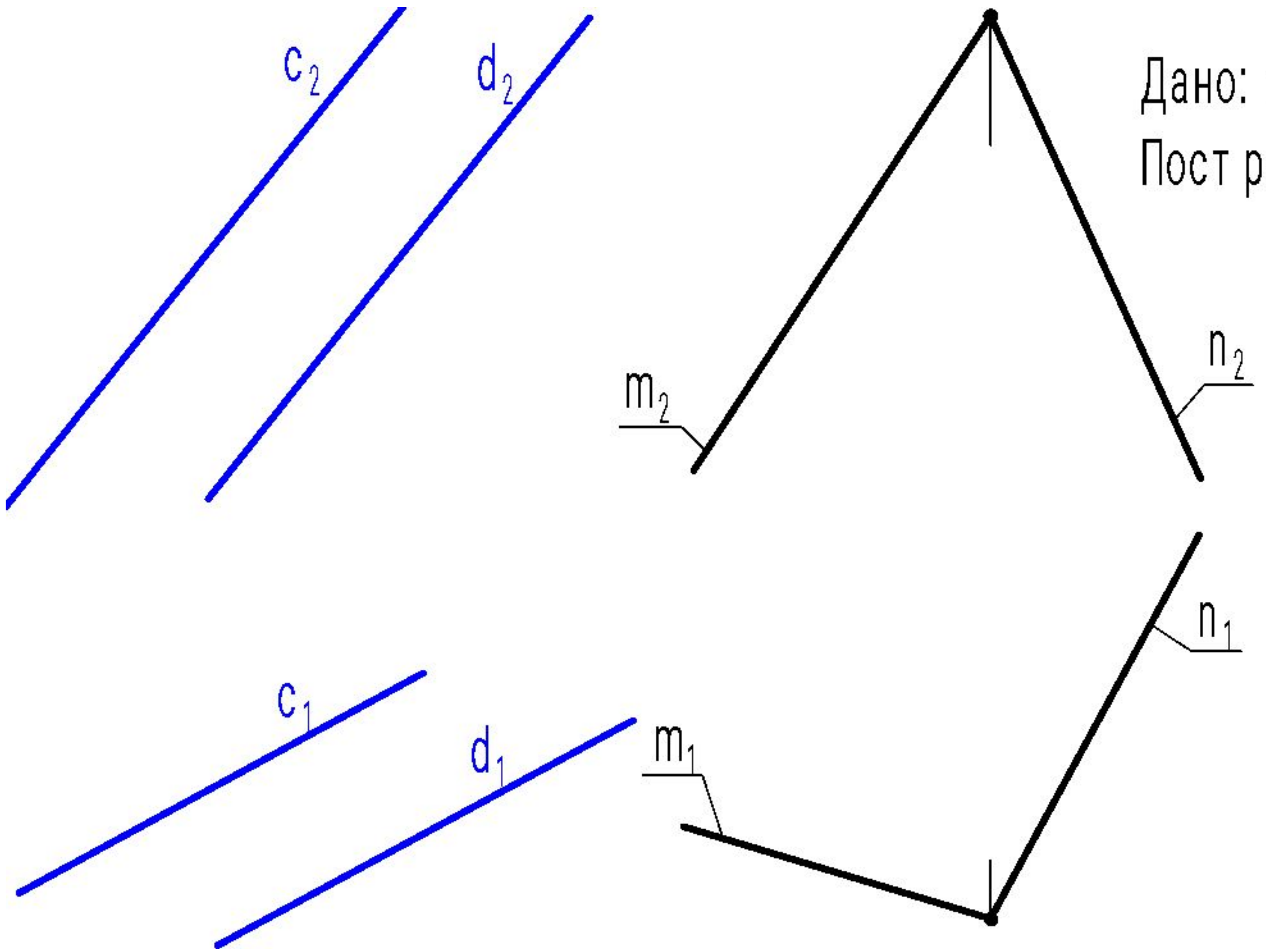
$T \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2$ – прямая; $l \subset T \Rightarrow T_2 \equiv l_2$

$l \subset P(\Delta ABC) \Rightarrow l(M,N)$, $M = T \cap AB$; $N = T \cap BC$

Если одна из двух пересекающихся плоскостей является плоскостью частного положения, то задача на построение линии их пересечения решается очень просто.

Следовательно, при построении линии пересечения двух плоскостей, для упрощения построений вспомогательные секущие плоскости должны быть только плоскостями частного положения – проецирующими или уровня.

Исходное условие

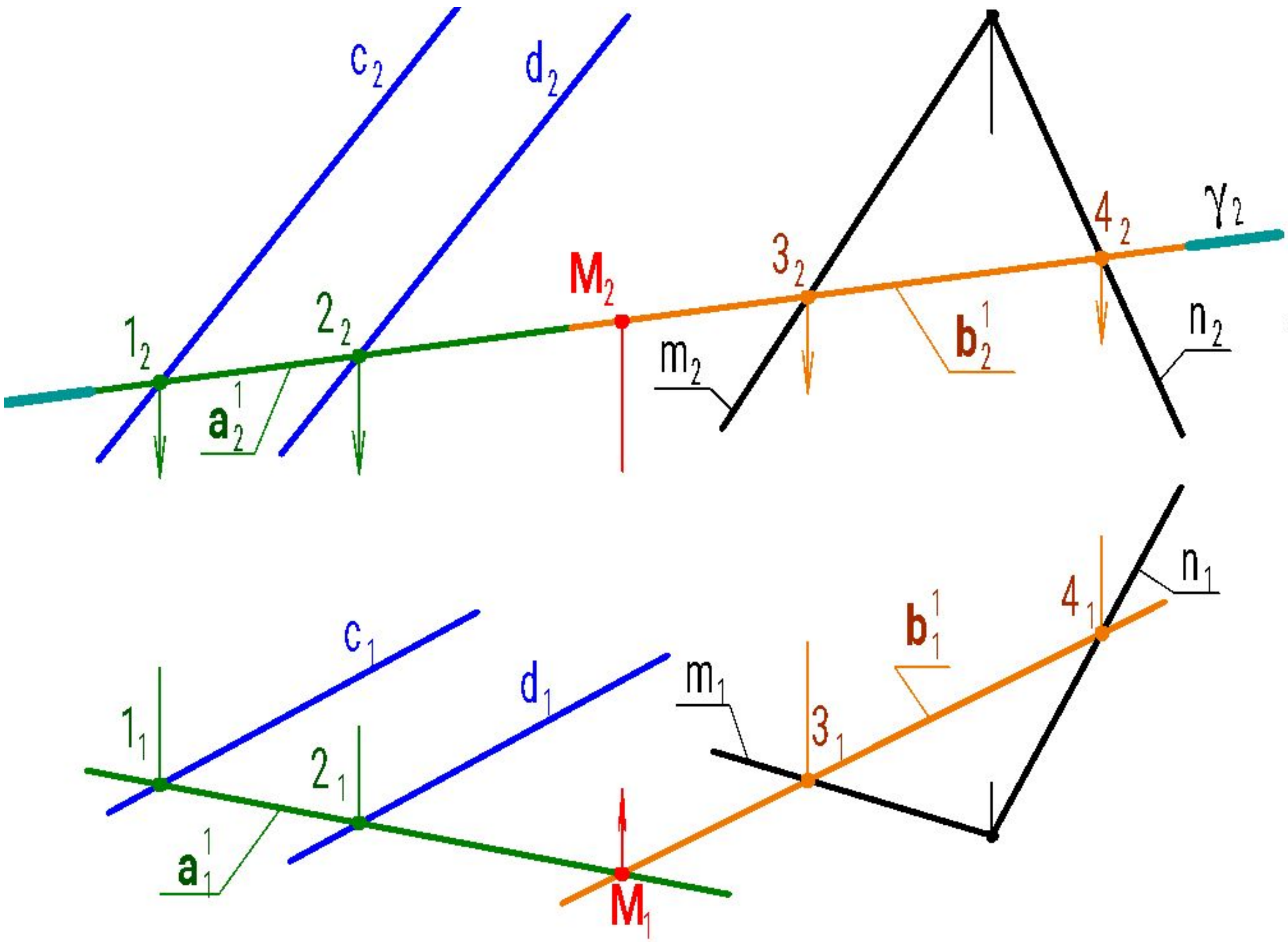


Дано: пл. $\alpha(c||d)$; пл. $\beta(m \cap n)$.

Построить: $l=\alpha \cap \beta$; $l(M,N)$

Построение точки, принадлежащей линии пересечения двух плоскостей, введением дополнительной секущей плоскости

γ – дополнительная секущая плоскость (проецирующая)

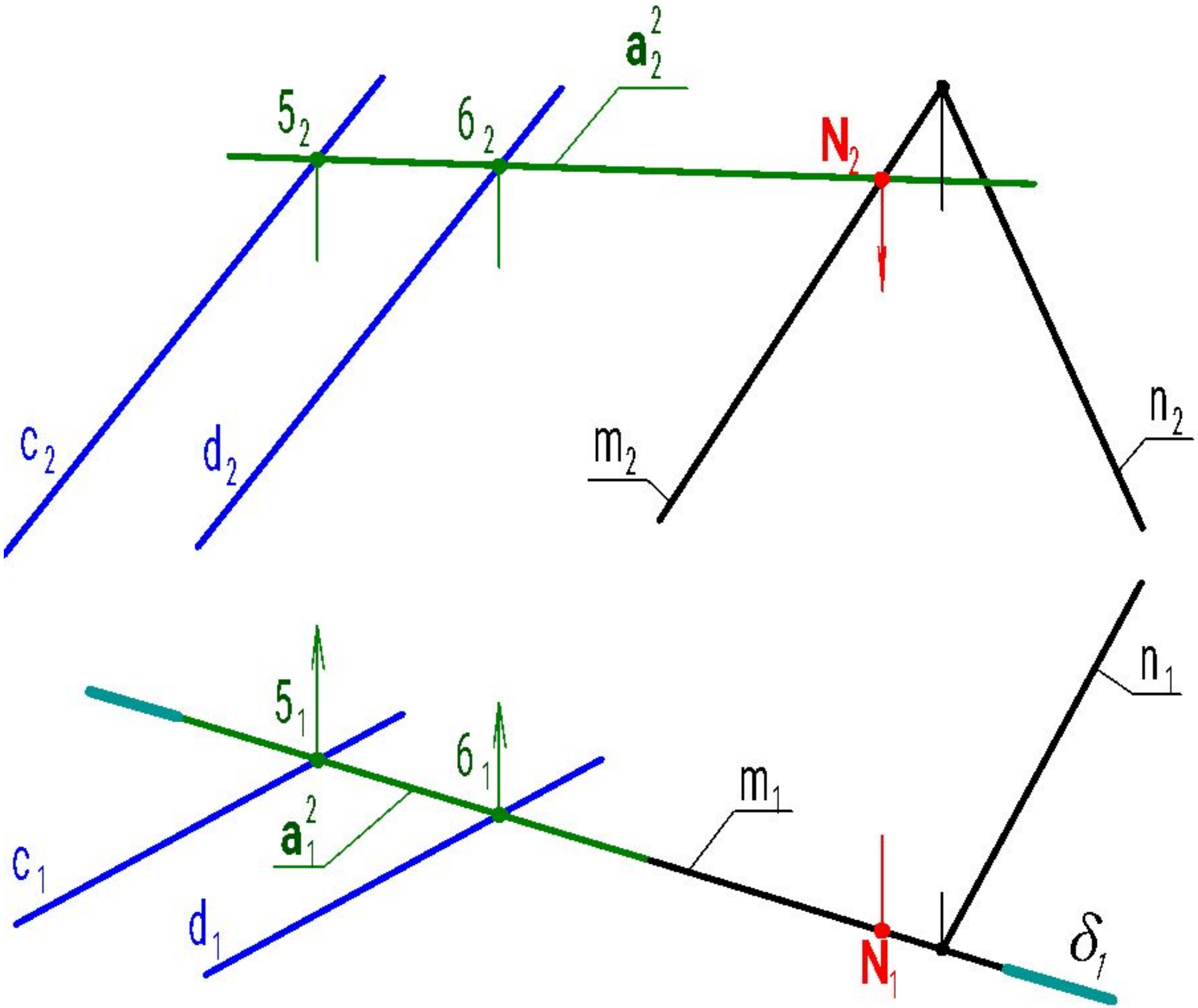


$\gamma \perp \Pi_2 \Rightarrow \gamma_2$ - прямая

$\gamma \cap \alpha = a^1;\ \gamma \cap \beta = b^1;$

$\Rightarrow a^1 \cap b^1 = M$

Построение точки, принадлежащей линии пересечения двух плоскостей, как точки пересечения прямой, принадлежащей одной из заданных плоскостей, с другой заданной плоскостью



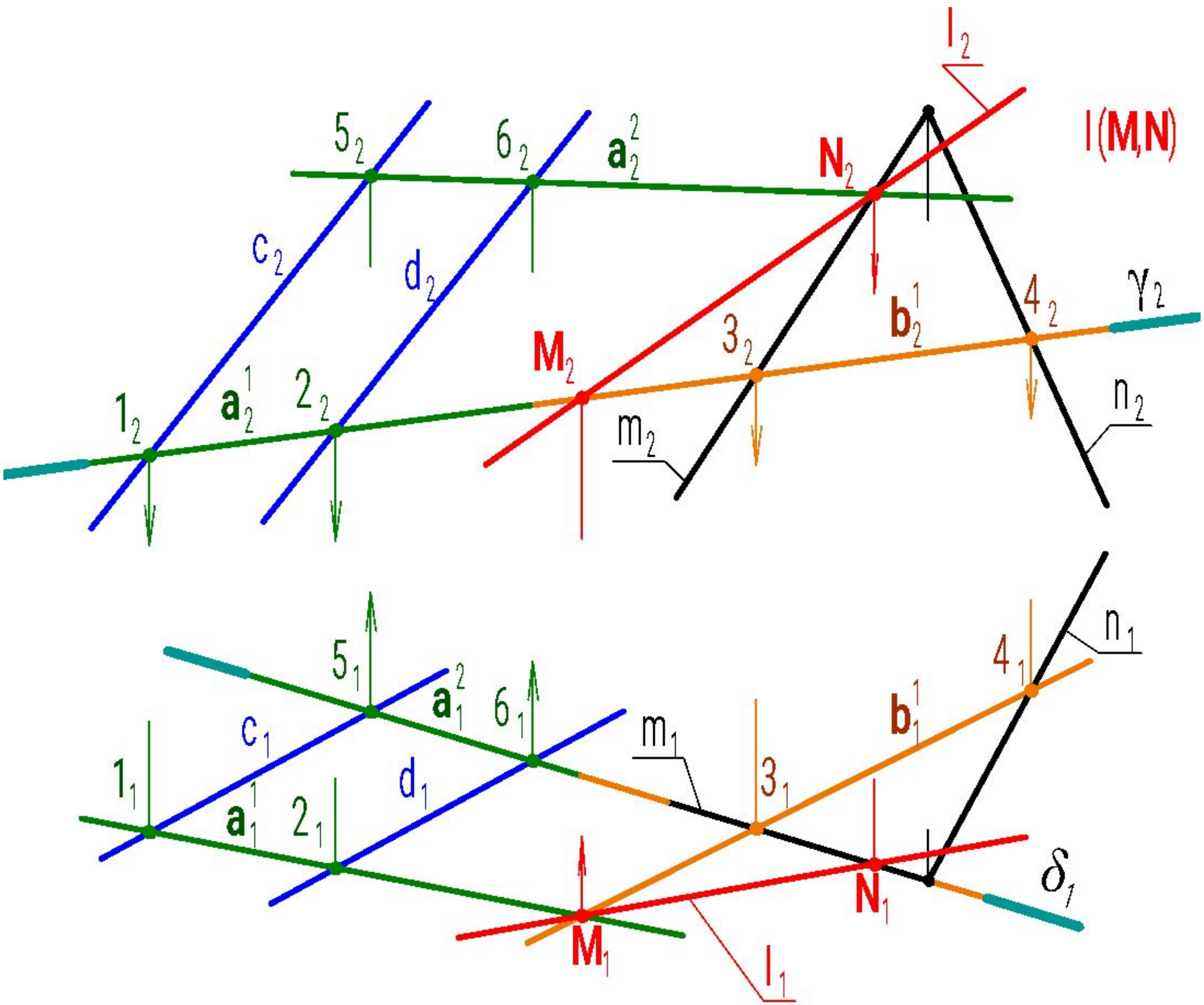
$m \cap \alpha = N$

$m \cup \delta;\ \delta \perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 \equiv \delta_1$

$\delta \cap \beta = m;\ \delta \cap \alpha = a^2$

$\Rightarrow m \cap a^2 = N$

Окончательный вид решения поставленной задачи на построение линии пересечения двух плоскостей



Способы преобразования проекций

Способы преобразования проекций применяют для получения нового изображения объекта или группы объектов, которое позволяет упростить решение поставленной задачи.

Как правило, это переход от общего положения к частному.

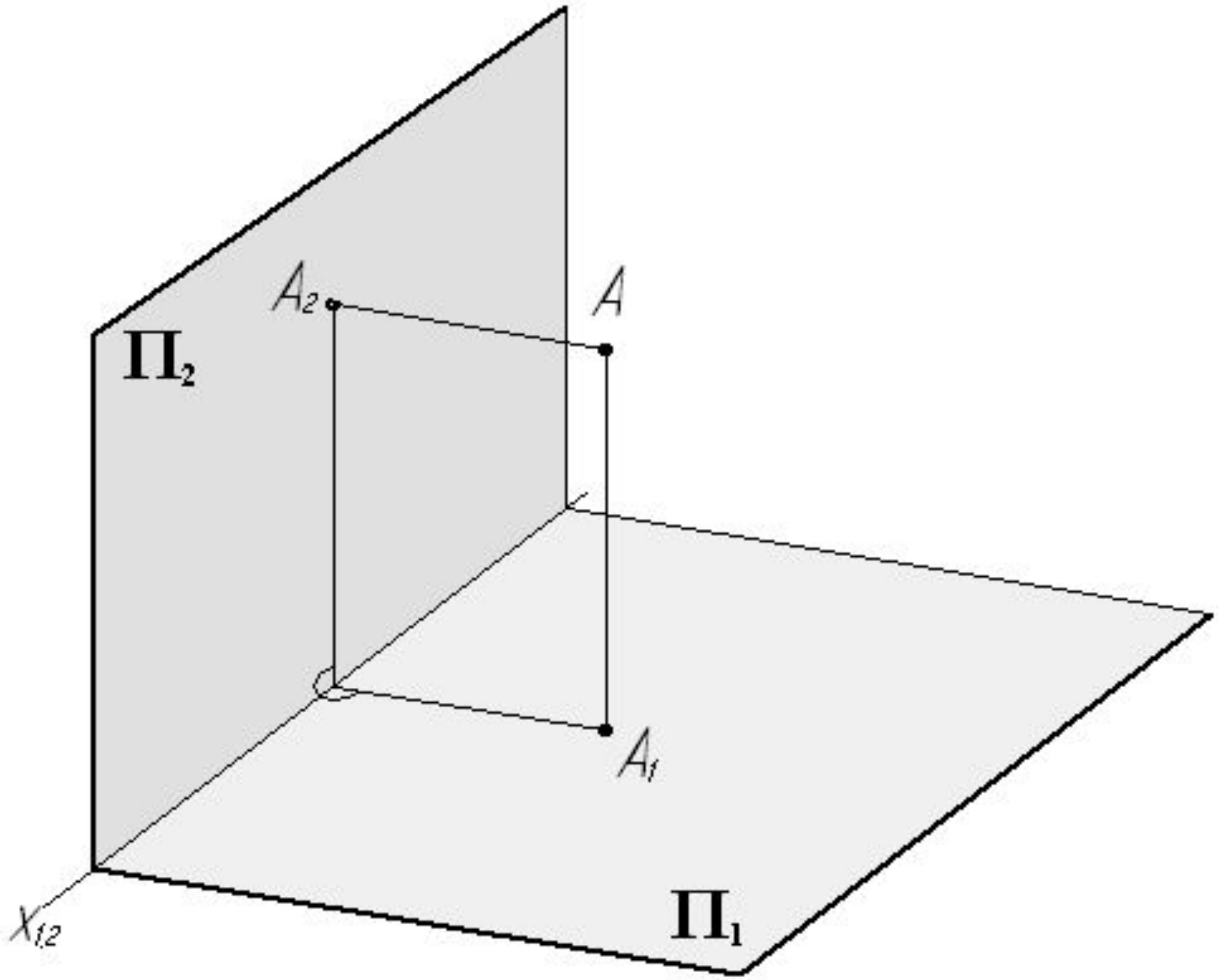
Способы преобразования проекций

- **Объект в пространстве не перемещается**
  - **Способ дополнительного проецирования**
    - **Центрального**
    - **Параллельного косоугольного**
    - **Прямоугольного – перемена (замена) плоскостей проекций**
- **Объект в пространстве перемещается**
  - **Плоскопараллельное перемещение**
    - **Вращение**
      - **Ось вращения перпендикулярна плоскости проекций (может указываться или не указываться)**
      - **Ось вращения параллельна плоскости проекций**

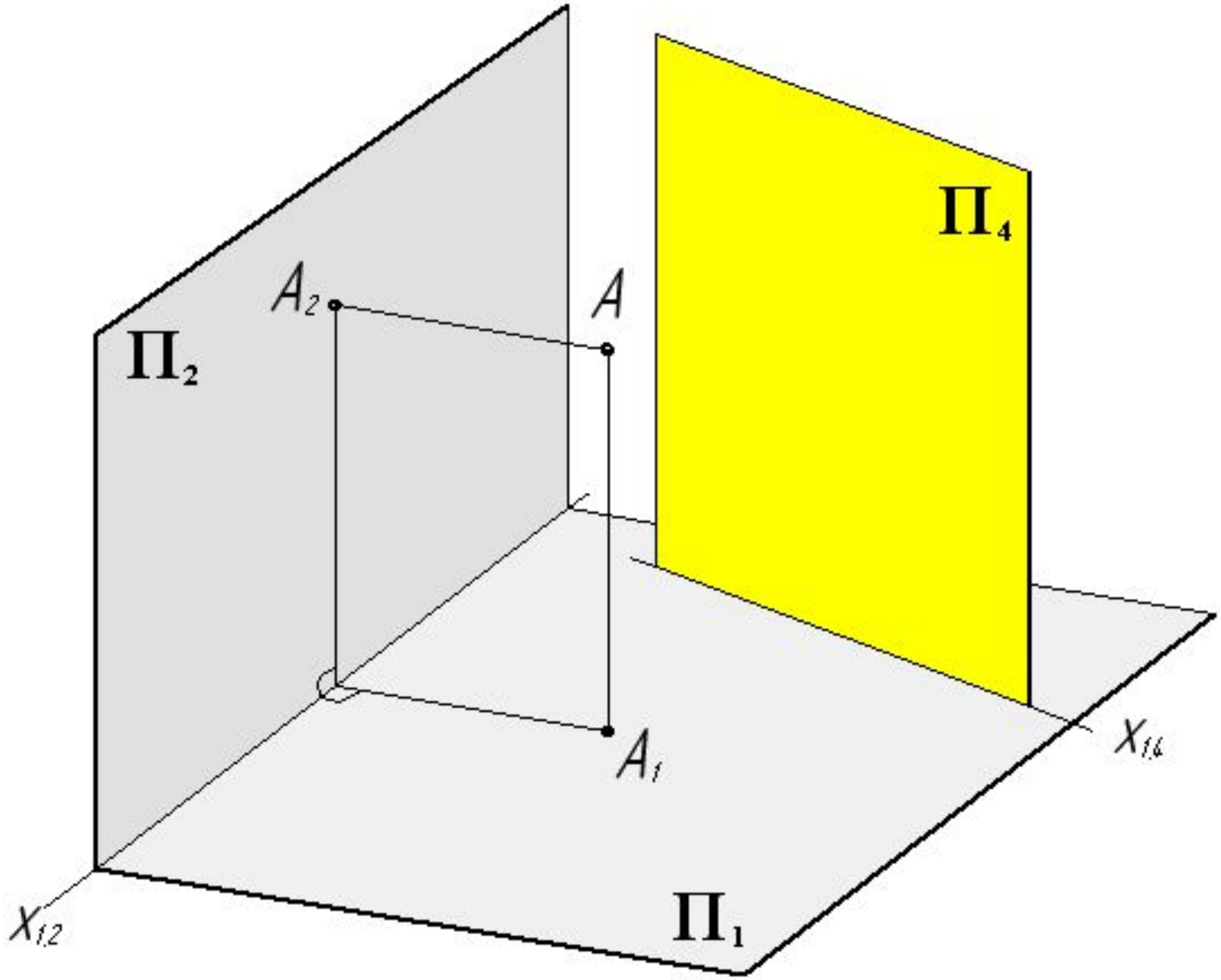
Дополнительное прямоугольное проецирование – перемена плоскостей проекций

- Подбираемая дополнительная плоскость проекций должна быть только проецирующей. Тем самым создаётся новая прямоугольная система плоскостей проекций.
- Подбираемые дополнительные плоскости проекций обозначаются $\mathbf{П_4}$, $\mathbf{П_5}$, $\mathbf{П_6}$ и т.д.

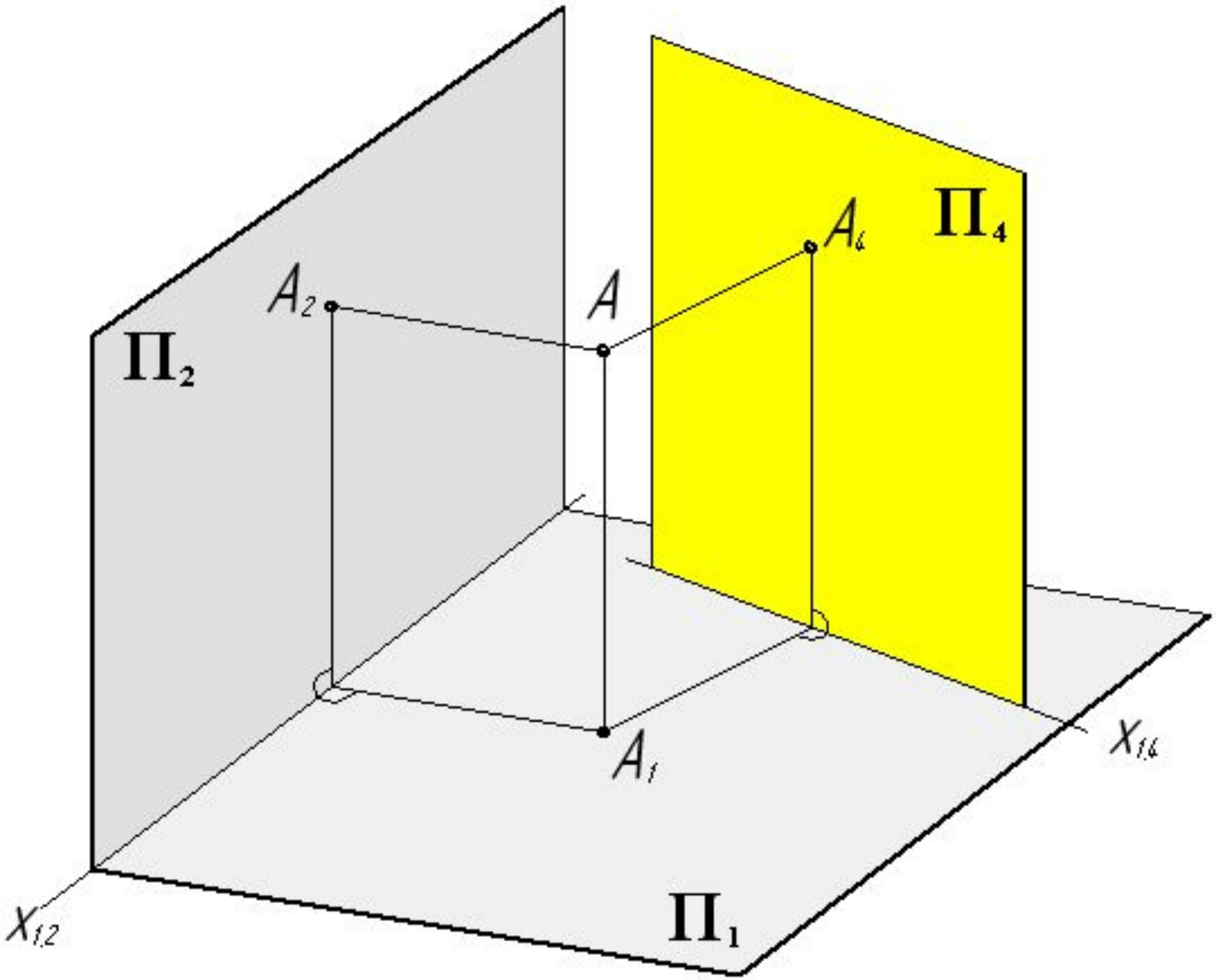
В ортогональной системе двух плоскостей проекций $П_1/П_2$ взята произвольная точка А и построены ее проекции.



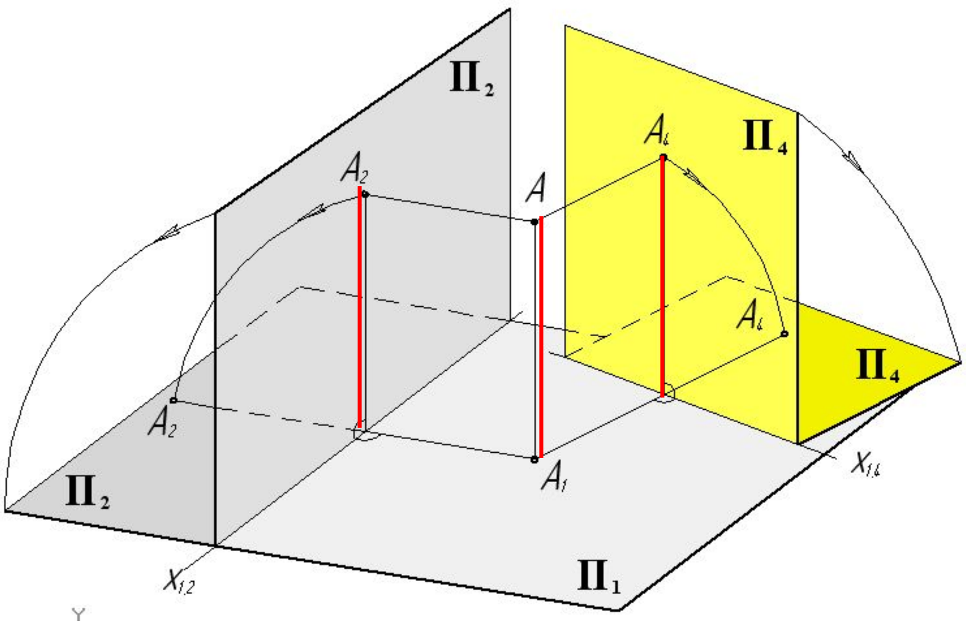
Вводится дополнительная плоскость проекций $П_4$.
Например, горизонтально-проецирующая.
Таким образом создается новая система ортогональных плоскостей проекций $П_1/П_4$ с осью $x_{1,4}$

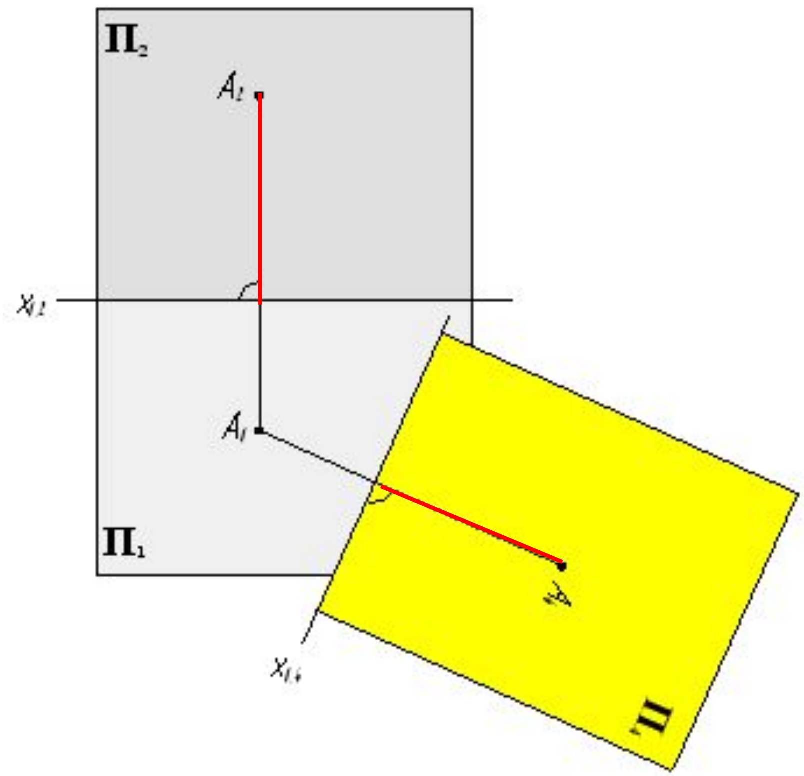


Точка А ортогонально проецируется на плоскость $П_4$



Принцип построения эпюра





Так как точка А не изменяет своего положения относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$, то расстояние от точки А до плоскости $П_1$ остается неизменным, как в системе $П_1/П_2$, так и в системе $П_1/П_4$.
Т.е. $(A,A_1) = (A_2,x_{1,2}) = (A_4,x_{1,4})$.

Вращение

Каждая точка объекта вращается вокруг выбранной оси, перемещаясь по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Осью вращения может быть ***<u>только</u>*** прямая частного положения – прямой уровня или проецирующей прямой.

Ось вращения – прямая уровня

Плоскость вращения точки - проецирующую плоскость.

На плоскости проекций, параллельно которой расположена ось вращения, траектория перемещения точки имеет форму прямой, а на другой – форму эллипса, что не дает возможности ее использования.

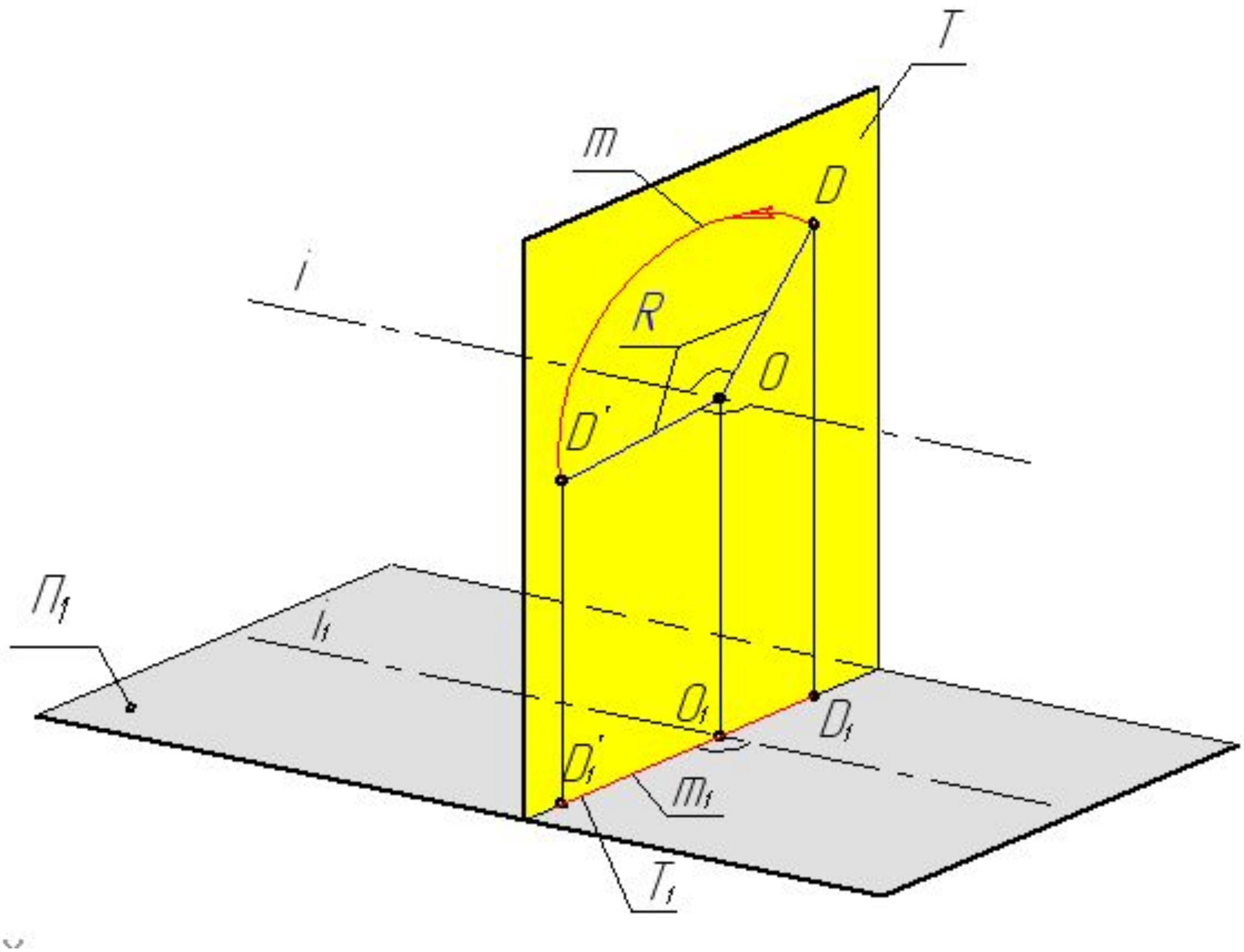
Все построения выполняются только на одной проекции.

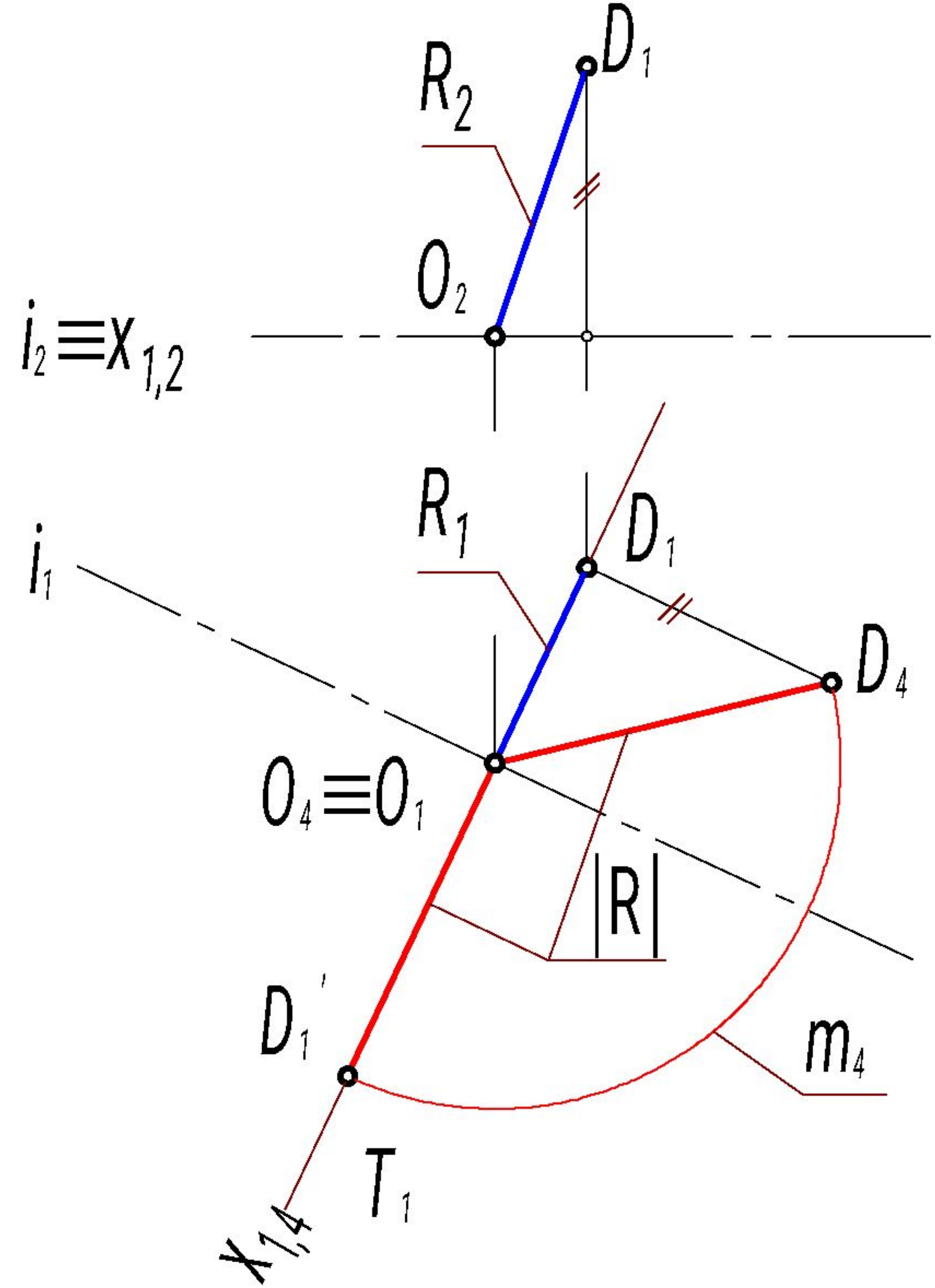
Вся задача сводится к определению истинной величины радиуса вращения точки.

Данный способ вращения имеет следующие ограничения:

- применим практически только к плоским фигурам;
- ось вращения должна лежать в плоскости поворачиваемой фигуры.

На рисунке ось вращения ***i*** является горизонталью





D_1
R_2
O_2
$i_2 \equiv x_{1,2}$
R_1
D_1
i_1
D_4
$O_4 \equiv O_1$
$|R|$
D_1'
m_4
T_1
$x_{1,4}$